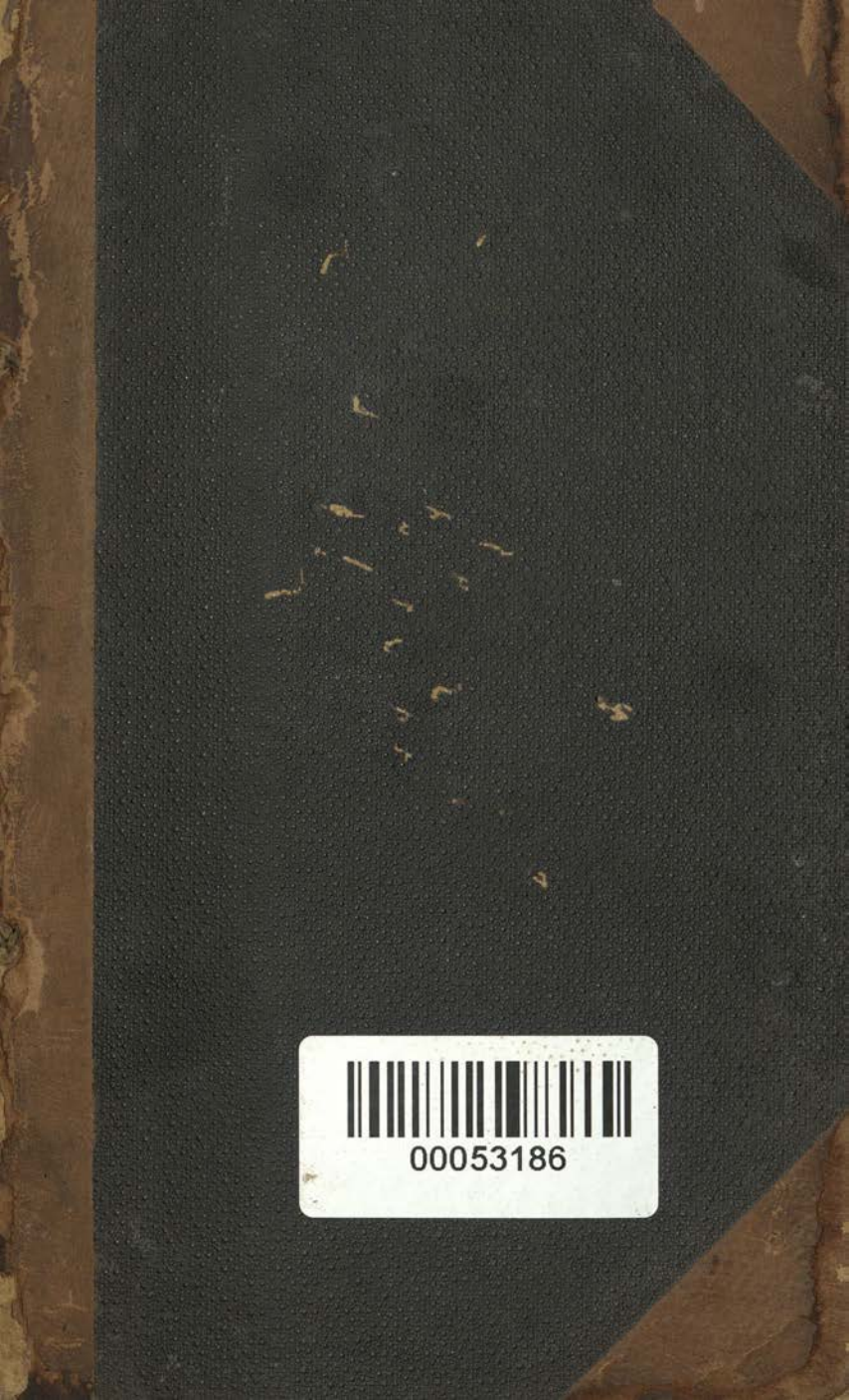

00053186

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 26 June, 2018

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE,

PAR J.-B. BIOT,

Membre de l'Institut de France, etc.,

AVEC DES ADDITIONS RELATIVES A L'ASTRONOMIE NAUTIQUE,

PAR M. DE ROSSEL,

Membre du Bureau des Longitudes de France, ancien Capitaine de vaisseau, rédacteur et coopérateur du Voyage de d'Entrecasteaux.

53186

SECONDE ÉDITION,

Destinée à l'enseignement dans les Lycées impériaux et les Écoles secondaires.

Omnium rerum principia parva sunt,
Sed suis progressionibus usa augentur.

CIC. de Fin., lib. V.

PARIS,

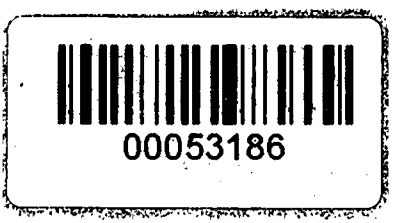
KLOSTERMANN fils, acquéreur du fonds de Mad. Ve. BERNARD, rue du Jardinet, n°. 13, quartier St.-André-des-Arts;

SAINT-PETERSBOURG,

KLOSTERMANN père et fils, Libraires.

M. DCCC. XI.

53186


00053186

TABLE

DES CHAPITRES.

LIVRE QUATRIÈME.

Page.

CHAP. Ier. *Phénomènes généraux du Mouvement des Planètes.* 1

CHAP. II. *Manière de déterminer la Position des Orbites planétaires, d'après les observations; il en résulte que ces Orbites sont toutes comprises dans des plans qui passent par le centre du Soleil.* 10

NOTE. *Méthode directe pour déterminer la longitude des nœuds d'une Planète, et pour prouver leur opposition dans le ciel, sans supposer aucune connaissance de la nature de l'orbite. Application de cette Méthode à Mars.* 22

CHAP. III. *De la nature des Orbites planétaires démontrée par les observations. Détermination exacte de leurs élémens par la méthode des équations de condition. Lois de Kepler. Tableau des mouvemens des Planètes et des élémens de leurs Orbites.*

NOTE. *Formules pour calculer le lieu héliocentrique d'un astre et sa distance au Soleil, quand on connaît son lieu géocentrique et sa distance à la Terre ou réciproquement.* . . . 26

NOTE. *Formules pour déterminer le lieu du périhélie et l'excentricité, au moyen de trois observations réduites au plan de l'Orbite. Usage des équations de condition pour dé-*

Page

terminer ces élémens par un grand nombre d'observations. Application numérique de ces méthodes à Jupiter. 42

NOTE. *Autre méthode pour déterminer la position du périhélie et l'excentricité d'après les passages de la Planète par ses nœuds. Application numérique de cette méthode à Jupiter.* . 53

CHAP. IV. *Manière de prévoir les retours des Planètes à une même situation par rapport au Soleil et à la Terre.* . 56

CHAP. V. *De quelques particularités relatives à la constitution physique des Planètes. Durées de leurs rotations observées. Applatissement de Jupiter et de Saturne.* 66

CHAP. VI. *Des Satellites des Planètes. Manière de déterminer la forme et la position de leurs Orbites par les observations. Les Satellites qui tournent autour d'une même Planète sont assujétis aux lois de Kepler. Lois remarquables qui lient entre eux les mouvemens des trois premiers Satellites de Jupiter. Transmission successive de la Lumière rendue sensible par les retards de leurs Éclipses. Tableau des distances des Satellites à leurs Planètes et de leurs Révolutions sydérales.* 80

CHAP. VII. *De l'Anneau de Saturne. Méthode pour déterminer, d'après les observations, son inclinaison sur l'écliptique et la longitude de ses nœuds.* 85

CHAP. VIII. *Des Comètes. De la nature de leurs Orbites déduite des observations. elles se meuvent dans des paraboles. Elles sont assujéties, comme les Planètes, aux lois de Kepler. Formules du mouvement parabolique des Comètes.* 99

Page.

CHAP. IX. *Des Aérolithes*. 111

CHAP. X. *Résumé des phénomènes qui indiquent la réalité des Mouvemens de la Terre*. 114

CHAP. XI. *De l'Aberration de la lumière. Preuves de ce Phénomène déduites des observations. Il est produit par la composition des mouvemens de l'observateur, avec la vîtesse propre de la lumière. Détermination géométrique des divers déplacemens apparens que le mouvement de translation et de rotation de la Terre, la translation du système planétaire et les mouvemens propres des astres, doivent ainsi occasionner dans les positions géocentriques des Étoiles, des Planètes et des Comètes*. 120

NOTE. *Formules générales et nouvelles par lesquelles on peut calculer les divers genres d'aberration*. 147

CHAP. XII. *Des stations et des rétrogradations des Planètes. Ce phénomène est une conséquence du mouvement de la terre. Étendue et durée de la rétrogradation pour les planètes principales*. 175

NOTE. *Manière de calculer les époques des stations d'une planète, ainsi que l'étendue et la durée de sa rétrogradation. Application numérique de ces formules à Jupiter*. 181

CHAP. XIII. *Des vraies dimensions des Orbes planétaires. Manière de déterminer la parallaxe du Soleil par l'observation des passages de Vénus sur le disque de cet astre. Accord de ce résultat avec celui qui est donné par la théorie de l'attraction. Tableau des dimensions absolues des planètes, et de leurs distances au soleil*. 185

Page.

CHAP. XIV. *Des Étoiles, de leurs distances, de leurs mouvemens. Manière de déterminer par les observations, si leur parallaxe annuelle est sensible.* 191

NOTE. *Formules pour calculer la parallaxe annuelle des étoiles en longitude, en latitude, en ascension droite et en déclinaison. Détermination des époques où chacun de ces résultats atteint son* maximum *ou son* minimum. 201

CHAP. XV. *De la Pesanteur universelle considérée comme un fait général résultant des lois de Kepler. Comment on peut déduire de ce fait tous les phénomènes astronomiques par le calcul. Tableau des masses des Planètes principales, de la Lune, et des satellites de Jupiter.* 210

NOTE DU QUATRIÈME LIVRE.

Manière de calculer les passages de Vénus sur le soleil par les formules générales des Eclipses données dans le troisième livre. Application numérique de ces formules au passage de Vénus observé en 1769. Il en résulte 8″,5 pour la parallaxe du soleil. 226

ADDITIONS.

I. SUR LA MESURE DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU PAR LE MOYEN DU BAROMÈTRE, AVEC DES TABLES. 1

II. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE GNOMONIQUE; (par M. *Berroyer*, ancien élève de l'École Polytechnique) 5

Considérations générales. . . . . . ibid.

Manière de poser l'axe du cadran. 56

Cadran équatorial à deux faces. 62

Page.

Cadran horisontal. 65

Cadran sur le premier vertical. 74

Cadran polaire. 76

Cadran oriental ou occidental. 78

Cadran vertical déclinant; manière d'y tracer les lignes horaires, leur longueur, les arcs diurnes et la méridienne du tems moyen. 79

Cadran incliné d'une manière quelconque sur l'horison et le méridien. 93

Calcul numérique d'un Cadran vertical déclinant, construit dans un lieu dont la latitude est 48°. 12', avec la détermination des Arcs des Signes et de la méridienne du tems moyen 95

III. SUR LE MOUVEMENT DE TRANSLATION DU SYSTÈME PLANÉTAIRE.

Formules exactes au moyen desquelles on peut reconnaître s'il est sensible, et quelle est sa direction. Application numérique aux principales étoiles dans lesquelles on a observé des déplacemens. 114

IV. SUR LA RECTIFICATION DE LA LUNETTE MÉRIDIENNE PAR LE MOYEN DES AZIMUTHS.

Méthode de M. Delambre avec un exemple numérique. Méthode nouvelle, indépendante de l'ascension droite absolue, de l'erreur de la pendule, et même de la différence des ascensions droites. Table des Étoiles circompolaires auxquelles on peut l'appliquer dans les climats d'Europe. 130

V. SUR LA LONGUEUR DU PENDULE A SECONDES, A DIFFERENTES LATITUDES.

Exposé des expériences nécessaires pour déterminer cette longueur avec la plus

Page.

grande exactitude. Manière de faire ces expériences, et de calculer les diverses corrections qu'elles exigent. Manière de tirer de ces résultats l'applatissement de la Terre, et le décroissement de la pesanteur de l'équateur au pôle. Application aux mesures du Pendule faites en divers points de la Méridienne, et combinées par la méthode des moindres carrés. . . . 148

NOTE. *Démonstration de la formule qui sert à corriger les amplitudes ; formules pour les corrections relatives au poids du fil et de la calotte* 169

NOTE. *Description et usage du Comparateur.* 174

NOTE. *Exemple numérique d'une mesure du Pendule, faite à Dunkerque.* 179

VI. MÉTHODE DE M. LAPLACE POUR DÉTERMINER LES ORBITES DES COMÈTES, AVEC UN EXEMPLE NUMÉRIQUE. 185

Addition aux formules données dans le second livre pour la réduction au solstice. 207

Table pour réduire au Méridien les observations faites au Cercle répétiteur : calculée par MM. Delambre et Bouvard. . . 208

ASTRONOMIE NAUTIQUE.

CHAP. Ier. *Notions préliminaires, et moyens de trouver les données des calculs dans la Connaissance des Tems.* 3

Moyen de réduire les degrés en Tems. 10

Moyen de réduire le Tems en degrés. 11

Moyens de calculer les données que l'on trouve dans la Connaissance des Tems pour un instant proposé. 12

CHAP. II. *Des corrections que l'on doit faire à*

Page.

toutes les hauteurs observées du Soleil, de la Lune et des Étoiles. 23

De la Dépression de l'horison. . ibid.

Des demi-diamètres du Soleil et de la Lune. 30

De la Réfraction astronomique. 31

De la Parallaxe. 33

Correction de la plus petite des hauteurs prises hors du Méridien, pour obtenir la latitude. . 39

CHAP. III. *De la Latitude.* 47

Trouver la Latitude par la hauteur méridienne d'un Astre quelconque. 48

Trouver la Latitude par plusieurs hauteurs du Soleil, prises très-près du méridien. 53

Trouver la Latitude par deux hauteurs du Soleil, prises hors du méridien, et par l'intervalle de tems écoulé entre les observations. 60

PRÉCEPTES GÉNÉRAUX *pour observer la Latitude par deux hauteurs prises hors du méridien.* 62

OBSERVATIONS DE MÊME ESPÈCE. . . . . ibid.

Règles pour la hauteur la plus voisine du méridien. . . . . . ibid.

Règles pour la hauteur la plus éloignée du méridien. . . . . . ibid.

OBSERVATIONS DE DIFFÉRENTE ESPÈCE. 63

Règles pour la hauteur la plus voisine du méridien. . . . . . ibid.

Règles pour la hauteur la plus éloignée du méridien. . . . . ibid.

Page.

Remarque sur l'application des règles précédentes. 64

CALCUL DE LA LATITUDE. . . 65

CHAP. IV. *Calcul de l'Angle horaire, et de la hauteur d'un Astre quelconque.* 72

Calcul de l'Angle horaire. . . . 73

Calcul de la hauteur des Astres. 83

CHAP. V. *Moyens de Régler les montres marines et de les employer à la détermination des Longitudes.* 88

Moyens de Régler les montres marines. 89

Trouver la Longitude par les montres marines. 101

Moyens de corriger les Longitudes obtenues par des montres marines 107

CHAP. VI. *Trouver la Longitude par les distances de la Lune au Soleil et aux Étoiles.* 112

Moyens de se procurer les hauteurs des Astres dont on observe la distance. 115

Calcul de la distance vraie et de l'heure de Paris. 122

Calcul de l'heure du lieu. 131

CHAP. VII. *Trouver la déclinaison de l'Aiguille aimantée par l'observation de l'azimuth ou de l'amplitude du Soleil, et par le relèvement astronomique d'un objet terrestre.* 142

Calculs de l'azimuth et de l'amplitude du Soleil. 143

Des relèvemens astronomiques. . 153

NOTES. 1

Ire. *Calcul de l'Angle horaire.* 172

II. *Calcul de la hauteur.* 173

Page.

III. *Calcul de la Latitude par deux hauteurs du Soleil prises hors du méridien, et par l'intervalle de tems écoulé entre les observations.* 175

IV. *Calcul de la distance vraie de la Lune au Soleil ou à une Étoile.* 178

V. *Calcul de l'Azimuth ou de l'Amplitude du Soleil.* 180

VI. *Calcul de la différence qui existe entre l'Azimuth du Soleil, et l'Azimuth d'un objet terrestre.* 182

VII. *Principes de la construction des Tables destinées à trouver la correction de la plus petite des deux hauteurs prises hors du méridien, pour obtenir la latitude.* 184

VIII. *Moyens de calculer l'inclinaison du Rayon visuel qui va aboutir au pied d'une côte par laquelle l'horison se trouve borné.* 187

TABLES D'ASTRONOMIE NAUTIQUE.

TABLE I. *Dépression de l'Horison.* 2

TABLE II. *Augmentation du demi-diamètre de la Lune.* 3

TABLE III. *Diminution de la Parallaxe équatoriale à divers degrés de latitude.* . . . . . ibid.

TABLE IV. *Des erreurs des surfaces du grand miroir, lorsque ces surfaces font entre elles un angle d'une minute.* . . . . . ibid.

TABLE V. *Réfraction pour* $0^{m},760$ *du baromètre, et* $+4^{o}$ *du thermomètre centigrade.* 4

TABLE VI. *Corrections des réfractions relatives à la température.* 6

TABLE VII. *Corrections des réfractions relatives au poids de l'atmosphère* 8

TABLE VIII. *Parallaxe de la Lune moins la réfraction* 10

TABLE IX. *Changement en hauteur pendant la der-*

Page.

nière minute qui précède, et la première minute qui suit le passage au méridien. 40

TABLE X. *Multiplicateurs des nombres de la* table IX. 42

TABLE XI. *Nombres pour trouver les corrections des longitudes obtenues par les montres marines.* 43

TABLE XII. *Pour trouver la* correction *de la plus petite des deux hauteurs du* ☉. Premier terme. 44

TABLE XIII. *Pour trouver la* correction *de la plus petite des deux hauteurs du* ☉. Second terme. 52

TABLE XIV. *Azimuth correspondant au multiplicateur du chemin fait en latitude.* 56

TABLE XV. *Hauteur du Soleil à l'instant de son passage au premier vertical, ou à celui du plus grand Azimuth.* 57

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

Fautes essentielles à corriger.

Erratum pour le tome premier.

Tableau de la page 90.

2e.	partie, ligne dernière,	*lisez :*	26°. 0′. 36″,15	41°. 8′. 22″,66
3e.		1re., *lisez :*	39°. 23′. 41″,15	41°. 9′. 47″,95
Id.		dernière, *lisez :*	56°. 11′. 0″,49	41°. 9′. 45″,31

Page 96, 15 *en remontant*, 15″,04, *lisez :* 16″,27.
Id. 13 *en remontant*, 44″,96, *lisez :* 43″,73.
155, 11, elles, *lisez :* les latitudes.
156, 4, 395t,6, *lisez :* 395t,31.
154, 3 *en remontant*, *supprimez au dénominateur le facteur* 2.
163, 8 *en remontant*, au numérateur 1374487,89, *lisez :* 1374487,09.
171, 4, 8pi., *lisez :* 7pi.
Id. 6, 57mm, *lisez :* 54mm.
204, 12 *en remontant*, 35, *lisez :* 35 *bis*.
205, 1re. 35, *lisez :* 35 *bis*.
248, 14, *OKO″*, *lisez : OKO′*.
251, 14, 8373, *lisez :* 8371.
269, 11, *OL′*, *lisez : OL*.
270, 5 *en remontant*, *OH*, *lisez : OZ*.
282, 10, *LL′*, *lisez : LL*.
284, 1re. *C′*, *lisez : Q′*.
285, 6 *en remontant*, à la colonne, *lisez :* au cercle.

Page 309, ligne 5 *en remontant*, $Z' + \Delta$, *lisez :* pour $Z' + A$.
311, 4 *en remontant*, inférieure, *lisez :* supérieure.
343, 3 *en remontant*, I', *lisez :* I.
345, 4, de l'astre, *lisez :* du cercle.
346, 4 *en remontant*, Z, *lisez :* I.
350, 1re. $ABCD$, *lisez :* $ABCD$, *fig.* 1re.
376, 7, 20′ à 15′, *lisez :* 20″ à 15″.
422, 13 *en remontant*, *fig.* 8, *lisez :* *fig*
423, 1re. *ajoutez :* *fig.* 87.
Id. 4 *en remontant*, *ajoutez :* *fig.* 88.
429, 1re. BM, *lisez :* BN.
Id. 6, BM, *lisez :* BN.
453, 5, 29, *lisez :* 19.
429, 12, 528067,1, *lisez :* 538067,1.
443, 4 en remontant, nR, lisez : nr.
444, 7, tang $2nR$, *lisez :* cot $2nR$.
445, 7 *en remontant*, sin R, *lisez :* sin nR.
448, 6 *en remontant au dénominateur* tang Z, *lisez :* tang Z.

Erratum de l'Astronomie nautique.

Page 10, ligne 7, pour 135°, *lisez :* pour 133°.
95, 3, de deux avances, *lisez :* des deux avances.
96, 6, $7^h.34'.28'',99$, *lisez :* $7^h.34'.28'',82$.
109, 3, $+ 5^h.24$, *lisez :* $+ 5'.24$.
Id. 9, $+ 8^h.56$, *lisez :* $+ 8''.56$.
139, 7, ne serait pas une erreur, *effacez* erreur.
186, 24, passage du méridien, *lisez :* passage au méridien.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

LIVRE QUATRIÈME.

THÉORIE DES PLANÈTES, DES COMÈTES, ET DES SATELLITES.

CHAPITRE PREMIER.

Des Mouvemens des Planètes autour du Soleil.

1. Nous venons de reconnaître et de déterminer les mouvemens du soleil et de la lune. Ces deux astres semblent devoir nous intéresser plus que tous les autres; le premier, comme étant pour la terre le principe de la vie et de la fécondité; le second, à cause de sa proximité, de son éclat, de ses phases; tous deux, enfin, par les indications qu'ils fournissent pour la mesure du temps.

Cependant les autres corps qui composent notre système

planétaire vont offrir à nos recherches des résultats qui ne sont ni moins curieux, ni moins utiles. En les étudiant, nous acquerrons une connaissance plus parfaite du système du monde, et cette connaissance rejaillira sur nos premiers résultats, soit pour les corriger par des déterminations plus précises, soit pour nous les faire envisager sous un point de vue plus général, soit enfin pour y découvrir des rapports qui nous auraient échappé ; car la comparaison d'un grand nombre de phénomènes semblables développe nécessairement leurs analogies, et c'est ainsi que l'on apprend à voir, à mesure que l'on voit davantage.

Encouragés par ces motifs, entrons avec zèle dans cette étude des mouvemens des planètes ; cherchons à en découvrir les lois, en les faisant sortir de la comparaison des phénomènes, conformément à la marche que nous avons toujours suivie jusqu'à présent.

2. Commençons par *Vénus*, qui est la plus apparente. Il n'est presque personne qui n'ait remarqué une belle étoile qui brille quelquefois le soir à l'occident, un peu après le coucher du soleil, et que l'on nomme pour cette raison l'*étoile du soir*. C'est Vénus. En l'observant de suite pendant quelques jours, on s'aperçoit qu'elle ne reste pas constamment à la même distance du soleil ; elle s'en écarte jusqu'à un certain terme qui est d'environ 50°, ou $\frac{5}{36}$ de l'hémisphère céleste, après quoi elle semble retourner vers cet astre ; et comme on ne peut ordinairement la voir à la vue simple que lorsque le soleil est sous l'horizon, elle n'est visible que quelques instans immédiatement après le coucher de cet astre. Bientôt elle se couche en même temps que lui, et alors l'éclat de la lumière du soleil empêchant de l'apercevoir, on la perd tout-à-fait de vue.

Mais au bout de quelques jours, on découvre, le matin, vers l'orient, une belle étoile qui ne paraissait pas aupara-

vant. Elle ne se montre d'abord que peu d'instans avant le lever du soleil, et on la nomme, pour cette raison, *l'étoile du matin;* elle s'éloigne de jour en jour de cet astre, et devance de plus en plus son lever; mais après s'en être écartée jusqu'à un certain terme, qui est d'environ 50°, elle retourne vers lui, et se lève tous les jours plus tard; enfin, elle le rejoint de nouveau, se lève avec lui, et on cesse de l'apercevoir.

C'est alors, ou du moins c'est quelques jours après, que l'on revoit à l'occident l'étoile du soir, à peu de distance du soleil. En se dégageant de ses rayons, elle s'en éloigne de nouveau, et s'en rapproche ensuite, toujours suivant les mêmes lois.

Ces mouvemens alternatifs, observés depuis plus de deux mille ans sans interruption, nous indiquent évidemment que l'étoile du soir et l'étoile du matin ne sont qu'un seul et même astre. Ils nous apprennent aussi que cet astre a un mouvement propre, en vertu duquel il oscille autour du soleil, et se montre dans le ciel, tantôt avant, tantôt après lui.

Voilà ce que l'on peut apercevoir à la vue simple; mais l'admirable invention du télescope permet de pousser beaucoup plus loin ces observations.

3. En observant Vénus au télescope, on voit qu'elle a des phases comme la lune. Le soir, lorsqu'elle se rapproche du soleil, elle présente un croissant lumineux, dont les pointes sont tournées vers l'orient, c'est-à-dire du côté du ciel opposé à cet astre. La largeur apparente de ce croissant diminue de jour en jour, à mesure que Vénus se rapproche du soleil. Mais après qu'elle l'a dépassé, lorsqu'elle reparaît, le matin, de l'autre côté de cet astre, les pointes du croissant sont tournées du côté opposé, c'est-à-dire vers l'occident; la phase lumineuse augmente peu-à-peu de

largeur, et prend la forme d'un demi-cercle. Vénus est alors dans son *premier quartier*. A mesure qu'elle se rapproche du soleil, la partie éclairée de son disque augmente; et lorsqu'elle revient à cet astre, elle nous paraît pleine; après qu'elle l'a dépassé, et lorsqu'elle reparaît le soir à l'occident, son disque commence à s'échancrer, et sa partie lumineuse diminue progressivement en passant par les mêmes périodes qu'elle avait suivies dans son augmentation.

4. Ces phénomènes nous montrent donc Vénus comme une sorte de lune tournant autour du soleil, et éclairée par sa lumière. Toutes les observations confirment cette vérité.

Lorsque Vénus paraît pleine, elle est au-delà du soleil par rapport à la terre; aussi son diamètre apparent est alors fort petit, et ne va quelquefois qu'à 30″. Au contraire, lorsque ses phases diminuent et que sa face éclairée se trouve de plus en plus opposée à nous, son diamètre apparent augmente : elle est donc alors beaucoup plus près de la terre. Enfin, dans l'intervalle qui sépare sa disparition le soir et sa réapparition le matin, on la voit quelquefois se mouvoir sur le disque du soleil, avec l'apparence d'une tache ronde et noire; elle est alors entre la terre et le soleil, et son diamètre apparent est le plus grand qu'on observe dans une même révolution; il s'élève quelquefois jusqu'à 184″.

Ces diminutions et ces accroissemens ne sont pas sensibles à la vue simple, à cause de l'irradiation qui dilate un peu les diamètres apparens des objets, et d'autant plus qu'ils sont plus éclairés; les phases de Vénus augmentant d'étendue lorsque cet astre se trouve placé au-delà du soleil, l'accroissement de sa lumière compense, pour nos yeux, l'augmentation de sa distance; mais le télescope détruit ces illusions, et nous indique les variations réelles de la distance, par celles du diamètre apparent.

5. L'orbite de Vénus n'embrasse pas la terre; et si cela

était, cette planète viendrait quelquefois en opposition avec le soleil, et la terre se trouverait alors entre elle et cet astre; ce qui n'arrive jamais. Son orbe n'est pas non plus tout entier au-delà du soleil par rapport à la terre; puisque, si cela était, Vénus ne se trouverait jamais entre la terre et le soleil, au lieu qu'elle l'éclipse quelquefois; enfin, tandis que le soleil se meut, ou semble se mouvoir sur l'écliptique, Vénus ne s'en éloigne jamais au-delà de ses limites accoutumées, et ses oscillations autour de cet astre, ou ses *élongations*, sont toujours à-peu-près de même étendue. Ces faits réunis prouvent évidemment que Vénus se meut autour du soleil dans une orbite rentrante, que cet astre emporté avec lui sur l'écliptique dans son mouvement annuel. La marche progressive des phases de cette planète indique de plus qu'elle est opaque, non lumineuse par elle-même, et à-peu-près sphérique.

6. L'orbe de Vénus s'offrant à nous sous des points de vue différens dans ses positions successives, il en doit résulter une foule d'irrégularités et de bizarreries apparentes, lorsqu'on veut rapporter ces mouvemens au centre de la terre; mais cette complication doit disparaître, lorsqu'on les considère par rapport au soleil, qui en est le centre véritable. C'est ce que l'expérience confirme, comme on le verra bientôt.

7. Vénus n'est pas la seule planète qui offre les phénomènes que nous venons d'examiner. *Mercure* en présente aussi qui sont absolument semblables, mais ses excursions sont renfermées dans des limites plus étroites. Cet astre tourne donc autour du soleil comme Vénus, mais dans un plus petit orbe. L'observation de ses phases prouve qu'il est opaque, éclairé par le soleil et à-peu-près sphérique. Son plus grand diamètre apparent est de $34''{,}8$, son plus petit de $5''{,}4$. On appelle ces deux planètes *planètes infé-*

rieures, parce que le rayon de leur orbite n'atteint pas la terre.

8. Mercure et Vénus, vus de la terre, paraissent toujours accompagner le soleil. Leurs distances angulaires à cet astre n'excèdent jamais certaines limites à-peu-près constantes : il n'en est pas de même des autres planètes, celles-ci s'éloignent du soleil à toutes les distances angulaires possibles.

Le mouvement apparent de ces planètes est fort inégal ; il est tantôt direct, tantôt rétrograde. En les comparant aux étoiles qui se rencontrent sur leur route, ou, ce qui est bien plus exact, en observant jour par jour leur déclinaison et leur ascension droite, on voit qu'elles ne restent pas toujours sur le même parallèle à l'équateur : elles ne suivent pas non plus exactement le plan de l'écliptique. Cependant toutes les planètes anciennement connues s'écartent très-peu de ce dernier plan ; et c'est ce qui avait fait, dès la plus haute antiquité, distinguer par une dénomination particulière la zône du ciel où elles sont comprises. On l'appelait le *Zodiaque*, et on lui attribuait environ dix degrés décimaux de largeur de chaque côté de l'écliptique. Mais, depuis la découverte des quatre nouvelles planètes, cette dénomination est devenue inutile ; car Cérès, Junon, et sur-tout Pallas, s'écartent beaucoup au-delà des limites que l'on avait voulu assigner.

9. Toutes ces planètes, dans leurs révolutions, viennent *en conjonction et en opposition* avec le soleil, c'est-à-dire, que dans certains temps elles se trouvent du même côté que le soleil par rapport à la terre, tandis que dans d'autres la terre se trouve entre elles et le soleil. Cette dernière circonstance leur est particulière ; elle n'arrive jamais pour Mercure ni pour Vénus : l'analogie porte déjà à examiner si ces planètes ne tournent pas autour du soleil, comme

Vénus et Mercure, mais dans des orbites plus étendues. En suivant cette idée, on voit que tous les phénomènes s'y rapportent.

10. Prenons pour exemple Mars. Lorsqu'on l'observe au télescope, son disque paraît constamment éclairé et arrondi; il n'est jamais échancré comme celui de Vénus. Cependant il éprouve dans sa forme apparente des variations très-sensibles. Cette forme est tout-à-fait circulaire dans les conjonctions et dans les oppositions. En passant d'une de ces positions à l'autre, elle se rétrécit peu-à-peu, et prend la forme d'un ovale plus ou moins resserré. Ce passage se fait toujours d'une manière lente et progressive.

Ces phénomènes nous apprennent que Mars est un corps opaque, et à-peu-près sphérique, qui reçoit sa lumière du soleil. Ils sont très-bien représentés, en supposant cette planète en mouvement dans une orbite rentrante qui embrasse la terre et le soleil. Il y a même une liaison si nécessaire de cette conséquence avec les phénomènes, que ceux-ci ne peuvent pas être vrais, sans qu'elle le soit également. En effet, si Mars n'embrassait pas la terre, il ne viendrait jamais à l'opposition; et s'il n'embrassait pas le soleil, de sorte qu'en venant à la conjonction il passât entre la terre et cet astre, il devrait paraître échancré comme Vénus et la lune, au lieu qu'il reste toujours arrondi.

De plus, le diamètre apparent de Mars augmente en venant de la conjonction à l'opposition; il diminue, en allant de l'opposition à la conjonction. Ainsi, dans le premier cas, Mars s'approche de la terre; dans le second, il s'en éloigne. Les variations de son diamètre apparent sont très-considérables. Sa plus grande valeur est de 90″, sa plus petite de 18″; les distances correspondantes sont entr'elles comme 1 est à 90, ou dans le rapport de 1 à 5, c'est-à-dire, que Mars est cinq fois plus éloigné de la terre dans le second cas que dans le premier.

Ces grandes différences nous apprennent que la terre n'est pas au centre du mouvement de Mars. En nous laissant guider par l'analogie, il est beaucoup plus naturel de penser que cette planète se meut autour du soleil, ainsi que Mercure et Vénus ; alors cet astre emportera aussi l'orbe de Mars, sur l'écliptique, dans son mouvement annuel ; les plus grandes et les plus petites distances de Mars à la terre devront avoir lieu, lorsque le soleil se trouvera à l'apogée ; ce sera donc alors que l'on devra observer les plus grands ou les plus petits diamètres apparens de cette planète. C'est aussi ce que l'expérience confirme, et l'on doit en conclure que Mars tourne autour du soleil.

11. La marche des phénomènes que présentent les autres planètes dont l'orbite embrasse la terre, et que l'on nomme pour cette raison *supérieures*, est absolument la même ; elle nous conduira donc aux mêmes conclusions ; seulement les variations que la forme apparente de leur disque éprouve, sont beaucoup moins sensibles, et cette forme s'écarte moins du cercle ; ce qui prouve que leur distance au soleil est beaucoup plus considérable que celle de Mars ; car s'il existait une planète assez éloignée du soleil, pour que l'orbe solaire pût être regardé comme un point par rapport à cette distance, et que cependant la planète pût être aperçue de la terre, les apparences qu'elle nous offrirait seraient sensiblement les mêmes que si nous étions placés au centre du soleil, et si elle tournait autour de cet astre, en recevant de lui sa lumière. Son disque nous paraîtrait donc toujours sous la forme d'un cercle, les variations de ses phases étant trop peu considérables pour qu'on pût les apprécier.

12. Afin de rendre plus sensibles les variations qu'éprouvent les distances des planètes à la terre, j'ai réuni, dans le tableau suivant, leurs plus grands et leurs plus petits diamètres apparens, tels qu'ils sont donnés par l'observation. Il faut remarquer que les planètes *Cérès*, *Pallas*, *Vesta*

et *Junon* sont trop petites pour qu'on ait pu jusqu'à présent déterminer leurs diamètres avec quelque apparence de certitude.

Tableau des diamètres apparens des Planètes en mesures décimales.

	LE PLUS GRAND.	LE PLUS PETIT.
Mercure	$34''$,8	$15''$,4
Vénus	$184''$,7	$29''$,7
Mars	52,7	11,0
Jupiter	137,3	93,0
Saturne	62,1	50,3
Uranus	12,7	11,4

13. Nous sommes donc conduits par ces réflexions à considérer le soleil comme placé à-peu-près au centre de tous les orbes planétaires, et les entraînant avec lui sur l'écliptique dans son mouvement annuel.

Mais supposerons-nous maintenant que cet astre emporte réellement ces orbites, ou regarderons-nous ce mouvement comme une apparence produite par le mouvement réel de la terre, qui, nous transportant successivement dans les différens points de l'écliptique, nous montre le soleil et les orbites des planètes, dont il est le centre, comme tournant avec lui autour de nous?

Assurément, si nous nous laissons guider par l'analogie, toujours si évidente dans les ouvrages de la nature, nous serons portés puissamment à embrasser cette dernière opinion; car alors le soleil devenant le centre commun de notre système planétaire, la symétrie est rétablie complètement.

Mais comme toutes les preuves de cette analogie ne sont pas encore rassemblées, et qu'elles se multiplieront à mesure que nous étudierons le système du monde, contentons-nous d'avoir envisagé cet état de choses comme possible. Oublions la terre; et, nous plaçant, par la pensée, au centre du soleil, essayons d'y transporter nos observations.

CHAPITRE II.

Manière de déterminer la position des orbes planétaires.

14. Ce qui se présente d'abord de plus simple, c'est de regarder les orbes des planètes comme des courbes planes dont le plan passe par le centre du soleil. Cette supposition est indiquée par l'analogie qu'ont les mouvemens de ces astres autour du soleil, avec ceux de la lune autour de la terre. Voyons comment elle s'accorde avec les observations.

15. Si les planètes se meuvent dans des orbites planes, et si le plan de ces orbites passe par le centre du soleil, les points où chaque planète rencontre l'écliptique doivent être opposés sur une même ligne droite, menée par le centre du soleil, et mobile sur l'écliptique avec lui. Ces points déterminent donc la trace du plan de l'orbite sur l'écliptique, trace que l'on appelle, en astronomie, *la ligne des nœuds*.

Un observateur qui serait placé dans le soleil, pourrait aisément vérifier si cette condition est remplie. Il déterminerait par la série des observations les instans où la latitude de la planète est nulle, et il verrait si, à ces mêmes instans, ses longitudes héliocentriques sont égales ou diffèrent d'une demi-circonférence. Pour nous, qui sommes placés sur la terre, nous pouvons bien également déterminer par des observations géocentriques l'instant où la planète passe par ses nœuds; mais, n'étant pas au centre des mouvemens

planétaires, ces nœuds ne peuvent pas nous paraître opposés sur la sphère céleste ; et la droite qui les joint, étant emportée sur l'écliptique par le soleil, doit se présenter successivement à nous sous divers degrés d'obliquité, qui rendent cette opposition méconnaissable.

Cependant, parmi toutes les situations que peut prendre le plan de l'orbite par rapport à nous, il en est deux, à la vérité, fort rares, où la difficulté peut être éludée : ce sont celles où la planète se trouverait sans latitude, et en même tems en opposition ou en conjonction avec le soleil. Car alors nous la verrions, de la terre, sur la même droite que si nous étions au centre du soleil. Plusieurs observations de ce genre montreraient si le nœud de la planète répond toujours à la même longitude vue du soleil.

Cette méthode est très-applicable pour Mercure et pour Vénus. Comme les révolutions de ces deux planètes sont fort courtes, la première n'étant que de 88 jours, et la seconde de $224\frac{7}{10}$, il arrive qu'elles passent fort souvent par leurs nœuds ; car il est évident qu'elles doivent y passer deux fois dans chaque révolution. La multiplicité de ces phénomènes doit donc rendre la circonstance que nous cherchons plus fréquente ; elle se présente sur-tout, d'une manière favorable, dans les passages de ces astres sur le disque du soleil. Car alors nous les voyons sur la même ligne droite que cet astre ; et en même tems leur latitude, nécessairement fort petite, montre qu'ils sont alors très-près de leurs nœuds. L'observation de ces passages peut donc nous éclairer sur la constance de ces nœuds vus du soleil. Or, le tableau suivant ne laisse à cet égard aucune incertitude. J'ai laissé les résultats exprimés en mesures sexagésimales, tels qu'ils ont été observés.

Passages observés de Mercure sur le soleil dans son nœud descendant.

ANNÉES.	TEMS MOYEN à Paris, compté de midi.	LONG. GÉOC. de ☿ en conjonction.	LATITUDE GÉOC. de ☿.
1674	6 mai 15h. 0′.37″	1s. 16°.43′.19″	13′. 51″ Australe.
1707	5 12. 45. 0	1. 14. 43. 5	0. 37 Boréale.
1740	2 10. 47.36	1. 12. 43. 23	14. 52 B.
1753	5 18. 25.37	1. 15. 47. 28	2. 22 A.
1786	3 16. 27. 0	1. 13. 47. 44	12. 3 B.
1799	7 0. 5.48	1. 16. 54. 27	5. 44 A.
moyenne en 1763		1s. 15°. 3′. 14″	5′. 35″ B.

Toutes ces observations s'accordent pour montrer que Mercure a une très-petite latitude, lorsque sa longitude héliocentrique devient égale à 1s. 15° 3′ 14″, ou 45° 3′ 14″. Il est donc alors près d'un de ses nœuds que l'on appelle le *nœud descendant*, parce que, lorsque Mercure y passe, il descend vers le pôle austral de l'écliptique. Le calcul rigoureux confirme cet apperçu; car, en déterminant la longitude héliocentrique du nœud descendant de Mercure par son dernier passage en 1799, à l'aide de méthodes que nous ferons bientôt connaître, M. Delambre l'a trouvée de 1s. 15° 57′ 5″ pour cette époque. Il faut retrancher 27′ 33″ de cette longitude pour ramener l'origine des angles au même point du ciel qu'en 1763; car l'équinoxe a rétrogradé de cette quantité, dans l'intervalle, à raison de 50″, 1 sex. par année. Le résultat de M. Delambre, ainsi réduit, donne la longitude du nœud descendant, en 1763, égale à 1s 15° 29′ 32″, peu différente de la longitude

géocentrique donnée par la moyenne des passages. Au reste on conçoit que cette comparaison ne peut être qu'approchée, puisqu'il faut encore avoir égard à la latitude de Mercure. De plus ses nœuds ne sont pas rigoureusement fixes, comme on le verra plus haut. Toutes ces causes doivent influer sur la comparaison des résultats. Ainsi, en leur accordant quelque chose, comme nous devons le faire dans ce premier aperçu, on voit que la longitude du nœud descendant de Mercure est à-peu-près constante.

La même constance se fait remarquer dans les passages de Mercure par son autre nœud que l'on nomme *nœud ascendant*, parce que la planète s'élève alors vers le pôle boréal de l'écliptique. Voici quelques-unes de ces observations :

ANNÉES.	TEMS MOYEN à Paris, compté de midi.	LONGITUDE GÉOC. de ☿ en conjonction.	LATIT. GÉOC. de ☿.
1697	2 nov. 17h. 37′. 50″	7s. 11°. 35′ 2″	10′. 40″. A.
1710	6 11. 28. 30	7. 14. 11. 12.	2. 19. A.
1723	9 5. 15. 52	7. 16. 47. 26.	6. 0. B.
1736	10 22. 59. 40	7. 19. 23. 38.	14. 21. B.
1743	4 22. 27. 0	7. 12. 37. 50.	9. 3. A.
1756	6 16. 18. 0	7. 15. 14. 30.	0. 42. A.

La longitude héliocentrique du nœud ascendant, qui résulte de ces passages, surpasse à très-peu près celle du nœud descendant de six signes sexagésimaux, c'est-à-dire d'une demi-circonférence. Ces deux nœuds vus du soleil sont donc opposés sur l'écliptique, comme cela doit être si l'orbite est plane. De plus, ils sont à-peu-près constans.

Les passages de Vénus par son nœud descendant, qui ont été observés, présentent aussi le même accord. Par exemple, on a trouvé

ANNÉES.	LONGITUDE DE ♀ en conjonction.	LATITUDE GÉO de ♀.
En 1761.....	2s. 15°. 36′. 14″.	9′. 34″. A.
En 1769.....	2. 13. 27. 28.	10. 13. B.

L'accord de ces phénomènes, quoique fort remarquable, ne suffit pas encore pour étendre la conclusion à toutes les autres planètes, pour lesquelles les occasions d'observer une latitude très-petite, ou nulle à l'instant de la conjonction, doivent être bien plus rares encore à cause de la lenteur de leur révolution; il faut donc chercher quelque artifice qui puisse mettre en évidence la constance du nœud, sans qu'il soit besoin de l'observer dans une circonstance aussi particulière; or la géométrie fournit pour cet objet une méthode très-générale et très-simple.

A l'instant où la planète perce le plan de l'écliptique en P fig. 1, soit T la terre, S le soleil, et $P\ S\ N$ la ligne des nœuds de la planète qui doit passer par cet astre, dans l'hypothèse que nous voulons examiner. Si nous représentons par ♈ le point équinoxial d'où l'on compte les longitudes sur l'écliptique, l'angle ♈ $T\ S$ sera la longitude géocentrique du soleil que je désignerai par S, l'angle ♈ $T\ P$ sera la longitude géocentrique P de la planète, deux quantités que les observations font connaître; enfin l'angle ♈ $N\ S$ ou ♈ $S\ P$ sera la longitude héliocentrique du nœud N qui est l'inconnue qu'il s'agit de déterminer. Or, dans le triangle $S\ T\ P$ formé par le soleil, la planète et la terre, l'angle à la terre est

connu et égal à $P-S$; le côté $T\,S$ est aussi connu, c'est la distance du soleil à la terre à l'instant de l'observation. Nous la nommerons R. Ce qui est inconnu, c'est la distance $S\,P$ de la planète au soleil, que nous nommons r, et l'angle à la planète, qui peut être exprimé par $N-P$. Néanmoins, comme dans un triangle rectiligne les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés, on voit que le rapport $\frac{S\,P}{S\,T}$ ou $\frac{r}{R}$ sera égal au sinus de l'angle $P-S$ divisé par le sinus de l'angle $N-P$; ce qui donnera d'abord une relation entre les deux inconnues N et r du problème.

Supposons maintenant qu'après une ou plusieurs révolutions de la planète on observe encore l'instant de son passage au même nœud, en P_I, et recommençons la même construction. Les longitudes du soleil et de la planète seront différentes de ce qu'elles étaient dans la première observation ; représentons-les par S_I et P_I. Mais si la ligne des nœuds $P_I\,S_I\,N_I$ reste, à fort peu près, parallèle à elle-même, comme les passages de Vénus et de Mercure semblent l'indiquer, l'angle $\gamma\,N_I\,P_I$ sera encore le même que tout-à-l'heure, par conséquent égal à N ; le côté $S_I\,P_I$ sera aussi le même et égal à r, quelle que soit la nature de la courbe décrite par la planète dans son plan, pourvu seulement que cette courbe soit immobile ou n'ait qu'un déplacement insensible dans l'intervalle des observations, ce que la lenteur du mouvement de l'ellipse solaire rend déjà très-probable. Ce second passage donnera donc une nouvelle relation entre les inconnues N et r ; on aura ainsi deux conditions auxquelles ces inconnues devront satisfaire : cela suffit pour les déterminer. En répétant les mêmes observations sur plusieurs passages, on verra si les valeurs de N sont toujours les

mêmes ; si cela est, on en conclura que la longitude du nœud est constante, et n'éprouve de variation que celle qui résulte de la précession des équinoxes. Si l'on y découvre un mouvement très-lent, on déterminera la valeur de N par des passages observés à des intervalles aussi rapprochés qu'il sera possible ; et en répétant la même opération à des époques éloignées, la différence des résultats donnera le mouvement du nœud ; c'est ainsi que nous avons déterminé, dans le second livre, le mouvement du périgée du soleil.

Ces calculs feront connoître encore un autre élément très-important pour la théorie de la planète, c'est sa distance à la terre, que nous avons représentée par r, et dont le rapport avec le rayon R de l'orbe terrestre se trouve aussi déterminé par ces opérations.

On pourrait opérer de même sur les passages observés dans l'autre nœud ; l'on en déduirait sa longitude, qui devrait différer de N de deux angles droits ; mais la distance $S\,P$ de la planète au soleil pourrait bien n'être pas la même et égale à r. Cette comparaison donnera donc déjà quelque indication sur la nature de l'orbite.

Enfin, on pourrait combiner des observations faites au nœud descendant avec des passages observés dans le nœud ascendant ; mais si l'on n'avait, pour déterminer N, que deux passages ainsi opposés, on ne pourrait pas y parvenir sans hypothèse, parce que le rapport des distances r et r' resterait indéterminé. Dans le système solaire, où les orbites des planètes sont peu excentriques, on pourrait, par une première approximation, supposer que les deux distances de la planète au soleil, dans ses deux nœuds, sont égales entre elles : mais cela ne peut être vrai, en général, que pour les orbites circulaires.

J'ai exposé cette méthode avec quelque étendue, parce

qu'elle ne suppose aucune connoissance anticipée de la nature de l'orbite, et qu'elle procède directement à la détermination des premiers élémens dont on a besoin. On verra par la suite qu'elle suffit même à la détermination de la nature de l'orbite. Je joins ici, dans les notes, un exemple des calculs numériques qu'elle exige. J'en fais l'application à Mars; et deux passages de cette planète dans ses nœuds, observés par Lacaille, me donnent la longitude du nœud ascendant, telle, à quelques minutes près, que les astronomes l'ont adoptée.

16. Dans l'état actuel de l'astronomie, le mouvement des planètes peut être regardé comme très-exactement connu, et les observations n'ont pour objet que de le déterminer avec une exactitude encore plus grande. Alors, en adoptant le mouvement donné par les tables, qui peut être regardé comme exact dans l'intervalle de quelques jours, on peut réduire à l'écliptique toutes les observations faites aux environs du nœud, c'est-à-dire, trouver, d'après la position et l'époque observée, le lieu du nœud et l'instant où la planète a dû entrer dans le plan de l'écliptique. Chaque observation donnera ainsi une valeur de la longitude du nœud. Le principe de ces réductions est le même qui nous a déjà servi pour ramener au solstice et au périgée des observations du soleil faites près de ces points.

Si les observations et les tables étaient parfaitement exactes, toutes ces longitudes seraient égales entr'elles; mais à cause des petites imperfections qui restent encore, il y a en général une différence sur la longitude du nœud et sur l'époque à laquelle la planète doit y arriver. On prendra donc une moyenne entre toutes les longitudes, entre toutes les époques, et l'on aura ainsi les résultats véritables avec beaucoup d'exactitude.

Cette méthode est fondée sur ce que les erreurs des tables ne peuvent porter que sur les positions absolues des planètes observées, et non pas sur la marche de leurs mouvemens, qui, ayant été déterminée avec soin et corrigée à plusieurs reprises par des observations très-éloignées, ne peut pas, dans l'intervalle de quelques jours, s'écarter de la vérité d'une quantité sensible.

17. Le lieu du nœud étant connu, on s'en sert pour déterminer l'inclinaison. Pour cela, on attend que le soleil *soit dans le nœud* de la planète, c'est-à-dire, que sa longitude soit la même que celle du nœud; alors on calcule, d'après les observations, la latitude géocentrique de l'astre, et un simple calcul trigonométrique donne ensuite l'inclinaison du plan de l'orbite.

Il est difficile, et pour ainsi dire impossible, de saisir exactement l'instant où le soleil est dans le nœud de la planète; mais, en observant ces deux astres plusieurs jours de suite, avant et après l'époque du passage du soleil par le nœud, on peut, par l'interpolation des résultats, déterminer exactement l'instant où ce phénomène a dû arriver. Alors on détermine pour cet instant les positions respectives des deux astres, ce qui se fait encore par interpolation, d'après la loi des mouvemens observés. D'après ces positions on calcule l'inclinaison de l'orbite. Cette méthode suppose le nœud préalablement connu; mais s'il restait encore quelque petite erreur sur cet élément, elle n'aurait qu'une influence beaucoup plus faible sur la valeur de l'inclinaison, sur-tout si l'on choisit les époques où le phénomène arrive, lorsque la planète est près de la quadrature. D'ailleurs, je dois prévenir que toutes ces déterminations isolées des élémens de l'orbite ne sont que des approximations que l'on rectifie ensuite simultanément par la mé-

thode des équations de condition, ainsi que nous l'avons enseigné pour le soleil. (*)

Les diverses méthodes que nous venons d'expliquer supposent que l'astronome a pu observer à loisir tout le cours de l'astre dont il veut déterminer l'orbite. Cela est vrai pour les sept planètes anciennement connues ; mais pour les comètes et pour les planètes nouvellement décou-

(*) Pour démontrer ces résultats, soit, fig. 2, T le centre de la terre, S le soleil, TSN le rayon visuel mené de la terre à cet astre, quand il est dans le nœud de la planète P; si l'on mène PM perpendiculaire au plan ATM, qui représente ici le plan de l'écliptique, et que l'on tire PA perpendiculaire à la ligne TS; AM sera aussi perpendiculaire à la ligne TS, et l'angle PAM sera l'inclinaison de l'orbite ; nous la représenterons par I. Nommons toujours les coordonnées $AT = x$, $AM = y$, $MP = z$: on connaît l'angle ATM, c'est la différence de longitude entre la planète et le soleil : nous la représenterons par φ. On connaît aussi l'angle PTM; c'est la latitude géocentrique de la planète que nous supposons égale à λ. Si, de plus, on représente MT par ρ, on aura

$$x = \rho \cos \varphi ; \quad y = \rho \sin \varphi ; \quad z = \rho \operatorname{tang} \lambda.$$

Il est visible que le rapport de PM à AM, ou de z à x, exprime la tangente trigonométrique de l'angle PAM, qui est l'inclinaison de l'orbite. On aura donc, d'après les valeurs précédentes,

$$\operatorname{tang} I = \frac{\operatorname{tang} \lambda}{\sin \varphi}$$

Si l'on s'était trompé d'une petite quantité sur le lieu du nœud, et que le soleil n'y fût pas tout-à-fait arrivé, l'erreur seroit beaucoup moins sensible sur l'inclinaison de l'orbite, sur-tout si l'angle φ ou STM était peu différent de 100°. En effet, soit N' le vrai lieu du nœud, et supposons toujours en S le lieu du soleil : l'angle φ, ou STM, dont nous avons fait usage, n'est plus celui qu'il faut employer : il faut lui substituer l'angle $N'TM$

vertes, on ne saurait faire la même supposition. Il faut donc alors chercher des méthodes qui déterminent la posi-

---

par hypothèse, n'en diffère que d'une petite quantité. Nommons cette quantité ω ; alors, en recommençant le calcul des triangles $A^{I}TM$, $A^{I}PM$, on aura

$$\text{tang } I = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin(\varphi + \omega)}$$

ou

$$\text{tang } I = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin\varphi + \cos\varphi \sin\omega - 2\sin\varphi \sin^2 \frac{1}{2}\omega}$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\text{tang } I = \frac{\text{tang } \lambda}{\text{sin. } \varphi} \cdot \frac{1}{\left\{1 + \cot\varphi \sin\omega - 2\sin^2\frac{1}{2}\omega\right\}}$$

or, en développant le second facteur, par la division, il devient

$$1 - \left\{\cot\varphi \sin\omega - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\right\} + \left\{\cot\varphi \sin\omega - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\right\}^2 - \text{etc.}$$

ce qui donne

$$\text{tang } I = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin\varphi}\left\{1 - \left\{\cot\varphi \sin\omega - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\right\} + \left\{\cot\varphi \sin\omega - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\right\}^2 - \text{etc.}\right\}$$

D'après les procédés que nous avons donnés pour déterminer le lieu du nœud par observation, il ne peut y avoir sur cet élément qu'une erreur de quelques minutes. ω sera donc un très-petit angle, $\sin\omega$ une très-petite fraction, $\sin^2\frac{1}{2}\omega$ une fraction plus petite encore. Si, d'ailleurs, on a soin de saisir les circonstances où φ est peu différent de l'angle droit, $\cot\varphi$ sera aussi presque nul ; alors tous les termes qui tendent à altérer tang I, contenant les produits de ces petites fractions, ne seront presque pas sensibles. En les négligeant, on aura encore

$$\text{tang } I = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin\varphi}$$

c'est-à-dire, le même résultat que si on ne s'était pas trompé sur le lieu du nœud.

tion et la nature de l'orbite d'après un arc de peu d'étendue. C'est l'objet d'un problème très-difficile que l'on résout en appliquant à l'astre inconnu les mêmes lois qui régissent les autres corps planétaires, et qui reposent sur le principe de la gravitation universelle ; on trouve ces méthodes exposées dans la Mécanique Céleste avec toute leur généralité.

18. Lorsqu'on détermine, comme nous venons de le dire, les longitudes des nœuds des planètes à des époques éloignées les unes des autres, et qu'on ramène l'origine de ces longitudes au même point de l'écliptique, en ayant égard au déplacement des équinoxes, on reconnaît que les nœuds ne sont pas tout-à-fait fixes. Ils ont tous, sur l'écliptique, des mouvemens rétrogrades, c'est-à-dire, dirigés en sens contraire des mouvemens propres. Ces variations sont très-lentes, et de la nature de celles que nous avons nommées séculaires. Les inclinaisons des orbites éprouvent aussi, entr'elles et sur l'écliptique, quelques variations.

La rétrogradation des nœuds des planètes est analogue à celle des nœuds de la lune : c'est une conséquence nécessaire de l'attraction universelle, comme on le verra plus loin. Il en est de même des changemens d'inclinaison. L'analyse, en faisant connaître cette dépendance, a donné le moyen d'en calculer les effets.

19. On trouvera à la fin du chapitre suivant le tableau des inclinaisons de tous les orbes planétaires sur l'écliptique, avec la position de leurs nœuds. On y a joint les variations séculaires de ces élémens.

NOTE

Pour le développement des formules indiquées dans la page 15.

En conservant la notation que nous avons employée dans le texte, le triangle TPS de la figure 1ère nous donnera l'équation

$$R \sin (P - S) = r \sin (N - P)$$

Pour le second passage dans le même nœud, on aura de même

$$R^I \sin (P^I - S^I) = r \sin (N - P^I)$$

Je mets R^I, et non pas R, parce que le rayon vecteur du soleil peut n'avoir pas la même longueur dans les deux observations; mais il est facile de le calculer par les tables; au lieu que r répondant au même nœud, et par conséquent au même point de l'orbite de la planète, peut être supposé constant.

Ces deux équations suffisent pour déterminer N et r.

En les divisant membre à membre, elles donnent d'abord

$$\frac{R^I \sin (P^I - S^I)}{R \sin (P - S)} = \frac{\sin (N - P^I)}{\sin (N - P)}$$

ou bien

$$R^I \sin (P^I - S^I) \sin (N - P) = R \sin (P - S) \sin (N - P^I)$$

En développant les termes qui contiennent N, on en tire

$$\text{tang } N = \frac{R^I \sin P . \sin (P^I - S^I) - R \sin P^I . \sin (P - S)}{R^I \cos P . \sin (P^I - S^I) - R \cos P^I \sin (P - S)}$$

N étant connu, r le sera par l'une des deux équations fondamentales.

Si l'un des deux passages, le premier, par exemple, arrivait exactement dans l'opposition ou dans la conjonction de la planète, $P - S$ serait nul ou égal à deux angles droits; dans l'un et l'autre cas, on aura tang N = tang P, par conséquent $N = P$, c'est-à-dire que la longitude du nœud serait égale à la longitude géocentrique de la planète : ce qui doit être évidemment dans cette circonstance. Mais alors on ne pourrait plus se servir de la première équation pour déterminer r. En général, on voit

que la valeur de r aura peu d'influence sur celle de N, lorsque $N - P$ sera fort petit, c'est-à-dire quand l'observation sera faite près du nœud. De pareilles observations seront donc propres à déterminer le nœud, et non pas la distance de la planète au soleil. Les plus favorables à cette dernière détermination sont celles où $N - P$ diffère peu de l'angle droit.

Donnons aussi la formule pour le cas où l'on voudrait combiner deux passages par les nœuds opposés ; ce qui, comme nous l'avons remarqué, ne pourrait être admis qu'en supposant l'orbite circulaire, ou au moins en la supposant telle que les distances de la planète au soleil soient égales dans ses deux nœuds. Nommant donc ces nœuds N et N^I, on aura

pour le premier $\quad R \sin (P - S) = r \sin (N - P)$

pour le second $\quad R^I \sin (P^I - S^I) = r \sin (N^I - P^I)$

Mais puisque ces nœuds sont opposés, $N^I = N + 200°$. En éliminant N^I au moyen de cette relation, nos deux équations deviennent

$$R \sin (P - S) = r \sin (N - P) \qquad (1)$$
$$R^I \sin (P^I - S^I) = -r \sin (N - P^I)$$

et en opérant comme nous l'avons fait tout-à-l'heure, on en tire

$$\text{tang } N = \frac{R^I \sin P . \sin (P^I - S^I) + R \sin P^I \sin (P - S)}{R^I \cos P \sin (P^I - S^I) + R \cos P^I \sin (P - S)}$$

Comme les orbites planétaires ne sont pas très-différentes d'un cercle, cette formule pourra encore être employée sans occasionner une grande erreur. Appliquons-la aux observations suivantes faites par Lacaille sur les passages de Mars dans ses deux nœuds, et rapportées dans son bel ouvrage intitulé *Astronomiæ Fundamenta*. Je les transcris en mesures sexagésimales.

ANNÉES.	TEMS SOLAIRE à Paris, compté de midi.	LONGITUDE GÉOC. de ♂.	LATITUDE GÉOC. de ♂.	NOEUD
1747	4 mai 10h. 50′. 43″	7s. 6o. 15′. 20″	oo. o′. 25″,5 B.	descen
1753	3 nov. 9. 31. 46.	1. 29. 29. 38,5	o. o. 27, 5 A.	ascen

On voit que la latitude de Mars n'était pas tout-à-fait nulle. Si nous avions la suite des observations de Lacaille, nous pourrions aisément trouver par interpolation l'instant où ce phénomène a dû arriver. Mais, faute de ce secours, nous remarquerons que ces latitudes, extrêmement petites, doivent répondre à des points très-peu éloignés du nœud, et par conséquent auront peu d'influence sur le résultat. Maintenant si l'on calcule, par les tables astronomiques, les longitudes du soleil et les logarithmes de son rayon vecteur, qui correspondent à ces deux observations, on trouve

pour 1747	1s. 23°. 38′. 20″	log R = 10,0050864
pour 1753	7. 11. 39. 16.	log R' = 9,9961542

Je retranche de cette dernière 6′. 16″ pour ramener l'équinoxe au mois de mai 1747, à raison de 50″,1 par année. Je retranche aussi cette même quantité de la seconde longitude observée de la planète, et j'ai ainsi les élémens suivans :

P = 7s.. 6°. 15′. 20″	P' = 1s. 29°. 23′. 23″
S = 1. 23. 38. 20	S' = 7. 11. 33. 1

ce qui donne

$$P-S = 5s.\ 12°.\ 37'.\ 0'' \qquad P'-S' = 6s.\ 17°.\ 50'.\ 22''$$

En substituant ces nombres dans la formule, on trouve

$$N = 180° + 47°.\ 47'.\ 45'' \quad \text{ou bien} \quad N = 47°.\ 47'.\ 45''$$

Car une même tangente peut répondre à deux arcs N et $180° + N$. La première valeur est celle qu'il faut adopter dans le cas actuel, parce que c'est la seule qui, substituée dans les équations (1), donne r positive, comme nous l'avons supposé. La longitude du nœud où se trouvait la planète dans la première observation, était donc égale à cette valeur de N, c'est-à-dire à 7s. 17° 47′ 45″. La direction du mouvement de la planète prouvait que c'était son nœud descendant, car elle allait alors en s'éloignant du pôle boréal de l'écliptique ; par conséquent l'autre racine, opposée à la précédente, est la longitude du nœud ascendant, qui se trouve

ainsi de 7 s. 17°. 47′. 45″ ou 1s. 17°. 47′. 45″, à l'époque de ces observations. Lacaille trouvait 1s. 17°. 37′, 11″, c'est-à-dire 10′. 34″ de moins, en tenant compte, par le calcul, des petites latitudes de la planète dans ses deux passages; d'où il concluait sa distance au nœud. Mais nous aurions évité cette correction qui suppose déjà la connaissance approchée du mouvement de la planète, si nous avions la série des observations faites par Lacaille; car nous en aurions déduit la longitude géocentrique exacte de la planète à l'instant de son passage par le nœud. Au reste, la petite différence qui existe entre nos deux résultats n'est de nulle importance pour l'objet qui nous occupe, et l'on doit toujours conclure de cet exemple, que la position des nœuds des orbites peut se déterminer très-exactement par des observations géocentriques, sans le secours d'aucune supposition anticipée.

Si de la valeur de N 7s. 17°. 47′ 45″ on retranche celle de P, on aura $N - P = 110°. 32′. 25″$; et en substituant cette valeur dans la première des équations (1), elle fera connoître r, c'est-à-dire la distance de Mars au soleil à l'époque de son passage au nœud. Cette distance sera exprimée dans la même espèce d'unités que R et R', c'est-à-dire en parties du demi-grand axe de l'orbe solaire. En faisant le calcul, on trouve

$$r = 1{,}510986.$$

Ce résultat n'est pas en erreur de 0,02. Nous ne pouvons toutefois le considérer que comme une approximation, parce que nous avons supposé les deux valeurs de r égales dans les deux nœuds de Mars, et cette supposition n'est point exacte. Nous n'aurions pas eu cet inconvénient, si nous eussions pu employer deux passages de Mars par un même nœud. Mais cet exemple suffira du moins pour montrer l'emploi de la méthode.

CHAPITRE III.

De la Nature des Orbites Planétaires. Lois de Képler.

20. La position du plan de l'orbite étant déterminée, il reste à trouver la loi du mouvement de la planète, et la figure de la courbe qu'elle décrit.

Toutes ces choses seraient connues si l'on parvenait à assigner pour chaque instant la longueur du rayon vecteur mené de la planète au soleil, et l'angle formé par ce rayon avec une droite fixe menée dans le plan de l'orbite, et passant par le centre du soleil. C'est ainsi, par exemple, que dans la page 141 du second livre nous avons tracé, d'après les observations, la figure de l'orbe solaire.

Le premier élément à déterminer, est la durée d'une révolution complète et sidérale de la planète autour du soleil. Pour y parvenir, le moyen le plus simple, le plus direct, est d'observer l'intervalle de tems qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la planète par un même nœud. Comme le plan de l'écliptique se déplace peu-à-peu dans le ciel, suivant les lois que nous avons expliquées dans le second livre, il faudra tenir compte de ce déplacement dans l'intervalle des observations que l'on compare, c'est-à-dire qu'il faudra les réduire à une écliptique fixe; ce qui se fera par une simple interpolation, d'après la marche de la planète observée près de ses nœuds.

Mais comme on doit s'attendre à rencontrer, dans le mouvement des planètes, des perturbations analogues à celles que nous avons déjà trouvées dans les mouvemens du soleil et

de la lune, il faudra, pour en atténuer l'effet autant que possible, conclure leur mouvement moyen par des observations qui comprennent un grand nombre de révolutions, afin que les inégalités périodiques s'étant compensées plusieurs fois dans l'intervalle, ce qui en reste, dans le résultat définitif, devienne insensible, étant réparti sur un long intervalle de tems. C'est ainsi que nous avons opéré pour trouver, avec une grande approximation, la durée de l'année moyenne, indépendamment des inégalités périodiques du mouvement du soleil.

Le mouvement moyen étant connu, il faut maintenant déduire des observations le mouvement angulaire de la planète autour du soleil, et les variations de sa distance à cet astre. Les conjonctions et les oppositions sont très-favorables pour cet objet.

En effet, dans ces circonstances, le rayon vecteur mené de la terre à la planète, et celui qui lui est mené du centre du soleil, se projettent sur le plan de l'écliptique dans la même ligne droite TSM, fig. 3. Ainsi le point de l'écliptique auquel nous rapportons la planète, est le même que celui auquel on la rapporterait du centre du soleil, ou bien il lui est directement opposé. Dans ces deux cas, la longitude de la planète, vue du soleil ou *héliocentrique*, est donnée par l'observation de sa longitude vue de la terre ou *géocentrique;* car, dans les conjonctions, ces deux longitudes sont égales entr'elles; dans les oppositions elles diffèrent de deux angles droits; et comme la position de l'orbite sur le plan de l'écliptique est connue, ainsi que son nœud, par des opérations précédentes, un simple calcul trigonométrique détermine l'angle NSP, ou la distance de la planète au nœud, et le rapport de SP à TS, c'est-à-dire la distance de la planète au soleil exprimée en partie de la distance du soleil à la terre. Celle-ci est connue par ce qui précède en parties du grand axe de l'orbe solaire; la

longueur du rayon vecteur de la planète sera donc aussi connue en parties de ce même grand axe.

Les oppositions et les conjonctions des planètes arrivent successivement dans divers points du ciel : elles ne répondent pas non plus toujours aux mêmes points de leurs orbites. Ainsi, en faisant plusieurs observations semblables, on verra successivement différens angles et différens rayons vecteurs : on pourra donc mesurer ces rayons en parties du grand axe de l'orbe solaire, les placer autour du soleil dans leurs directions véritables, et tracer ainsi la figure de la courbe que la planète décrit.

Il n'est pas même nécessaire, pour obtenir ces résultats, que les planètes soient observées au tems de leurs oppositions ou de leurs conjonctions. Une longitude et une latitude géocentriques, observées à une époque quelconque, suffiront, à l'aide du calcul trigonométrique, pour trouver le rayon vecteur et la distance au nœud (*).

(*) Ce problême a la plus grande analogie avec celui de la rotation des taches du soleil, et la même marche va nous servir.

Soient XY les deux coordonnées du centre du soleil, rapportées à deux axes fixes et rectangulaires menés par le centre de la terre dans le plan de l'écliptique. Comme tous les mouvemens de la planète se rapportent au plan de son orbite, nous prendrons l'axe des X parallèles à la ligne des nœuds de cette orbite. Si, de plus, nous désignons par R la distance du soleil à la terre, à l'instant de l'observation ; par L, la longitude de cet astre comptée de l'équinoxe du printems, et, par N, la longitude du nœud comptée du même équinoxe, nous aurons évidemment

$$X = R \cos \{L - N\} \qquad Y = R \sin \{L - N\}.$$

Menons par le centre de la terre un troisième axe perpendiculaire au plan de l'écliptique. Ce sera l'axe des Z, et nous supposerons les Z positifs dirigés vers le pôle boréal de ce plan. Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires de la planète,

21. La courbe, tracée de cette manière pour toutes les planètes, est fort ressemblante à une ellipse dont le soleil occupe un des foyers. Ici l'analogie nous porte à essayer si le mouvement elliptique ne satisferait pas aux observations.

---

rapportées aux mêmes axes à un instant quelconque. Soient, de plus, au même instant, l sa longitude, et λ sa latitude géocentrique; enfin, appelons r sa distance à la terre, et ρ la projection de cette distance sur le plan de l'écliptique, on aura évidemment

$$x = \rho \cos\{l - N\} \qquad y = \rho \sin\{l - N\} \qquad z = \rho \tang \lambda.$$

Mais on a aussi

$$\rho = r \cos\lambda;$$

par conséquent

$$x = r\cos\lambda\cos\{l - N\} \qquad y = r\cos\lambda\sin\{l - N\} \qquad z = r\sin\lambda.$$

Maintenant appelons x', y', z' les coordonnées rectangulaires de la planète rapportées à trois axes parallèles aux précédens, et fixes au centre du soleil. Nous aurons en général

$$x' = x - X \qquad y' = y - Y \qquad z' = z.$$

Tous les problèmes que l'on peut se proposer relativement à la position de la planète autour du soleil, dépendent des coordonnées héliocentriques x', y', z'. Ce sont là, par conséquent, les véritables inconnues qu'il s'agit de déterminer. Pour cela mettons-y d'abord, au lieu de x, y, z, X, Y leurs valeurs, il viendra

$$x' = r\cos\lambda\cos\{l - N\} - R\cos\{L - N\}$$
$$y' = r\cos\lambda\sin\{l - N\} - R\sin\{L - N\}$$
$$z' = r\sin\lambda;$$

dans ces expressions il n'y a plus que r d'inconnue. Pour la déterminer nous avons une condition, c'est que les valeurs de x', y', z' doivent satisfaire à l'équation du plan de l'orbite de la planète. Or, l'inclinaison de cette orbite est I, et son nœud coïncide avec l'axe des x'; le plan où elle se trouve aura donc son équation de la forme

$$z' = y' \tang I,$$

L'épreuve en est facile. Trois points donnés de position sur un plan suffisent pour déterminer complètement une ellipse dont on connaît un des foyers. Ainsi, en calculant l'ellipse qui satisfait à trois observations de la planète, on

---

et puisque les coordonnées x', y', z' doivent y satisfaire, il faudra qu'on ait

$$r \sin \lambda = \left\{ r \cos \lambda \sin (l - N) - R \sin (L - N) \right\} \operatorname{tang} I,$$

d'où l'on tire

$$r = - \frac{R \sin (L - N) \operatorname{tang} I}{\sin \lambda - \cos \lambda \sin (l - N) \operatorname{tang} I},$$

en substituant cette valeur de r dans celles de x', y', z', elles seront également déterminées, et l'on aura ensuite

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ou bien

$$r'^2 = r^2 + R^2 - 2 R r \cos \lambda \cos \left\{ l - L \right\}$$

on connaîtra donc aussi la distance r' de la planète au soleil en fonction de R, ou de la distance du soleil à la terre. Si l'on veut connaître encore sa distance angulaire au nœud de l'orbite, connaissance nécessaire pour construire la courbe qu'elle décrit, il n'y a qu'à considérer que la ligne des nœuds de l'orbite est prise ici pour axe des x'; par conséquent, si l'on nomme ν l'angle formé par le rayon vecteur r' avec cet axe, on aura

$$\cos \nu = \frac{x'}{r'},$$

de sorte que la valeur de ν sera facile à calculer quand celles de x' et de r' seront connues.

Les coordonnées héliocentriques x', y', z', feront encore connaître, s'il en est besoin, la longitude et la latitude héliocentriques de la planète; car, en représentant, par l' et λ' cette longitude et cette latitude, la première étant toujours comptée de l'équinoxe comme à l'ordinaire, on aura évidemment

$$\operatorname{tang} \left\{ l' - N \right\} = \frac{y'}{x'} \qquad \operatorname{tang} \lambda' = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

verra si elle comprend toutes les autres : c'est ce qui arrive très-exactement. On trouvera l'exemple d'un calcul semblable pour la planète Jupiter, dans les applications numériques placées à la fin de ce chapitre.

22. On a reconnu de cette manière que les *orbes des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.*

Leur rayon vecteur décrit autour de ce point des aires proportionnelles aux tems.

Ces résultats sont tout-à-fait analogues à ceux que nous avons déjà trouvés dans la théorie du soleil. On les nomme *les lois de Képler*, parce qu'ils ont été découverts par ce grand astronome.

23. Les dimensions des ellipses planétaires, c'est-à-dire les grandeurs de leurs axes et leurs excentricités sont don-

---

Réciproquement, si l' et λ' étaient données, ainsi que la distance r' de la planète au soleil, on en tirerait les coordonnées géocentriques ; car on aurait d'abord

$$x' = r' \cos\lambda' \cos(l' - N) \; ; \; y' = r' \cos\lambda' \sin(l' - N) \; ; \; z' = r' \sin\lambda' ;$$

et ensuite on en tirerait

$$x = r' \cos\lambda' \cos(l' - N) + R \cos(L - N)$$
$$y = r' \cos\lambda' \sin(l' - N) + R \sin(L - N)$$
$$z = r' \sin\lambda'.$$

Après quoi on aurait la longitude et la latitude géocentriques l et λ par les formules

$$\text{tang}\,(l - N) = \frac{y}{x} \; ; \quad \text{tang}\,\lambda = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ces formules serviront également pour les comètes.

nées, comme on vient de le voir, en parties d'une échelle commune qui est la moyenne distance du soleil à la terre.

Ces excentricités éprouvent des variations très-lentes dont la théorie a déterminé l'étendue et les lois. Actuellement celles de Mercure, de Mars et de Jupiter, augmentent; celles des autres planètes diminuent.

Les *périhélies* des orbites ne sont pas fixes dans le ciel : ils se meuvent lentement sur les plans des orbites, de même que nous avons vu le périgée de l'orbe solaire se mouvoir sur le plan de l'écliptique. Pour toutes les planètes, excepté pour Vénus, ces mouvemens sont directs, c'est-à-dire dirigés dans le même sens que celui du soleil. Mais le périhélie de Vénus rétrograde. Les bonnes observations sont encore trop récentes pour déterminer avec précision ces petits déplacemens. La théorie de l'attraction les donne avec beaucoup plus d'exactitude.

On conçoit que pour connaître la quantité absolue de ces mouvemens et leur direction, il ne faut pas rapporter les positions des périhélies aux équinoxes qui sont mobiles, mais à un point de l'écliptique, fixe et déterminé sur ce plan. Nous avons donné dans le second livre toutes les formules nécessaires pour cet objet.

24. On voit par ce qui précède, que la connoissance des mouvemens elliptiques des planètes dépend, pour chacune d'elles, de sept élémens; deux servent à déterminer la position de l'orbite, ce sont la longitude du nœud sur l'écliptique, et l'inclinaison; les cinq autres sont relatifs au mouvement dans l'ellipse; ce sont, 1°. la durée de la révolution sidérale; 2°. le demi-grand axe de l'orbite, ou la moyenne distance de la planète au soleil; 3°. l'excentricité, d'où résulte la plus grande équation du centre; 4°. la longitude moyenne de la planète à une époque donnée; 5°. la longitude du périhélie à la même époque. Comme il y a jusqu'à

présent onze planètes connues, il y a en tout soixante-dix-sept élémens à déterminer pour avoir la connaissance complette de notre système planétaire dans l'état actuel de l'astronomie.

Quoique la détermination de ces élémens puisse se faire, et ait été réellement faite dans l'origine par les procédés que nous venons d'expliquer plus haut, on sent toutefois que ces procédés s'appliquant à chaque élément d'une manière isolée et successive, ne peuvent donner que des approximations. Nous sommes maintenant assez avancés en astronomie, nous avons assez réfléchi sur les causes qui produisent l'exactitude, pour comprendre qu'il faut considérer tous nos élémens d'une manière simultanée, en ayant égard à leur influence réciproque, aux perturbations qu'ils éprouvent; et qu'il faut déterminer leurs valeurs, non par une seule, mais par des milliers d'observations; c'est-à-dire, qu'il faut recourir à la méthode des équations de condition pour perfectionner notre ouvrage, et pour donner le caractère de l'exactitude à nos premières déterminations.

Comme l'esprit de cette méthode nous est déjà connu par d'autres exemples, et que son application aux planètes exige des calculs numériques assez longs, je les ai rejetés dans une note à la fin de ce chapitre: il nous suffira d'y renvoyer le lecteur. C'est de cette manière que les astronomes modernes ont fixé avec la dernière précision les élémens de toutes les anciennes planètes et leurs variations séculaires. Pour les nouvelles planètes télescopiques, Cérès, Pallas, Vesta et Junon, leur découverte récente, et le petit nombre d'observations qu'on en a faites, n'a pas encore permis de déterminer leurs inégalités séculaires: on en est encore, pour ces planètes, aux approximations qui précèdent et préparent la dernière exactitude. Tous ces résultats importans sur les

élémens planétaires sont rassemblés dans le tableau placé à la fin de ce chapitre.

26. L'examen de ce tableau nous montre que les planètes qui sont les plus éloignées du soleil se meuvent avec le plus de lenteur. En comparant par des essais multipliés leurs vitesses et leurs distances, Képler y découvrit ce beau rapport : *Les carrés des tems des révolutions sont proportionnels aux cubes des moyennes distances.* C'est la troisième loi de Képler (*).

Par exemple, la durée de la révolution sidérale de Jupiter est $4332^j,5963$; celle de Mercure est $87^j,9693$. Si l'on fait les carrés de ces nombres, et qu'on prenne leur rapport, on trouve 2425,7.

Les distances moyennes de ces deux planètes au soleil sont exprimées par 5,20279 et 0,38710, le demi-grand axe de l'orbe solaire étant pris pour une unité. En faisant les cubes de ces nombres, et prenant ensuite leur rapport, on trouve 2427,9, c'est-à-dire, à $\frac{1}{1100}$ près le même que précédemment.

Cette loi étant démontrée par toutes les planètes, d'après

(*) Soient a et a' les distances moyennes de deux planètes au soleil, T et T' les durées de leurs révolutions sidérales : les observations donnent

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3}$$

Nommons K^2 le rapport $\frac{T'^2}{a'^3}$ calculé pour une d'entre elles, on aura pour toutes les autres

$$T^2 = K^2 a^3$$

relation qui fera connaître la révolution sidérale, d'après la distance observée, et réciproquement. Dans le système solaire, la valeur de K est $365^j,256384$. C'est précisément la durée de l'année sidérale : on en verra la raison plus loin.

les observations, on doit la regarder comme plus exacte que les observations mêmes; ainsi, au lieu d'emprunter de l'observation les rapports des distances des planètes au soleil, rapports toujours difficiles à mesurer avec la dernière exactitude, il vaut mieux les conclure de cette loi, d'après la durée des révolutions sidérales; car on peut mesurer ces dernières avec la plus grande précision, d'après les retours de chaque planète à un même nœud de son orbite. Réciproquement, si l'on connaissait la distance de la planète au soleil, mais que la durée de la révolution sidérale fût inconnue, on pourrait la calculer d'après cette loi. Cela arrive pour les planètes nouvellement découvertes; car les observations permettent de déterminer leur grand axe et tous les autres élémens de leurs orbites bien avant qu'elles aient achevé une révolution sidérale.

27. Enfin, et ceci est extrêmement remarquable, la terre elle-même participe à cette loi générale à laquelle toutes les planètes sont assujetties. Si l'on admet son mouvement annuel, et qu'on regarde celui du soleil comme apparent, sa marche devient celle d'un corps planétaire circulant autour du soleil, conformément aux lois de Képler. La durée de sa révolution, calculée dans cette hypothèse d'après sa distance, se trouve précisément égale à une année sidérale (*).

Cette conformité offre une analogie frappante entre la

(*) D'après les lois de Képler, la distance moyenne d'une planète au soleil, et la durée des révolutions sidérales sont liées entre elles par la relation $T^2 = K^2 a^3$, dans laquelle $K = 365j,256384$. Si l'on regarde la terre comme une planète, la valeur de a sera l'unité, et l'on aura

$$T^2 = K^2, \text{ ou } T = K$$

c'est précisément la durée de l'année sidérale.

terre et les autres corps célestes, la nature ne pouvant pas nous indiquer d'une manière plus forte le mouvement de notre globe, qu'il était impossible de rendre perceptible à nos sens. Pour nous conformer à cette analogie, nous mettrons dans le tableau qui est à la fin de ce chapitre, la terre au rang des planètes, et nous lui attribuerons les valeurs que nous avons trouvées pour les élémens de l'orbe solaire. Cependant nous ne déciderons pas encore que son mouvement est réel. Nous attendrons, pour prononcer sur ce point, que nous ayons rassemblé toutes les indications que fournissent les phénomènes.

28. Les lois de Képler, auxquelles nous venons de parvenir, sont le fondement de toute l'astronomie théorique : elles conduisent immédiatement à la loi de la pesanteur universelle, qui n'en est en quelque sorte qu'une conséquence, comme nous le verrons plus loin.

29. Les mouvemens des planètes ne se font pas tout-à-fait dans des ellipses. Ils sont assujettis à un grand nombre de petites inégalités que l'observation et la théorie ont reconnues et déterminées avec beaucoup d'exactitude. On les ajoute aux tables des planètes, comme autant de corrections à faire au mouvement elliptique.

Les plus considérables sont celles qui affectent les mouvemens de Jupiter et de Saturne. En comparant les observations modernes aux anciennes, on remarque une diminution dans la durée de la révolution de Jupiter et un accroissement dans celle de Saturne. Les observations modernes, comparées entre elles, donnent un résultat contraire. Ces variations semblent indiquer dans le mouvement de ces planètes de grandes inégalités dont les périodes sont très-longues, et dont l'effet est contraire sur les deux astres, en sorte que le mouvement de l'un augmente quand celui de l'autre se ralentit. Ces phénomènes ont été complètement

développés par l'auteur de la Mécanique Céleste, qui en a fait connaître les lois, et qui, en les soumettant au calcul, a donné aux tables de Jupiter et de Saturne une exactitude inespérée. Nous reviendrons sur cet important objet quand nous traiterons de la cause générale des mouvemens célestes.

TABLEAU *des mouvemens sidéraux et séculaires des Planètes.*

Durées des révolutions sidérables.

Mercure	87, jours	969258
Vénus	224,	700824
La Terre	365,	256384
Mars	686,	979619
Jupiter	4332,	596308
Saturne	10758,	969840
Uranus	30688,	712687

Demi-grands axes des orbites, ou distances moyennes.

Mercure	0,387098
Vénus	0,723332
La Terre	1,000000
Mars	1,523694
Jupiter	5,202791
Saturne	9,538770
Uranus	19,183305

Rapport de l'excentricité au demi-grand axe, au commencement de 1801.

Mercure	0,205514
Vénus	0,006853
La Terre	0,016853
Mars	0,093134
Jupiter	0,048178
Saturne	0,056168
Uranus	0,046570

Variations séculaires de ce rapport. (Le signe — indique une diminution.)

Mercure	0,0000[illegible]3867
Vénus	— 0,000[illegible]62711
La Terre	— 0,00[illegible]041632
Mars	0 000[illegible]90176
Jupiter	0,000159350
Saturne	— 0,000312402
Uranus	— 0,000025072

Longitudes moyennes au commencement de 1801. (Ces longitudes sont comptées de l'équinoxe moyen du printems, à l'époque du 1er janvier 1801, à minuit, tems moyen à Paris.)

Mercure	182°,15647
Vénus	11,93672
La Terre	111,28179
Mars	71,24145
Jupiter	124,67781
Saturne	150,38010
Uranus	197,54244

Longitudes moyennes du périhélie, à la même époque.

Mercure	82°,6256
Vénus	142,9077
La Terre	110,5571
Mars	369,3407
Jupiter	12,3812
Saturne	99,0549
Uranus	185,9574

Mouvement sidéral et séculaire du périhélie. (Le signe — indique un mouvement rétrograde.)

Mercure	1801,10
Vénus	— 826,63

La Terre	3641,40
Mars	4884,05
Jupiter	2048,95
Saturne	5978,60
Uranus	738,69

Inclinaison de l'orbite à l'écliptique, au commencement de 1801.

Mercure	7°,7806
Vénus	3 ,7694
La Terre	0 ,0000
Mars	2 ,0567
Jupiter	1 ,4603
Saturne	2 ,7710
Uranus	0 ,8599

Variation séculaire de l'inclinaison à l'écliptique vraie.

Mercure	56″,12
Vénus	— 14 ,05
La Terre	0 ,00
Mars	— 0 ,47
Jupiter	— 69 ,78
Saturne	— 47 ,88
Uranus	9 ,67

Longitude du nœud ascendant sur l'écliptique, au commencement de 1801.

Mercure	51°,0651
Vénus	83 ,1972
La Terre	0 ,0000
Mars	53 ,3605
Jupiter	109 ,3624
Saturne	124 ,3602
Uranus	80 ,9488

Mouvement sidéral et séculaire du nœud sur l'écliptique vraie.

Mercure	— 2414″,41
Vénus	— 5770 ,99
La Terre	,00
Mars	— 7185 ,65
Jupiter	— 4869 ,04
Saturne	— 6995 ,25
Uranus	— 11104 ,81

Ce tableau a été pris dans l'exposition du Système du Monde, troisième édition. Je vais y joindre, d'après le même ouvrage, les élémens elliptiques des nouvelles planètes, Cérès, Pallas, Junon et Vesta. Il existe encore trop peu d'observations, pour qu'on ait pu déterminer leurs variations séculaires.

Durée des révolutions sidérales.

Cérès	1681ʲ,539
Pallas	1681 ,709
Vesta	1590 ,998
Junon	1335 ,205

Demi-grands axes des orbites.

Cérès	2,767406
Pallas	2,767592
Vesta	2,667163
Junon	2,373000

Rapport de l'excentricité au demi-grand axe.

Cérès	0,078349
Pallas	0,245384
Vesta	0,254944
Junon	0,093229

Longitude moyenne, le 1er janvier 1801, à minuit; tems moyen à Paris.

Cérès	294,1682
Pallas	280,6858
Vesta	322,7938
Junon	297,1299

Longitude du périhélie à la même époque.

Cérès	162°,9565
Pallas	134 ,7040
Vesta	59 ,2349
Junon	277 ,4630

Inclinaison de l'orbite à l'écliptique.

Cérès	10°,8068
Pallas	38 ,4654
Vesta	14 ,5086
Junon	7 ,9401

Longitude du nœud ascendant au commencement de 1801.

Cérès	89,9083
Pallas	191,7148
Vesta	190,1228
Junon	114,4630

Il est extrêmement remarquable que les distances de ces quatre petites planètes au soleil soient presque exactement égales entr'elles; d'où résulte le peu de différence de leurs révolutions sidérales que l'on a conclues des grands axes, d'après la troisième loi de Képler. Cette égalité est sur-tout frappante pour Cérès et Pallas. D'un autre côté, Cérès et Junon, quoiqu'un peu plus différentes pour le grand axe, s'accordent presque exactement pour l'excentricité et pour la position du nœud. D'après cela, quelques

astronomes ont imaginé que ces quatre petites planètes pouvaient avoir été autrefois réunies en une seule planète plus grosse, qui se serait brisée par l'effet de quelque explosion intérieure. Mais la théorie de l'attraction montre que cette hypothèse n'est point admissible, parce qu'une semblable explosion aurait nécessairement donné à ces débris des vitesses de projection inégales, en partant du même point; d'où seraient résultés des grands axes inégaux: ce qui est contraire à l'observation.

NOTE.

J'ai indiqué dans le texte la manière dont on détermine la position et l'excentricité des ellipses planétaires, au moyen de trois observations réduites au plan de l'orbite. Voici le détail de cette méthode appliquée à un exemple dont M. Bouvard a bien voulu me communiquer tout le calcul numérique.

Trois positions géocentriques d'une planète étant données, ainsi que l'inclinaison de l'orbite, la longitude du nœud et le moyen mouvement, trouver la longitude du périhélie et l'excentricité.

Avec les longitudes et les latitudes géocentriques observées, on calculera d'abord les trois angles formés par le rayon vecteur de la planète avec la ligne des nœuds de son orbite. Nous avons donné précédemment toutes les formules nécessaires pour cet objet.

Ces trois angles seraient les longitudes héliocentriques réduites à l'orbite, si l'on comptait les longitudes depuis la ligne des nœuds. Au lieu de cela, on les compte depuis la ligne menée du centre du soleil à l'équinoxe du printems, que l'on suppose à une distance infinie sur la sphère céleste. Par cet équinoxe et par le centre du soleil concevez un plan perpendiculaire à l'écliptique. L'intersection de ce plan avec le plan de l'orbite est la droite d'où l'on compte les longitudes dans l'orbite. Cette intersection fait avec la ligne des nœuds un angle bien facile à calculer; car c'est l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle dont un des côtés est la

longitude du nœud ou N, et dans lequel l'angle aigu adjacent au côté N est égal à l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, ou à I. Ainsi, en nommant V l'angle cherché, on aura

$$\text{tang } V = \frac{\text{tang } N}{\cos I}$$

On ajoutera cet angle constant V à chacune des distances de la planète à son nœud, et l'on aura ainsi les trois *longitudes héliocentriques réduites au plan de l'orbite* : nous les représenterons par v, v', v''.

Représentons de même par ϖ la longitude du périhélie réduite à l'orbite. Cette longitude est une des inconnues du problème ; et $v - \varpi$, $v' - \varpi'$, $v'' - \varpi$ seront les trois anomalies vraies de la planète. Or, en représentant par e l'excentricité, par n le moyen mouvement pour l'unité de temps, et par t le temps écoulé depuis le passage au périhélie, la théorie du mouvement elliptique donne l'équation suivante, où l'on s'est borné à la première puissance de l'excentricité

$$nt = v - \varpi - 2e \sin (v - \varpi).$$

Cette équation n'est autre chose que la formule du tome II, page 190, retournée par le moyen des séries, en se bornant à la première puissance de l'excentricité. On y a mis, au lieu de v, $v - \varpi$ pour indiquer que les longitudes v ne sont plus comptées à partir du périhélie, mais à partir d'une droite fixe, qui fait, avec le périhélie, l'angle ϖ. Enfin, pour plus de simplicité, on a supprimé le rayon R, ce qui suppose tacitement que e est exprimé en unités de même espèce que n, v et ϖ, c'est-à-dire en grades, si ces quantités sont exprimées en grades ; en secondes, si elles le sont en secondes.

Ceci bien entendu, il est clair que chacune de nos longitudes observées donnera une équation semblable. Ainsi nous aurons

$$nt = v - \varpi - 2e \sin (v - \varpi)$$
$$nt' = v' - \varpi - 2e \sin (v' - \varpi)$$
$$nt'' = v'' - \varpi - 2e \sin (v'' - \varpi)$$

t ne nous est point connu ; mais nous connaissons les différences $t' - t$, $t'' - t$: ce sont les intervalles de temps écoulés entre

la première observation et les deux autres. Nous n'avons donc réellement que trois inconnues, t, e, ϖ, et trois équations. C'est tout ce qu'il faut pour les déterminer.

Nous commencerons par retrancher la première de chacune des deux autres. Cette opération éliminera t. En effet nous aurons ainsi

$$n(t^{I}-t) = v^{I}-v-2e\left\{\sin(v^{I}-\varpi)-\sin(v-\varpi)\right\}$$
$$n(t^{II}-t) = v^{II}-v-2e\left\{\sin(v^{II}-\varpi)-\sin(v-\varpi)\right\}$$

Introduisons les quantités connues

$$n(t^{I}-t)=p \quad n(t^{II}-t)=p^{I} \; ; \quad v^{I}-v=q \quad v^{II}-v=q^{I}$$

Nos deux équations deviendront

$$p = q - 2e\left\{\sin(q+v-\varpi)-\sin(v-\varpi)\right\}$$
$$p^{I} = q^{I}-2e\left\{\sin(q^{I}+v-\varpi)-\sin(v-\varpi)\right\}$$

ou, ce qui revient au même,

$$p-q = -2e\left\{\sin q\cos(v-\varpi)+(\cos q-1)\sin(v-\varpi)\right\}$$
$$p^{I}-q^{I} = -2e\left\{\sin q^{I}\cos(v-\varpi)+(\cos q^{I}-1)\sin(v-\varpi)\right\}$$

Divisant ces deux équations membre à membre, e sera éliminé, et en mettant pour $\cos q-1$ et $\cos q^{I}-1$ leurs valeurs $-2\sin^{2}\frac{1}{2}q$, $-2\sin^{2}\frac{1}{2}q^{I}$, il viendra

$$\frac{p-q}{p^{I}-q^{I}} = \frac{\sin q - 2\sin^{2}\frac{1}{2}q\,\operatorname{tang}(v-\varpi)}{\sin q^{I}-2\sin^{2}\frac{1}{2}q^{I}\operatorname{tang}(v-\varpi)}$$

et par conséquent on en tire

$$\operatorname{tang}(v-\varpi) = \frac{(p^{I}-q^{I})\sin q-(p-q)\sin q^{I}}{2(p^{I}-q^{I})\sin^{2}\frac{1}{2}q-2(p-q)\sin^{2}\frac{1}{2}q^{I}}$$

Cette formule fera donc connaître l'angle $(v-\varpi)$; soit A sa valeur, on aura

$$v-\varpi = A$$

par conséquent

$$\varpi = v-A$$

et la longitude ϖ du périhélie, relative à l'orbite, sera ainsi connue.

puisque v est donné par l'observation. Ayant ϖ et $v-\varpi$, on aura tout de suite l'excentricité e par une des équations où t a été éliminé ; par exemple, par celle-ci :

$$2e = -\frac{p^I - q^I}{\sin(q^I + A) - \sin A}$$

qui peut se mettre sous cette forme

$$e = -\frac{p^I - q^I}{4 \sin \frac{1}{2} q^I \cdot \cos\left(\frac{1}{2} q^I + A\right)}$$

Connaissant e et $v-\varpi$, on aura l'époque du passage au périhélie par une des équations d'où nous sommes partis. Par celle-ci, par exemple :

$$nt = (v-\varpi) - 2e \sin(v-\varpi)$$

où tout est connu excepté le tems t.

Donnons un exemple de ces formules pour Jupiter : les oppositions de cette planète ont été observées par M. Bouvard, la 1ère le 19 janvier 1801, à $8^h,93^I$ de tems moyen décimal au méridien de Paris; la 2e le 22 mars 1803, à $5^h,54^I$; et la 3e le 23 mai 1805, à $1^h,80^I$.

Les longitudes conclues de ces trois oppositions et réduites à l'orbite sont 132°.7073, 201°.0927, et 268°.2693.

En retranchant la première des deux autres, nous aurons d'abord

$$q = 68°,3854 \qquad q^I = 135°,5620$$

Prenons maintenant les différences des temps qui correspondent à ces observations, nous aurons

$$t^I - t = 795^j,6608 \qquad t^{II} - t = 1584^j,2101$$

Le moyen mouvement de Jupiter par rapport aux équinoxes pour $365^j,25$, est $33°,73558$; le mouvement pour un jour est donc

$$\frac{33°,73558}{365,25}$$

C'est la valeur de n exprimée en grades, en prenant le jour

sidéral pour unité de tems. En multipliant cette quantité par les valeurs de $t' - t$, $t'' - t$, on aura p et p' ; on trouve ainsi

$$p = \frac{33°,73558 \cdot 795j,6608}{365j,25} = 73°,1223$$

$$p' = \frac{33°,73558 \cdot 1584j,2101}{365j,25} = 146°,3267$$

Le reste du calcul s'achevera, comme le montre le tableau suivant, qui a été dressé par M. Bouvard.

CALCUL DE L'ANGLE $v-\varpi$.

$v = 132°,7073$ $v' = 201,0927$ $v'' = 268,2693$	$689,3854 = q$ $135,5620 = q'$		$73g1223 = p$ $146,3267 = p'$
$p' = 146°.3267$ $q' = 135°,5620$	$p = 73°.1223$ $q = 68°.3854$	$\log(p'-q') = 1.0319737$ $\log 2 = 0.3010300$ $\log \sin^2 \frac{1}{2} q = 9.4179366$	$\log(p-q) = 0.6754942$ $\log 2 = 0.3010300$ $\log \sin^2 \frac{1}{2} q' = 9.8836554$
$(p'-q') = 10°.7647$	$(p-q) = 4.7369$		
$\log(p'-q') = 1.0319737$ $\sin q = 9.9141082$	$\log(p-q) = 0.6754942$ $\sin q' = 9.9283711$	log du produit. 0.5096403 1er terme dén... + 5.6356	log du produit 0.8601798 2e term. dén... — 7.2473
log du prod.... 0.9760819 1er terme + 9.4642 2e terme — 4.0167 — + 5.4475 numérateur	log du produit 0.6038653 2e ter. dénom. — 4.0167	1er terme dén. + 5.6356 2e terme dén. — 7.2473 — 1.6117 dénominateur	log num. = 0.7361972+ log déno. = 0.2072842— log tang$(v-\varpi)$ 0.5289130— $v-\varpi$ = 100 — 81°69 ou = 118.31.

CALCUL DE LA LONGITUDE DU PÉRIHÉLIE.

$v = 132°.71$
$v-\varpi = 118.31$

$\varpi = 14.40$ résult. du calcul.
12.38 résult. des tables.

2°.02 erreur sur la longitude du périhélie.

CALCUL DE L'EXCENTRICITÉ.

$+A = 118°31$
$+q' = 135°56$

$A+q' = 253.87$

$\log(p'-q') = 1.0319737$
$\log$ dénom. $= 0,2658080$

$\log 2e = 0.7661657$

$\log \sin(A+q') = 9.9470681\ldots$ $\sin(A-q') = 0.88526$
$\log \sin A = 9.9817840\ldots$ $\sin A = 0.95892$

dénomin. $-1,84418$

$2e = 5°8370$
$e = 2°9185$ résultat du calcul.
$3°0665$ résultat des tables.

$-0°1480$ erreur.

On voit que les résultats obtenus par ces calculs diffèrent de ceux que donnent les tables de M. Bouvard. Cela ne pouvait être autrement, puisque nous n'avons pas tenu compte des perturbations, et que nous nous sommes bornés à la première puissance de l'excentricité. Mais si l'on voulait obtenir plus d'exactitude, voici comment on pourrait l'obtenir : on reprendrait la formule qui donne le développement de nt en fonction de $v-\varpi$, en tenant compte des secondes et des troisièmes puissances de l'excentricité. Cette formule est

$$nt = v-\varpi - 2e\sin(v-\varpi) + \tfrac{1}{4}\frac{e^2}{R}\sin 2(v-\varpi) + \tfrac{1}{3}\frac{e^3}{R^2}\sin 3(v-\varpi)$$

R étant le rayon réduit en grades, et l'excentricité e étant exprimée de la même manière. On en peut voir la démonstration dans la Mécanique Céleste, tome 1er, page 156. Mais, pour faire servir cette formule à la détermination de e et de ϖ, il ne faut pas l'employer dans toute sa généralité, ce qui conduirait à des calculs inextricables : il faut considérer que, l'excentricité étant peu considérable, les termes $\frac{e^2}{R}\sin 2(v-\varpi)$; $\frac{e^3}{R^2}\sin 2(v-\varpi)$ sont de plus en plus petits, et qu'en conséquence une petite erreur sur les valeurs de e et de $v-\varpi$ qui serviraient à les calculer, n'influerait pas sensiblement sur le résultat définitif. Ainsi, en se servant pour cela des valeurs de e, $v-\varpi$, $v'-\varpi$, $v''-\varpi$, résultantes de notre première approximation, nous pourrons regarder ces termes comme connus, les ajouter aux longitudes v, v', v'', et recommencer le calcul de $v-\varpi$, en ne regardant comme inconnu que le terme qui contient la première puissance de l'excentricité. En définitif, cela reviendra à changer seulement les valeurs de p et p', et à faire

$$p = n(t'-t) - \frac{3}{4}\frac{e^2}{R}\left\{\sin 2(v'-\varpi) - \sin 2(v-\varpi)\right\}$$
$$+ \frac{e^3}{3R^2}\left\{\sin 3(v'-\varpi) - \sin 3(v-\varpi)\right\}$$

$$p' = n(t''-t) - \frac{3}{4}\frac{e^2}{R}\left\{\sin 2(v''-\varpi) - \sin 2(v-\varpi)\right\}$$
$$+ \frac{e^3}{3R^2}\left\{\sin 3(v''-\varpi) - \sin 3(v-\varpi)\right\}$$

q et q' restant les mêmes que précédemment, quand on aura calculé ces quantités avec les valeurs résultantes de notre première approximation, on aura, comme tout-à-l'heure, $v - \varpi$ par la formule

$$\text{tang}\,(v-\varpi) = \frac{(p'-q')\,\sin q - (p-q)\,\sin q'}{2\,(p'-q')\,\sin^2\frac{1}{2}q - 2\,(p-q)\,\sin^2\frac{1}{2}q'}$$

Quand on aura trouvé la valeur de $(v-\varpi)$, qui sera, je suppose, égale à A, on en tirera $\varpi = v - A$. Ensuite l'excentricité se trouvera de même par la formule

$$2e = -\frac{p'-q'}{\sin(q'+A) - \sin A}$$

en mettant pour q' et A les valeurs relatives à cette seconde approximation. Dans tous ces calculs, il ne faut pas oublier que la valeur du rayon réduit en grades est

$$R = 63^{o},661977$$

et la grandeur de ce nombre de degrés, comparativement à e, montre que la méthode d'approximation dont nous usons dans ce second calcul, est fort légitime. Avec ces données on trouvera

$$p = 73^{o},1223 - 0^{o},01384 + 0^{o},00253$$
$$p' = 146^{o},3267 - 0^{o},15313 + 0^{o},00017$$

et en recommençant le calcul, il viendra

	$\varpi = 13^{o}.3079.$	$e = 3,0878$
suivant les tables, on a	$\varpi = 12^{o}.3820.$	$e = 3,0665$
erreur.....	$-\ 0^{o},9259.$	erreur... $0,0213$

Ces erreurs sont presque insensibles.

Pour compléter cette recherche, il ne reste plus qu'à former des équations de condition, pour corriger les valeurs des élémens que nous venons de déterminer par approximation.

Pour cela : soit A la longitude vraie héliocentrique d'une

planète calculée, pour l'instant d'une observation, par les tables déjà existantes. Appelons L la longitude moyenne de cette planète à une époque donnée, n le moyen mouvement tropique, t le tems écoulé depuis cette époque qui sert d'origine, φ l'anomalie moyenne comptée du périhélie, $Q \sin \varphi$ le premier terme de l'équation du centre, S la somme des autres termes du mouvement elliptique, P et p les perturbations que cette planète éprouve par l'action des planètes m et m', ces perturbations étant exprimées en secondes de degré, aussi bien que V, n et Q. Si l'on nomme m et m' les masses des planètes troublantes, on aura évidemment l'équation suivante, qui donne la longitude vraie héliocentrique en fonction des élémens des tables, à une époque donnée :

$$V = L + nt + Q \cdot \sin \varphi + S + Pm + P'm' + \text{etc.}$$

C'est la formule de la page 190 du second livre, à laquelle on a ajouté les perturbations.

Dans cette formule on doit supposer les élémens des tables à-peu-près connus, et l'on se propose de déterminer les corrections qu'ils exigent. Appelons x l'accroissement qu'il faut donner à la longitude moyenne L, ou à l'*époque*. Nommons pareillement y l'accroissement qu'il faut donner au moyen mouvement, z celui du coefficient Q d'où dépend l'équation du centre, $\frac{Ru}{Q}$ celui de l'angle φ, R étant le rayon réduit en secondes; enfin μ et μ' ceux des masses troublantes, ensorte que les élémens véritables soient

$$L + x \; ; \; n + y \; ; \; Q + z \; ; \; \varphi + \frac{Ru}{Q} \; ; \; m + \mu \text{ et } m' + \mu'.$$

Ces valeurs étant supposées exactes, si on les substitue dans l'expression générale de V, elles devront donner la vraie valeur de la longitude héliocentrique, c'est-à-dire la valeur telle qu'elle résulte du calcul des observations supposées exactes; mais il est inutile d'effectuer ces corrections dans le terme S, à cause de sa petitesse. On aura donc alors, avec les élémens corrigés,

$$V' = L + x + (n + y)\, t + (Q + z) \sin \left(\varphi + \frac{Ru}{Q}\right)$$
$$+ S + P(m + \mu) + P'(m' + \mu') \ldots$$

Si l'on prend la différence de la longitude observée V' à la

longitude V, calculée avec les élémens imparfaits, différence que je nommerai E, et qu'on se borne à la première puissance de la petite correction u, on aura l'équation

$$x + ty + z \sin\phi + u\cos\phi + P\mu + P'\mu' + \text{etc.}, = E$$

qui sera une équation de condition entre l'erreur E et les corrections indéterminées des élémens.

Nous appliquerons cette formule à la planète Jupiter, en nous bornant, pour plus de simplicité, à une seule planète perturbatrice, et nous choisirons, à cet effet, les dix équations de condition suivantes, résultantes de dix *Oppositions* que M. Bouvard a calculées pour ses tables, et qu'il a bien voulu nous communiquer :

1750... x + 0,008. y + 0,3144. z + 0,9493. u − 1002″. μ =	−18″,5	−15″,95
1760... x + 0,106. y − 0,6942. z + 0,7197. u − 1372. μ =	+ 6,9	+12,75
1766... x + 0,161. y + 0,8453. z − 0,5344. u + 549. μ =	+ 6,9	+ 8,15
1772... x + 0,226. y − 0,6341. z + 0,7732. u − 51. μ =	− 1,2	−10,12
1778... x + 0,281. y + 0,8005. z − 0,5993. u + 445. μ =	+ 2,9	+ 5,67
1784... x + 0,347. y − 0,5203. z + 0,8214. u + 645. μ =	+ 11,6	− 3,65
1789... x + 0,390. y + 0,9892. z − 0,1464. u + 23. μ =	− 11,8	− 9,29
1794... x + 0,445. y − 0,9927. z − 0,1194. u + 312. μ =	− 12,4	−16,96
1801... x + 0,510. y + 0,5746. z − 0,2242. u + 251. μ =	− 14,7	−12,86
1807... x + 0,576. y − 0,8591. z + 0,5244. u − 1557. μ =	− 15,4	− 6,34

Le nombre de ces équations de condition étant arbitraire, il s'agit seulement de les combiner entr'elles de manière à les ramener à un nombre égal à celui des inconnues qu'elles renferment, afin de pouvoir procéder à l'élimination, selon la méthode expliquée dans le chapitre X du second livre. Or, on voit que les termes dépendans de x et de y sont constamment de même signe, de sorte qu'on ne peut favoriser l'une de ces corrections sans favoriser l'autre. C'est justement le cas particulier que nous avons annoncé dans la page 201 du chapitre cité : nous emploierons donc la méthode que nous avons indiquée alors. Nous regarderons l'ensemble de ces deux corrections comme un seul terme; ou, ce qui revient au même, nous feindrons d'abord de négliger y et de ne conserver que x d'inconnue; puis nous ferons les sommes de ces dix équa-

tions, en rendant successivement de même signe tous les coefficiens d'une même inconnue : nous aurons ainsi les trois équations suivantes, dans lesquelles chaque facteur qui multiplie respectivement son inconnue, est le plus grand possible :

$$\begin{aligned} 10x + 0{,}1736.z + 2{,}1643.u - 1757''\mu &= -45{,}7\ldots(1).\\ +7{,}6744.z - 3{,}27430.u + 2290.\mu &= -24{,}70\ldots(2).\\ +5{,}06020.z - 5{,}41170.u + 4917.0\mu &= -12{,}50\ldots(3).\\ +2x + 3{,}9196.z - 3{,}7689.u + 6207.\mu &= +10{,}70\ldots(4). \end{aligned}$$

En résolvant ces équations par la méthode ordinaire de l'élimination, on trouve

$$z = -2'',17 \quad , \quad u = 8'',86 \quad , \quad \mu = 0{,}01017.$$

Ces valeurs étant substituées dans les équations primitives, donneront les résultats qui correspondent à ces équations dans la marge figurée à côté des seconds membres. Nous regarderons ces résultats comme l'effet des termes en x et y, et nous déterminerons ces deux inconnues, de manière à les faire disparaître. On y parviendra facilement en faisant la somme des deux premiers termes des cinq premières équations, l'égalant à celle des nombres qui leur correspondent dans la marge, et répétant la même opération pour les cinq dernières ; car alors on obtient les deux équations

$$5x + 0{,}782.y = +0'',50$$

$$5x + 2{,}268.y = -49{,}10,$$

qui donnent $y = -33'',35$ et $x = 5{,}32$.

Ainsi, la valeur de x nous fait voir qu'il faut ajouter $5'',32$ à la longitude moyenne des tables, et celle de y indique qu'il faut diminuer le mouvement tropique séculaire de $33'',35$.

Comme ces valeurs ne sont conclues que de *dix oppositions*, les corrections des élémens elliptiques qui en résultent, peuvent ne pas avoir la dernière exactitude. Pour arriver à ce dernier terme, il faut employer un très-grand nombre d'observations ; mais ce qui précède suffit pour donner une idée de la méthode que l'on emploie dans le calcul des tables astronomiques.

Nota. Ces calculs sont d'après la nouvelle division, et les élémens de Jupiter sont tirés des tables de M. Bouvard. C'est lui qui a bien voulu me communiquer ces calculs, ainsi que je l'ai déjà témoigné.

Autre méthode pour déterminer la position du périhélie et l'excentricité de l'ellipse d'après les passages de la planète par ses nœuds.

Pour employer cette méthode, que j'ai annoncée dans la page 17, il faut d'abord faire abstraction du mouvement du périhélie sur l'orbite pendant une révolution et demie de la planète. Ce que cette supposition peut avoir d'inexact, se corrige dans une seconde approximation.

Deux passages observés de la planète par un même nœud font connaître sa révolution sidérale, comme nous l'avons dit dans la page 26, et l'on en conclut le demi-grand axe de son orbite par la troisième loi de Képler, que les carrés des temps sont comme les cubes des moyennes distances au soleil.

Pendant une révolution et demie de la planète, elle passe deux fois par chacun de ses nœuds. D'après les observations de ces passages, on peut déterminer la distance de la planète au soleil pour chacune de ces deux positions qui sont opposées sur son orbite. On peut reconnaître aussi le mouvement du nœud, en supposant qu'il soit sensible, et en tenir compte pour réduire les observations à une même époque. Nous avons donné dans le premier chapitre une méthode très-simple pour cet objet.

On connaît alors sur l'ellipse de la planète deux rayons vecteurs qui sont opposés en ligne droite. On connaît, de plus, le grand axe de l'ellipse d'après la durée de la révolution sidérale; ces données suffisent pour déterminer très-exactement la position du périhélie et l'excentricité.

En effet, soit a le demi-grand axe, ae l'excentricité, r le rayon vecteur de la planète, ou sa distance au soleil dans un instant quelconque, enfin v et ϖ la longitude de la planète et celle du périhélie, supposées l'une et l'autre réduites à l'orbite, l'équation générale de l'ellipse donnera pour un instant quelconque

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}.$$

Si nous appliquons cette équation à l'un des nœuds, nous connaîtrons r et a, et il ne restera d'inconnus que e et l'angle $v-\varpi$.

Dans le passage de la planète par l'autre nœud, e et ϖ restent les mêmes ; mais l'angle v augmente d'une demi-circonférence, parce que les deux nœuds sont opposés sur l'orbite : le cosinus de l'angle $v-\varpi$ ne fait donc que changer de signe. Ainsi, en nommant r' le rayon vecteur de la planète dans l'autre nœud, on aura

$$r' = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos(v-\varpi)}$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer e et $\cos(v-\varpi)$. En effet, on en tire d'abord

$$1+e\cos(v-\varpi) = \frac{a(1-e^2)}{r}$$

$$1-e\cos(v-\varpi) = \frac{a(1-e^2)}{r'}$$

En ajoutant ces équations, $e\cos(v-\varpi)$ disparaît, et il reste

$$2 = \frac{a\{1-e^2\}}{r} + \frac{a(1-e^2)}{r'}$$

ce qui donne

$$e^2 = \frac{r(a-r') + r'(a-r)}{a(r+r')}$$

Voilà l'excentricité déterminée. On aura ensuite $\cos(v-\varpi)$ par l'une ou l'autre des équations

$$\cos(v-\varpi) = \frac{a-r}{er} - \frac{ae}{r} \; ; \quad \cos v-\varpi = -\frac{(a-r')}{er'} + \frac{ae}{r'}$$

J'appliquerai ces formules à Jupiter. Je suppose que l'on ait trouvé par les observations

$$a = 5{,}2027911 \qquad r = 5{,}1788884 \qquad r' = 5{,}2029511$$

le demi-grand axe de l'orbe solaire étant pris pour unité. En substituant ces valeurs dans nos formules, on trouve

$e = 0{,}0481782$; $v-\varpi = 87°.17'0''$. ou en grades, $v-\varpi = 96°9812$.

Ce sont précisément les valeurs assignées à ces quantités dans

notre tableau de la page 57. $v - \varpi$ est l'angle formé par la distance périhélie avec le nœud ascendant de l'orbite, parce que r appartient au nœud ascendant. Pour avoir la longitude du périhélie sur l'écliptique, il faut encore calculer la projection de l'angle $v - \varpi$ sur ce plan, d'après l'inclinaison de l'orbite qui doit être donnée par d'autres observations, mais dont les valeurs de e et de ϖ sont, comme on voit, indépendantes. Soit donc I cette inclinaison, et V la projection de l'angle $v - \varpi$ sur l'écliptique, on aura

$$\text{tang } V = \text{tang}\,(v - \quad) \cdot \cos I$$

Quand V sera connu, on le retranchera de la longitude du nœud ascendant, que je suppose égale à N; et la différence $N - V$ sera la longitude du périhélie sur l'écliptique.

La méthode précédente suppose, à la vérité, que la position du périhélie est fixe dans l'orbite pendant une révolution et demie de la planète. Mais la lenteur des mouvemens de ces points est si grande dans notre système planétaire, que l'erreur résultante de leur déplacement sera bien peu sensible. Elle ne le serait même point du tout pour Mercure, Vénus et Mars. Mais elle le deviendrait davantage pour Jupiter et Saturne, qui ont des révolutions plus lentes et un mouvement du périhélie plus considérable. L'erreur sur la longitude du périhélie ainsi calculée sera de 0°,0737 pour Jupiter, et de 0°,3804 pour Saturne. On la corrigerait en déterminant de la même manière la position du périhélie à des époques éloignées. La différence de ces positions donnerait son mouvement séculaire; et, d'après ce mouvement, avec la valeur à-peu-près connue de l'excentricité, on calculerait les variations du rayon vecteur dans l'intervalle des observations. Le calcul établi sur les données ainsi corrigées aurait toute l'exactitude possible.

On pourrait encore déterminer la position du périhélie, l'excentricité et même le grand axe, sans connaître autre chose qu'un passage de la planète dans chaque nœud. Mais la méthode en serait trop compliquée pour trouver place ici. On la déduit, comme la précédente, des équations du mouvement elliptique; mais il faut faire usage de l'équation transcendante entre le rayon vecteur et le tems.

CHAPITRE IV.

Manière de prévoir les retours des Planètes à une même situation par rapport au Soleil.

30. QUAND on veut faire quelques observations sur le mouvement des planètes, on a souvent besoin de connaître le tems qu'elles emploieront à revenir à la même position, par rapport au soleil; c'est ce que l'on nomme la *révolution synodique*.

On peut aisément la déduire des résultats précédens : il suffit pour cela de s'appuyer sur le fait général, que toutes les planètes connues font leurs révolutions dans le même sens, et d'occident en orient, comme le soleil; conformité qui est un des phénomènes les plus remarquables du système du monde.

En effet, soit que la terre tourne autour du soleil, ou le soleil autour de la terre, si nous nous supposons transportés au centre de cet astre, nous nous croirons immobiles; la terre et toutes les planètes sembleront tourner autour de nous, dans le même sens, et la quantité dont elles s'éloigneront les unes des autres dans un tems donné, dépendra de la différence de leurs mouvemens.

Par conséquent, si, du mouvement diurne de la terre, on retranche le mouvement diurne d'une planète, la différence exprimera la quantité dont la terre et la planète, vues du soleil, s'écarteront l'une de l'autre après l'intervalle d'un jour; et, en supposant leur mouvement uniforme, on en déduira, par une simple proportion, le nombre de jours nécessaire pour qu'elles s'éloignent l'une de l'autre de 400°,

c'est-à-dire, pour qu'elles reviennent autour du soleil à la même position relative : c'est le tems de la révolution synodique de la planète.

Par exemple, le mouvement diurne de Mercure est de $4547o''$, 85 ; celui de la terre ou du soleil est de $10951''$, 6 ; la différence est $34519''$, 25; c'est la quantité dont Mercure et la terre, vus du soleil, s'éloignent l'un de l'autre dans l'intervalle d'un jour; ainsi, pour qu'ils s'écartent l'un de l'autre de 400°, il faudra un nombre de jours représenté par $\frac{400^{o}}{34519'',25}$ ou 115j,877373 : c'est le temps de la révolution synodique de mercure.

La supposition du mouvement de la terre, que nous venons d'employer, n'avait pour but que de simplifier les considérations, en les rendant uniformes. Il est visible qu'elle ne peut avoir aucune influence sur le résultat définitif déduit des observations, puisque ces observations ne peuvent pas nous apprendre si c'est réellement le soleil ou la terre qui tourne. A mesure que les faits s'accumulent, nous avons des occasions de plus en plus fréquentes, de remarquer la simplicité que l'hypothèse du mouvement de la terre introduit dans toutes les recherches astronomiques.

31. En comparant le moyen mouvement des planètes au moyen mouvement du soleil, on peut calculer les périodes des tems après lesquelles ces astres doivent se retrouver dans le même point de leur orbite, et dans les mêmes situations, par rapport à la terre. Ces périodes diffèrent de la révolution synodique qui ramène seulement la planète à la même distance angulaire du soleil. Il est utile de les connaître, parce qu'aux époques qu'elles indiquent, l'heure du lever et du coucher du soleil et de la planète, celles de leurs passages au méridien, et toutes les inégalités qui affectent leur marche, se retrouvent à très-peu près les

mêmes qu'auparavant; de sorte que tous les phénomènes qui dépendent des positions des deux astres, par rapport à la terre, recommencent dans le même ordre, ce qui donne un moyen facile de les prévoir.

Nous avons déjà reconnu les avantages de ces périodes dans les éclipses de lune et de soleil. Afin d'en obtenir de semblables pour les planètes, il suffit de trouver un nombre d'années sidérales après lequel le mouvement de la planète autour du soleil complète exactement, ou à fort peu près, un nombre exact de circonférences.

Pour cela, ce qui se présente de plus simple, est de former le rapport des mouvemens annuels de la planète et du soleil, et de réduire ce rapport à ces moindres termes.

Par exemple, le mouvement tropique de Mercure, dans une année julienne, est égal à $16608231'', 13$; celui du soleil, dans le même intervalle, est égal à $4000084'', 72$; et le rapport de ces mouvemens est, $\frac{16608231'', 13}{4000084'', 72}$. Si les deux termes de cette fraction avaient un commun diviseur, on profiterait de cette circonstance pour la réduire à une expression plus simple; si, par exemple, on pouvait la réduire à $\frac{54}{13}$, on en conclurait que le mouvement de Mercure est à celui du soleil dans le rapport 54 à 13; et pendant que Mercure décrirait 54 circonférences autour du soleil, cet astre en décrirait 13 autour de la terre; de sorte qu'après treize années solaires le soleil et Mercure ayant décrit tous deux un nombre exact de circonférences, se trouveraient simultanément aux mêmes positions; mais comme en général le rapport dont il s'agit n'est pas réductible, ou ne comporte que des réductions très-faibles, il faut chercher des nombres qui le divisent, sinon exactement, du moins à très-peu près, et les quotiens de ces divisions donneront

autant de périodes plus ou moins rapprochées; l'exactitude dépendra des quantités négligées dans le calcul.

Pour cela on opérera comme si on voulait trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres proposés; comme le calcul donnerait en général l'unité pour dernier diviseur, puisque les nombres sont premiers entr'eux, on s'arrêtera à la première division, à la seconde, ou à la troisième, et ainsi de suite, c'est-à-dire, que l'on négligera le premier, ou le second, ou le troisième reste; et ces diverses suppositions donnant des erreurs d'autant plus petites, conduiront à des périodes de plus en plus rapprochées.

Par exemple, pour Mercure, le rapport des deux nombres est $\frac{1660823115}{400008472}$, la recherche du commun diviseur conduira aux résultats compris dans le tableau suivant :

1660823115	400008472	60789225	35273122	25516103	9757019
4	6	1	1	2	

Si l'on s'arrêtait à la première division, on aurait pour quotient $\frac{4}{1}$, c'est-à-dire, que dans une année julienne il y a quatre révolutions de Mercure; mais ce rapport différerait très-sensiblement de la vérité, parce que le reste négligé 60789225 est très-considérable. Dans la seconde division l'on aurait pour diviseur ce même reste; on trouverait pour quotient 6, et en négligeant le reste suivant qui est 35273122, il en résulterait le rapport $\frac{25}{6}$ qui est déjà plus approché; en sorte qu'en prenant ainsi pour diviseur les restes successifs, on aura, au lieu du rapport exact, les fractions suivantes :

$$\frac{4}{1}\ \frac{25}{6}\ \frac{29}{7}\ \frac{54}{13}\ \frac{137}{33}\ \frac{191}{46}\ \frac{328}{79}\ \frac{519}{125}\ \frac{847}{204}\ \frac{2213}{533}$$

qui en sont autant de valeurs de plus en plus approchées.

Les numérateurs de ces fractions indiquent les nombres d'années juliennes après lesquelles il y a, à très-peu près, un nombre entier de révolutions de Mercure.

Mais comme ces résultats ne sont qu'approchés, il sera nécessaire de leur ajouter ou de leur ôter un petit nombre de jours pour avoir des périodes plus exactes.

Par exemple, si nous prenons la quatrième période, qui est de 13 années juliennes, après cet intervalle le mouvement du soleil est égal à 13 circonférences entières, plus 1101″,36; celui de Mercure est 215907104″,69; les cinq premiers chiffres qui représentent des grades, n'étant pas divisibles par 400, ne forment pas tout-à-fait un nombre exact de circonférences, ce qui marque que, pour plus d'exactitude, il faut encore attendre un certain nombre de jours au-delà du nombre d'années indiquées; ce nombre est ici 2j,75.

En effet, le mouvement diurne du soleil étant égal à 10951″,6, et celui de Mercure étant 45470″,85, la marche de ces astres en 2j,75, sera 30116″,9, et 125044″,84; ajoutant ces quantités aux mouvemens qui ont eu lieu pendant 13 années juliennes, on aura, pour le soleil, 3°,1218, outre un nombre entier de circonférences; et pour Mercure 216032149″,53 ou 54 circonférences plus 3°,214953; ces deux astres seront donc un peu plus avancés dans leurs orbites, qu'ils ne l'étaient à l'époque précédente; mais ce déplacement étant, à fort peu près, le même pour tous les deux, ils paraissent vus de la terre dans la même position; ils sembleront donc revenus à la même longitude et à la même distance angulaire; car il ne faut pas oublier qu'indépendamment du mouvement propre de Mercure, le seul mouvement du soleil produit dans cet astre un déplacement apparent. Enfin la position de Mercure dans son orbite, par rapport à son périhélie et à ses nœuds, sera aussi, à fort

peu près, la même que la première fois. Nous ne parlons ici que des positions moyennes, les seules pour lesquelles on puisse se proposer de calculer des périodes de ce genre (*).

(*) La petite correction qu'il faut faire aux périodes annuelles est facile à trouver d'une manière directe. En effet, dans l'exemple précédent, la différence du mouvement du soleil à un nombre exact de circonférences était de $1101''{,}36$; cette différence pour Mercure était de $92895''{,}31$. Si l'on nomme ν le nombre de jours cherché, la marche des deux astres dans l'intervalle sera respectivement $10951''{,}6 . \nu$, et $45470''{,}85 . \nu$; et leur éloignement d'un nombre exact de révolutions sera

$$\text{Pour le Soleil, } 1101''{,}36 + 10951''{,}6 . \nu$$
$$\text{Pour Mercure } - 92895''{,}31 + 45470''{,}85 . \nu$$

Or le mouvement apparent de Mercure se compose de son mouvement autour du soleil, moins le mouvement du soleil autour de la terre. Ainsi, pour que ces deux astres nous paraissent avoir repris leurs mêmes positions respectives, il suffit que la différence des deux quantités précédentes soit nulle; ce qui donne l'équation

$$0 = \{ 45470''{,}85 - 10951''{,}6 \} \nu - 92895''{,}31 - 1101''36$$

ou
$$34519''{,}25 . \nu = 93999''{,}40$$

d'où l'on tire
$$\nu = \frac{93996''{,}67}{34519''{,}25} = 2{,}7231$$

C'est-à-dire qu'après 13 années juliennes et 2j,7231, les positions respectives du soleil et de Mercure vues de la terre, redeviendront les mêmes qu'auparavant, et en même tems ces deux astres se retrouveront, à très-peu près, aux mêmes points de leurs orbites.

En opérant de même relativement aux autres périodes, on déterminerait facilement les petites corrections qu'il faut leur faire pour leur donner toute l'exactitude désirable. Au reste, si j'indique ces corrections, c'est plutôt pour compléter l'exactitude du raisonnement, que dans la vue d'en faire aucune application. L'effet rigoureux de ces périodes est toujours plus ou moins modifié par les inégalités périodiques et séculaires. On ne doit les considérer que comme des indications commodes.

32. On peut, à l'aide de ces périodes, prévoir tous les instans où Mercure et le Soleil paraîtront revenir aux mêmes positions synodiques et sidérales. On connaîtra donc ainsi, à peu près, toutes les époques des conjonctions moyennes qui sont des phénomènes importans à observer.

Si l'orbe de Mercure coïncidait avec le plan de l'écliptique, cet astre, dans chacune de ses conjonctions inférieures, paraîtrait sur le disque du soleil. Mais l'inclinaison de l'orbite s'oppose quelquefois au retour de ces phénomènes, et ils sont, par cela même, moins fréquens que les conjonctions.

On sent, en effet, que Mercure en conjonction ne peut se projeter sur le disque du soleil que lorsque sa latitude géocentrique est moindre que le demi-diamètre apparent de cet astre. Dans tout autre cas, il passe au-dessus et au-dessous de lui.

Or, plusieurs circonstances s'opposent à ce que ces conditions soient remplies, et font varier les époques des passages de Mercure sur le Soleil. Il faut mettre de ce nombre la grande excentricité de l'orbite de cet astre, qui rend son mouvement très-inégal, le mouvement des nœuds qui l'empêche de revenir à la même latitude, quand il revient à la même conjonction, et sur-tout le mouvement annuel de l'orbite qui, étant emportée sur l'écliptique avec le soleil, se présente à nous dans des éloignemens et sous des aspects divers, d'où résultent, dans la latitude géocentrique de Mercure, des variations considérables.

Au milieu de tant d'inégalités, le seul moyen qui reste pour prévoir exactement tous les passages, consiste à chercher toutes les époques où ils peuvent se reproduire d'après les périodes que nous avons trouvées, et à calculer ensuite, par les tables, toutes les conjonctions correspondantes à ces

époques, pour connaître celles dans lesquelles les passages auront lieu réellement.

On a formé de cette manière des tables, qui contiennent les passages observés ou à observer pendant plusieurs siècles. Nous en avons rapporté un extrait pour Mercure, pages 12 et 13, afin de montrer la constance des nœuds.

33. On peut reconnaître dans ces tables l'effet des diverses périodes que nous avons trouvées; on voit aussi que les passages de Mercure sur le soleil arrivent toujours en mai et en novembre. Mais ils sont beaucoup plus fréquens à cette seconde époque. La différence tient à la position de l'ellipse de Mercure sur le plan de l'écliptique. Cette ellipse est maintenant placée de manière qu'elle nous présente son périhélie pendant l'hiver, et son aphélie pendant l'été, ainsi qu'on le voit dans la *fig.* 4; et comme elle est fort excentrique, Mercure se trouve beaucoup plus près du soleil au mois de novembre qu'au mois de mai. Or, si l'on considère le cône lumineux formé par les rayons visuels menés d'un point quelconque de la terre au soleil, ce cône s'amincit près de la terre, et s'élargit près du soleil, dont le disque lui sert de base; Mercure doit donc le rencontrer plus facilement lorsqu'il est près du soleil, que lorsqu'il en est éloigné; et, par conséquent, les passages les plus fréquens de cet astre doivent arriver dans l'hiver.

34. Les considérations précédentes et les méthodes qu'elles nous fournissent, s'appliquent également à l'orbe de Vénus. Le mouvement de cette planète dans une année julienne de 365j,25 étant égal à 65o1825″,37, son rapport au mouvement annuel du soleil est $\frac{65o1825,37}{4000084,72}$, d'où l'on tire les périodes $\frac{13}{8}$ et $\frac{473}{291}$ qui se rapportent à 8 et à 291 années. Je ne parle point des périodes plus courtes, parce qu'elles se-

raient trop inexactes, ni des périodes plus longues, parce qu'elles s'étendent au-delà des plus anciennes observations.

En combinant ces deux périodes et leurs multiples par addition et soustraction, on obtiendra toutes celles que les astronomes ont imaginées (*).

Ces périodes donneront les époques des passages de Vénus sur le Soleil, passages beaucoup plus rares que ceux de Mercure, parce que Vénus est plus éloignée du soleil. En voici la table qui a été calculée par Lalande :

ANNÉES.	ÉPOQUES DES PASSAGES DE VÉNUS.
1631	6 décembre.
1639	4 déc.
1761	5 juin.
1769	3 juin.
1874	8 décembre.
1882	6 déc.
2004	7 juin.

35. Vénus est quelquefois si brillante qu'elle devient visible, en plein jour, à la vue simple. Ce phénomène remarquable a lieu dans les positions où cet astre nous renvoie le plus de lumière. Or, nous avons remarqué que les phases de Vénus augmentent d'étendue quand cette planète s'éloigne

(*) Telles sont, par exemple, celles de 235, de 243 et de 251 années, qui sont composées des précédentes; car 235 est égal à $291 - 7 \cdot 8$; de même $243 = 291 - 6 \cdot 8$; $251 = 291 - 5 \cdot 8$; en général, si on représente par m et n deux nombres entiers quelconques, la formule $291 \cdot m \pm 8 \cdot n$ représentera toutes les périodes que l'on peut employer pour la planète Vénus.

de la terre. Cette augmentation, proportionnelle au sinus de l'élongation de la planète, tend à accroître son éclat; mais l'accroissement de la distance tend à le diminuer, car l'intensité de la lumière décroît proportionnellement au carré de la distance. Il y a donc une position moyenne où ces causes se balancent de la manière la plus favorable, et c'est là que Vénus nous renvoie la plus grande clarté. L'intervalle des retours de Vénus à cette position est d'environ huit ans, parce que cette période accorde, à très-peu près, son mouvement et celui du soleil, comme nous l'avons trouvé tout-à-l'heure; mais, dans beaucoup d'autres positions, Vénus peut encore être vue en plein jour, et ce phénomène arrive assez souvent.

36. La méthode dont nous avons fait usage dans ce chapitre, servira également pour trouver les époques auxquelles plusieurs planètes peuvent revenir en même tems dans des positions déterminées; par exemple, à l'opposition ou à la conjonction. Il suffit pour cela d'accorder les moyens mouvemens de ces planètes entr'eux et avec le mouvement du soleil, par un nombre exact de révolutions.

CHAPITRE V.

De quelques particularités relatives à la constitution physique des Planètes.

37. Pour ne pas interrompre l'exposé des méthodes qui ont servi à déterminer les mouvemens des planètes, j'ai remis à ce moment les détails relatifs à leurs particularités physiques.

Nous avons déjà prouvé que tous ces corps sont à-peu-près sphériques. On a cherché avec beaucoup de soin à y découvrir des taches qui pussent faire juger s'ils ont un mouvement de rotation sur eux-mêmes, comme le soleil ; et, en effet, ce mouvement a été ainsi constaté pour toutes les planètes sur lesquelles on a pu en apercevoir ; ce sont, jusqu'à présent, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. La méthode que l'on emploie est la même que nous avons expliquée plus haut pour le soleil et pour la lune. Il est également prouvé que Mercure tourne sur lui-même ; mais on s'en est assuré par un autre procédé, comme nous le verrons plus bas.

La durée de la rotation de Vénus est un peu moindre d'un jour ; on l'évalue à 0j,973. L'axe de rotation reste constamment parallèle à lui-même, et l'équateur, qui lui est perpendiculaire, fait avec l'écliptique un angle considérable. On a reconnu des montagnes très-hautes sur la surface de Vénus.

La durée de la rotation de Mars est de 1j,027 ; l'axe de rotation est incliné sur l'écliptique de 66°,33.

Jupiter tourne sur lui-même en o^j,414 autour d'un axe presque perpendiculaire au plan de l'écliptique ; son mouvement est donc beaucoup plus rapide que les précédens. Il le paraîtra encore bien davantage, si l'on remarque que Jupiter est beaucoup plus gros que les autres planètes. Le contour de son équateur est environ onze fois plus grand que celui de la terre, comme on le verra plus bas. En attribuant à la rotation de la terre les apparences du *mouvement* diurne, la durée de cette rotation sera à celle de Jupiter comme 1^j est à o^j,414 ; et pendant qu'un point de l'équateur terrestre décrira 1° de sa circonférence, celui de Jupiter décrira $\frac{1^{\circ}.1,000}{0,\ 414}$, ou 2°,41. Or, ces degrés sont plus longs que les degrés terrestres, dans le rapport des circonférences, c'est-à-dire, dans le rapport de 2,41 à 1. Ainsi, dans le même intervalle de tems, chaque point de l'équateur de Jupiter fait vingt-six fois plus de chemin qu'un point de l'équateur de la terre.

38. S'il est vrai, comme nous l'avons remarqué dans le chapitre XVII du premier livre, que l'aplatissement de la terre soit un effet et un indice de son mouvement de rotation, Jupiter doit être pareillement aplati à ses pôles, et son aplatissement doit être beaucoup plus considérable : c'est ce que les observations confirment. Le plus petit diamètre de cette planète est au plus grand comme 13 est à 14. Le premier est dirigé dans le sens des pôles, le second dans le sens de l'équateur. On a vu que les diamètres correspondans de la terre sont entr'eux comme 309 à 310, en sorte que leur différence est beaucoup moindre. Nouvelle analogie qui s'accorde avec toutes les autres, pour indiquer de plus en plus la réalité de la rotation de la terre.

39. Enfin, on connaît aussi la rotation de Saturne. Sa durée est de o^j,428. Avant qu'on eût observé ce phénomène,

on pouvait le prévoir d'après l'aplatissement de Saturne ; aplatissement qui est tel, que l'axe des pôles est plus petit de $\frac{1}{11}$ que l'axe de l'équateur. Aussi l'auteur de la *Mécanique Céleste* avait-il annoncé d'avance la rotation de Saturne, fondée sur cette considération.

40. On n'a pas encore observé directement de cette manière la rotation des autres planètes. Mercure est trop près du soleil, pour qu'on ait pu y découvrir des taches ; il est tellement enveloppé par les rayons de cet astre, qu'il n'offre à la vue qu'un disque étincelant de lumière ; mais on a reconnu sa rotation par l'observation suivie des variations des *cornes* de ses phases ; et Schroeter a trouvé de cette manière, $\frac{1}{1000}38$, pour la durée de cette rotation. C'est aussi par ce moyen que le même astronome a déterminé la rotation de Vénus, qui n'était qu'indiquée par l'observation de ses taches.

Les nouvelles planètes, Cérès, Pallas, Vesta et Junon, sont trop petites et trop récemment connues, pour qu'on ait déjà pu y faire des observations aussi délicates. Enfin, la planète Uranus, située aux confins du système solaire, est trop éloignée de nous pour que l'on ait pu y observer ces mouvemens ; mais les rotations constatées de Mercure, de Vénus, de Mars, de Jupiter, de Saturne et du Soleil, celle même de la Terre, devenue presqu'aussi certaine, indiquent celles des autres planètes avec beaucoup de vraisemblance.

41. Une loi générale de ces mouvemens de rotation, c'est d'être tous dirigés d'occident en orient, comme les mouvemens propres ; et cet accord, qui tient sans doute aux premières causes qui ont déterminé les mouvemens planétaires, est un des phénomènes les plus remarquables du système du monde.

Un autre rapport singulier, c'est que les quatre premières planètes, Mercure, Vénus, la Terre et Mars, tournent sur

elles-mêmes, dans un intervalle de tems presque égal pour toutes, et peu différent d'un jour; tandis que, pour Jupiter et Saturne, la durée de la rotation, qui se trouve aussi presque égale, est peu différente de $\frac{1}{10}$ de jour. Sous ce rapport le système planétaire se trouve comme partagé en deux groupes; mais on ignore à quoi tient cette circonstance singulière.

42. Enfin, on est fondé à croire que la plupart des planètes sont environnées d'une atmosphère analogue à la nôtre, au moins pour son état aériforme. Cette atmosphère est indiquée dans Vénus, par la manière progressive dont s'y répand la lumière. Pour Jupiter, elle l'est par les variations irrégulières de quelques-unes de ses taches, qui semblent autant de nuages transportés par les vents.

43. On remarque aussi des variations très-grandes dans quelques-unes des taches de Mars; deux, sur-tout, qui forment une sorte de zône ou de ceinture autour de ses pôles, augmentent ou diminuent suivant qu'elles se trouvent exposées au soleil d'une manière plus ou moins oblique. On croit, par cette raison, que ce peuvent être des amas de glaces, analogues à nos glaces polaires.

44. Toutes les taches de Jupiter ne sont pas sujettes aux variations dont je viens de parler; la plupart affectent en général la forme de zônes ou de bandes obscures, parallèles entr'elles et à l'écliptique. Elles sont situées à peu de distance de l'équateur de la planète. On observe des bandes semblables près de l'équateur de Saturne.

CHAPITRE VI

Des Satellites des Planètes.

45. Lorsqu'on observe Jupiter au télescope, on le voit toujours accompagné de trois ou quatre points lumineux, semblables à des étoiles extrêmement petites. On pourrait même, en n'y regardant qu'une seule fois, les prendre pour de véritables étoiles que Jupiter aurait rencontrées sur sa route; mais en répétant les observations durant plusieurs jours consécutifs, on voit ces points lumineux changer de place autour de la planète. Ils se montrent à différentes distances de son disque, tantôt à sa droite, tantôt à sa gauche; et comme ils l'accompagnent toujours *comme des gardes*, on les a nommés *satellites*.

On voit quelquefois ces petits astres passer sur le disque de Jupiter, et y projeter une ombre qui décrit une corde de ce disque; ce qui forme de véritables éclipses de Jupiter, analogues à celles que la lune produit sur la terre. Il résulte de ce phénomène, que Jupiter et ses satellites sont des corps opaques, non lumineux par eux-mêmes, et éclairés par le soleil.

Ceci donne l'explication d'un autre phénomène très-singulier. Jupiter étant un corps opaque, doit projeter derrière lui, dans l'espace, un cône d'ombre opposé au soleil; et, lorsque les satellites entrent dans cette ombre, ils doivent paraître éclipsés; aussi les voit-on souvent disparaître quand ils sont encore à une grande distance de la planète et fort loin d'être cachés par son disque. Cette disparition a lieu à

l'occident, si le soleil est à l'orient de Jupiter ; à l'orient, si le soleil est à l'occident. Elle paraît se faire près du disque de la planète, lorsque le cône d'ombre se présente à nous obliquement et sous un petit angle, comme aux approches de l'opposition ; elle se fait plus loin de ce disque, quand nous le voyons transversalement et sous un plus grand angle, comme dans les quadratures. Les réapparitions des satellites offrent des phénomènes analogues, c'est-à-dire qu'elles ont lieu quelquefois à une grande distance du disque ; ce qui forme un sujet de surprise les premières fois que l'on a occasion de les observer. Les deux satellites qui s'écartent le plus de la planète, peuvent, dans certaines circonstances, sortir de l'ombre et reparaître du même côté du disque où ils avaient été éclipsés. Ces phénomènes ne permettent pas de douter que les satellites de Jupiter ne soient comme quatre petites lunes, qui se meuvent autour de cet astre dans des orbites rentrantes. On a nommé premier satellite celui qui s'écarte le moins de la planète. Le rang des trois autres se règle de même, d'après l'étendue de leurs élongations.

46. Jupiter n'est pas la seule planète qui présente ce phénomène. On observe sept satellites autour de Saturne, et six autour d'Uranus ; mais il faut d'excellens télescopes pour les apercevoir. La lune peut aussi être considérée comme le satellite de la terre ; nouvelle analogie entre notre globe et les autres corps qui composent le système du monde.

47. La première chose à reconnaître pour établir la théorie des satellites et des planètes, c'est la direction de leurs mouvemens.

En les observant avec soin, on remarque d'abord que les satellites ne s'éclipsent jamais que quand ils passent de l'occident à l'orient de la planète. Quand ils suivent cette direction, on ne les voit jamais sur son disque : au contraire,

lorsqu'ils paraissent sur ce disque, c'est en revenant de la *digression* orientale vers l'occident de la planète.

Il résulte de ce fait que les satellites tournent autour des planètes principales d'occident en orient, c'est-à-dire dans le même sens que les planètes autour du soleil : accord qui est une des lois les plus remarquables du système du monde.

De plus, lorsqu'un satellite passe de l'occident à l'orient de la planète, il n'est pas toujours éclipsé; il passe quelquefois au-dessus ou au-dessous de l'ombre : de même, lorsqu'il revient de l'orient vers l'occident, il ne traverse pas toujours le disque de sa planète; il se trouve quelquefois au-dessus, d'autres fois au-dessous. Ces phénomènes prouvent que les orbites des satellites sont inclinées sur l'orbite des planètes principales; car, s'ils se mouvaient dans le même plan, ils seraient éclipsés à chaque révolution.

48. Les éclipses des satellites font connaître les instans de leurs oppositions au soleil : l'intervalle de deux éclipses donne la *révolution synodique* du satellite; d'où l'on conclut son mouvement angulaire par rapport à l'axe de l'ombre qui joint les centres de la planète et du soleil; ensuite le mouvement de la planète autour du soleil étant connu, on déduit de ce résultat les durées des révolutions sidérales. Pour plus d'exactitude, on emploie des éclipses observées près des oppositions de la planète, lorsqu'elle se trouve presque sur la même ligne droite avec la terre et le soleil : sur-tout on a soin de comparer entr'elles des éclipses fort éloignées, afin de compenser, autant qu'il est possible, les inégalités périodiques qui peuvent exister dans les mouvemens des satellites et de la planète. On trouvera à la fin de ce chapitre la table de ces révolutions.

Quant à la forme des orbites, ce qui se présente d'abord de plus simple, c'est de les supposer circulaires. Cette hypothèse peut toujours être regardée comme une première ap-

proximation, puisque les orbites des satellites sont rentrantes; elle est d'ailleurs indiquée par l'analogie qu'ont les planètes avec les satellites; enfin, elle est confirmée par les phénomènes, puisque cette supposition satisfait exactement aux éclipses observées. Les orbites des satellites sont donc à-peu-près circulaires; et, pour connaître leurs distances au centre de la planète principale, il suffit de les mesurer au micromètre dans le tems de leurs plus grandes *élongations*. On en trouvera les valeurs à la fin de ce chapitre.

49. En comparant ces distances avec les durées des révolutions sidérales, on y découvre le beau rapport démontré par Képler pour les planètes. Dans chaque système de satellites, les carrés des tems des révolutions sont comme les cubes des moyennes distances. Cette loi a servi pour calculer les révolutions sidérales des satellites d'Uranus, d'après leurs élongations observées; car le second et le quatrième satellite de cette planète sont jusqu'à présent les seuls dont les révolutions sidérales aient pu être observées directement. Mais comme leur durée, comparée aux élongations de ces mêmes satellites, satisfait à la loi des carrés des tems, il est sans aucun doute que cette loi s'étend aussi aux autres satellites.

50. Les fréquentes éclipses des satellites de Jupiter ont donné aux astronomes le moyen de suivre leurs mouvemens avec une exactitude beaucoup plus grande qu'on n'aurait pu le faire d'après les seules observations de leurs distances à Jupiter; car, ces distances restant toujours extrêmement petites, leurs variations sont très-difficiles à apercevoir.

La durée plus ou moins grande des éclipses successives d'un même satellite, et la suite des positions dans lesquelles elles arrivent, font connaître l'inclinaison de son orbite et la position de ses nœuds sur le plan de l'orbite de

la planète. Ces résultats ne sont d'abord qu'approchés ; mais on les corrige peu-à-peu en les comparant à un grand nombre d'observations ; enfin, la suite de cette comparaison fait voir s'il est nécessaire de modifier les lois du mouvement circulaire, pour représenter ces phénomènes, et c'est ainsi qu'on reconnaît si l'orbite du satellite que l'on considère a une excentricité sensible.

On a trouvé de cette manière que l'orbe du troisième satellite de Jupiter a une petite excentricité ; le quatrième en a une beaucoup plus sensible : on n'en a pas reconnu dans les deux autres.

Il y aurait un autre moyen simple, exact et direct, de déterminer tous les élémens des orbites des satellites : ce serait de les considérer comme des taches qui se meuvent autour de la planète principale, et de leur appliquer les formules que nous avons trouvées pour la rotation des taches de la lune et du soleil. Le rayon de l'orbite de chaque satellite étant déjà connu d'après les étendues de ses écarts, on observerait à la machine parallactique, ou de toute autre manière, la différence de déclinaison et d'ascension droite entre ces petits astres et le centre de la planète, comme on fait pour les taches du soleil et de la lune. Deux observations de ce genre suffiraient, en supposant l'orbite circulaire, pour déterminer l'inclinaison de l'orbite du satellite et son nœud. Il ne faudrait que deux observations au lieu de trois qui sont nécessaires pour calculer la rotation des taches du soleil, parce qu'ici la distance du plan de l'orbite au centre de la planète est nulle, au lieu que pour les taches cette distance était une inconnue de plus qu'il fallait déterminer. Les arcs parcourus par le satellite sur son orbite, dans des tems donnés, montreraient ensuite si le mouvement est uniforme, ou s'il faut supposer à l'orbite une ellipticité sensible.

51. Les inclinaisons de ces orbites sur celles de Jupiter sont variables; leurs nœuds et leurs *perijoves* sont en mouvement : on entend par *perijove* leur plus petite distance à Jupiter. Ces astres secondaires forment donc autour de leur planète une sorte de monde ou de système à part, qui nous offre en petit la représentation des changemens qui s'opèrent ou doivent s'opérer par la suite des siècles dans le mouvement des planètes autour du soleil.

52. Indépendamment de ces variations, les satellites de Jupiter sont assujettis à des inégalités très-sensibles qui troublent leur mouvement elliptique et rendent leur théorie fort compliquée; mais la théorie de l'attraction, dirigée par une analyse très-profonde, a donné le secret de tous ces écarts.

Les trois premiers satellites plus rapprochés les uns des autres, sont sur-tout liés dans leurs mouvemens par des conditions particulières extrêmement remarquables.

Le moyen mouvement sidéral du premier, plus deux fois celui du troisième, pris ensemble, font une somme qui est et *sera toujours* égale à trois fois celui du second. Il est facile de vérifier ce résultat sur le tableau des révolutions sidérales des satellites, placé à la fin de ce chapitre (*).

Le même rapport a lieu entre leurs moyens mouvemens synodiques, qui sont, pour chacun d'eux, égaux à leur mouvement sidéral diminué de celui de Jupiter. Si l'on substitue ces mouvemens synodiques dans les rapports précédens, le mouvement de Jupiter disparaît, et la condition est remplie (**).

(*) *Mécanique Céleste*, tome I, page 342.

(**) En effet, nommons n', n'', n''' les moyens mouvemens sidéraux du premier, du second et du troisième satellite, dans une année julienne; désignons aussi par s le mouvement sidéral de

La loi précédente, relative aux moyens mouvemens, n'a lieu que sur les variations des longitudes moyennes à partir d'un instant donné; mais les longitudes moyennes absolues sont elles-mêmes assujetties à une autre loi non moins remarquable, qui consiste en ce que la longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est toujours égale à la demi-circonférence. Cette relation s'étend également aux longitudes moyennes synodiques ou sidérales. Il est démontré par la théorie que ce rapport subsistera toujours, et par conséquent les trois satellites ne pourront jamais être éclipsés à-la-fois; car alors leurs longitudes seraient égales, et la somme ci-dessus serait nulle. Ces beaux théorêmes sont dus à l'auteur de la *Mécanique Céleste*, et ils sont au nombre des plus brillantes découvertes que l'on ait faites dans la théorie du système du monde; mais il serait impossible d'expliquer ici la méthode dont il a fait usage pour y arriver.

53. Le grand éloignement des satellites de Saturne, et la difficulté d'observer leurs positions, n'a pas permis de reconnaître les ellipticités de leurs orbites, encore moins de déterminer les inégalités auxquelles ils sont peut-être as-

---

Jupiter dans cet intervalle : les mouvemens synodiques des trois satellites, c'est-à-dire leurs mouvemens par rapport à l'axe de l'ombre, seront

$$n^{I} - s\,;\ n^{II} - s\,;\ n^{III} - s,$$

et comme on a par hypothèse

$$n^{I} + 2\,n^{III} - 3\,n^{II} = o.$$

On aura donc aussi

$$n^{I} - s + 2\,(n^{III} - s) - 3\,(n^{II} - s) = o.$$

car s disparaît de lui-même de ce résultat.

sujettis. Il en est de même de ceux d'Uranus : cependant l'ellipticité de l'orbite du sixième satellite de Saturne est sensible aux observations.

Le diamètre apparent de ces astres est si petit, qu'on n'a pas pu jusqu'à présent mesurer exactement leur grosseur. On a essayé de l'apprécier par le tems qu'ils emploient à passer dans l'ombre de la planète ; mais ce que nous avons dit dans le troisième livre, au sujet des éclipses de lune, doit faire juger combien cette méthode est incertaine.

54. En observant avec beaucoup de soin les variations périodiques qu'éprouve l'intensité de la lumière des satellites de Jupiter, Herschell a remarqué qu'ils se surpassent tour-à-tour en clarté. Il est naturel d'en conclure que certaines parties de leur surface réfléchissent plus de lumière que les autres, et alors les époques du maximum ou du minimum de leur lumière doivent arriver quand ces mêmes parties de la surface des satellites sont tournées vers nous. En comparant ces retours avec les positions des satellites par rapport à Jupiter, Herschell a trouvé qu'ils présentent toujours la même face à cette planète, d'où il résulte qu'ils tournent sur eux-mêmes, dans un tems égal à leur révolution autour de Jupiter. Maraldi avait déjà trouvé le même résultat pour le quatrième satellite, d'après les retours d'une même tache observée sur son disque. Cette loi subsiste également pour le septième satellite de Saturne. Quand il est à l'orient de Saturne, sa lumière s'affaiblit à un tel point, qu'il devient très-difficile de l'apercevoir; ce qui ne peut provenir que des taches qui couvrent l'hémisphère qu'il nous présente, quand il se trouve dans cette position. Mais pour que cet hémisphère soit toujours le même dans ce point de l'orbite, il faut que le mouvement de rotation du satellite soit exactement égal à son moyen mouvement de révolution autour de Saturne. On a vu précédemment que la lune jouit

de la même propriété à l'égard de la terre ; ainsi, il paraît par ce rapprochement que l'égalité des mouvemens de rotation et de révolution des satellites est une loi générale de la nature; et il s'ensuit qu'ils présentent toujours la même face à leur planète. Des observations précises et multipliées, faites récemment par Schroëter, mettent ce résultat hors de doute.

55. L'observation des éclipses des satellites de Jupiter a fait découvrir un phénomène extrêmement remarquable : c'est la transmission successive de la lumière.

En comparant les retours de ces éclipses, on voit que lorsque Jupiter est en opposition avec le soleil, elles arrivent plutôt qu'elles ne devraient arriver, d'après la durée des révolutions sidérales des satellites. Au contraire, vers les conjonctions, lorsque Jupiter est au-delà du soleil, par rapport à la terre, elles arrivent plus tard. Ces variations sont exactement les mêmes pour tous les satellites. On ne peut attribuer ces variations à des inégalités qui auraient lieu dans leur mouvement, car, par l'effet du mouvement de Jupiter, les oppositions et les conjonctions répondent successivement à divers points du ciel : il en est de même des éclipses des satellites sur leurs orbites. Ce qui se présente de plus simple, c'est d'en conclure que la lumière du soleil, réfléchie par ces petits corps, ne se transmet pas subitement jusqu'à la terre, et qu'elle emploie un tems sensible à traverser l'orbe terrestre. En effet, si l'orbe de Jupiter est concentrique au soleil, comme les phénomènes de son mouvement ne permettent pas d'en douter, il est aisé de sentir que cette planète est beaucoup plus près de nous dans ses oppositions que dans ses conjonctions. En supposant, pour plus de simplicité, l'orbite de Jupiter circulaire, on voit, *fig.* 5, que la différence est double du rayon de l'orbe solaire, et égale à son diamètre; ce qui suffit pour rendre raison des retards observés.

Les éclipses qui arrivent près des conjonctions retardent d'environ 1141″,2 (16′26″ sex.) sur celles qui ont lieu dans les oppositions; il s'ensuit que la lumière emploie tout ce tems pour traverser l'orbe solaire, et elle emploie seulement la moitié de cet intervalle, ou 570″,6 (8′13″ sex.) pour venir du soleil jusqu'à nous. Les observations s'accordent si bien avec cette hypothèse, elle y satisfait si pleinement, si exactement, qu'il est impossible de la révoquer en doute.

56. Les observations des satellites de Jupiter sont extrêmement utiles pour déterminer les longitudes. Le mouvement très-rapide de ces astres donne lieu à des éclipses fréquentes, dont on calcule d'avance les époques pour les inscrire dans les *Ephémérides*. Les tables des satellites de Jupiter, construites par M. Delambre sur la Théorie de M. Laplace, et d'après un nombre d'observations immense, ne laissent rien à désirer pour cet objet. En comparant ces époques, calculées pour le méridien de Paris, avec les résultats de l'observation immédiate, faite dans un autre lieu à une heure déterminée, on en peut conclure la différence des longitudes d'après celle des tems. La méthode est la même que pour les éclipses de lune; malheureusement on n'en peut pas faire usage à la mer. Les lunettes nécessaires pour apercevoir ces petits astres sont trop longues pour qu'on puisse s'en servir à bord, à cause de l'instabilité du vaisseau; mais ces observations peuvent être fort utiles au navigateur dans ses relâches.

57. Conformément à la marche que nous avons suivie dans la théorie des planètes, j'ai réuni, dans le tableau suivant, les distances moyennes des satellites à leurs planètes respectives, et leurs révolutions sidérales. Ce tableau est tiré de l'exposition du Système du Monde.

	DISTANCES MOYENNES (*)	RÉVOLUTIONS SIDÉRALES.
1er satellite de Jupiter....	5,81296	1j,769139 8
2e.	9,24868	3 ,551 1810
3e.	14,75240	7 ,1545528
4e.	25,94686	16 ,6887697
1er satellite de Saturne...	3,080	0 ,94271
2e.	3,952	1 ,37024
3e.	4,893	1 ,88780
4e.	6,268	2 ,73948
5e.	8,754	4 ,51749
6e.	20,295	15 ,94530
7e.	59,154	79 ,32960
1er satellite d'Uranus....	13,120	5 ,8926
2e.	17,022	8 ,7068
3e.	19,845	10 ,9611
4e.	22,752	13 ,4559
5e.	45,507	38 ,0750
6e.	91,008	107 ,6944

(*) On prend pour unité le rayon de la planète.

CHAPITRE VII.

De l'Anneau de Saturne.

58. Lorsqu'on observe Saturne au télescope, on le voit ordinairement environné d'une bande lumineuse qui le ceint par le milieu, comme une écharpe, et qui s'étend au-dehors pour lui former comme deux anses (*voyez fig.* 6). Peu-à-peu on voit ces anses se rétrécir, devenir un filet lumineux, et enfin disparaître. Alors Saturne paraît tout-à-fait arrondi. Mais après quelque tems les anses reparaissent, elles s'élargissent de nouveau, et l'on peut s'apercevoir qu'elles ne sont pas adhérentes au corps de la planète, car il y a entre elles un espace vide à travers lequel on voit le ciel, et les petites étoiles que le hasard y fait rencontrer.

Ces apparences se reproduisent constamment, suivant une marche régulière : on doit donc en conclure que la cause qui les produit est aussi constante, et alors il faut nécessairement les attribuer à l'existence de quelque corps solide qui environne Saturne, et qui disparaît ou reparaît successivement.

Mais comme il serait peu naturel d'imaginer que ce corps acquiert et perd successivement la faculté de briller, il faut croire que ce corps, non lumineux par lui-même, nous réfléchit la lumière du soleil, et que les variations qu'il nous présente résultent de sa position et de sa forme. Alors on peut chercher quelle doit être cette forme pour satisfaire aux phénomènes observés.

59. On les représente tous très-exactement, en supposant l'équateur de Saturne environné d'un anneau circulaire,

opaque, très-mince, et qui ne lui est adhérent nulle part. Le globe de Saturne étant en mouvement sur le plan de son orbite, entraîne avec lui cet anneau, qui, se présentant ainsi à la terre dans des positions diverses, et sous diverses inclinaisons, doit produire toutes les apparences que l'on y observe. (*Voyez fig.* 6 *bis*, *pl.* 2.)

Ainsi, il nous paraîtra lumineux quand il tournera vers nous celle de ces deux faces qui se trouve éclairée par le soleil, et nous cesserons de l'apercevoir quand il nous présentera la face opposée. Nous devons encore le perdre de vue dès que son plan prolongé passe par le centre de la terre, puisqu'il ne peut plus alors nous réfléchir aucune lumière. Il doit disparaître encore lorsque son plan passe par le soleil, parce qu'alors sa tranche est seule éclairée; et comme elle est fort mince, elle doit réfléchir trop peu de lumière pour être aperçue. C'est en effet ce qui arrive, quand on observe Saturne avec les lunettes astronomiques ordinaires; mais, en employant des télescopes extrêmement forts, on parvient encore à distinguer la tranche de l'anneau même: elle paraît alors comme une ligne lumineuse sur le disque arrondi de la planète. Cette ligne est si mince, que son épaisseur soutient à peine une seconde de degré sexagésimal; mais une seconde, à cette distance, répond à une épaisseur de quinze cents lieues.

Ces phénomènes confirment très-bien l'hypothèse que nous avons faite de l'existence d'une surface annulaire qui environne Saturne sans lui être adhérente. On peut même prouver que cet anneau, aussi bien que la planète à laquelle il appartient, sont des corps opaques éclairés par le soleil, et non lumineux par eux-mêmes; car lorsque la surface éclairée de l'anneau est abaissée vers la terre, comme dans la fig. 7, on voit qu'elle projette sur le globe de Saturne une ombre sensible aux observations.

Mais pour entrer complètement dans les détails de cette théorie, et voir si l'hypothèse que nous venons de former satisfait à tous les détails des phénomènes, il faut examiner géométriquement les formes diverses sous lesquelles une circonférence de cercle doit se présenter, selon les points de vue d'où on l'observe. Pour cela il faut considérer l'œil de l'observateur comme le centre d'un cône de rayons visuels qui a pour base le cercle donné. La ligne menée de l'œil de l'observateur au centre du cercle forme l'axe du cône, axe qui est en général oblique sur sa base. Si l'on mène un plan perpendiculaire à cet axe, il coupera le cône suivant une ellipse dont la position et l'aplatissement dépendront de la plus ou moins grande obliquité du cône, et par conséquent de la position de l'observateur. C'est cette ellipse qui forme à ses yeux le contour apparent de l'anneau. Il faut par conséquent déterminer ses dimensions et la direction de son axe.

Pour y parvenir, menons par l'axe du cône un plan perpendiculaire au plan de sa base. Ce plan partagera le cône oblique en deux portions symétriques; il coupera donc aussi l'ellipse symétriquement. Il est facile de voir par la géométrie qu'il contiendra le petit axe, et que le grand axe lui sera perpendiculaire.

Il semble au premier coup-d'œil que le centre de l'ellipse doit se trouver sur l'axe du cône, et que son grand axe parallèle au plan de sa base circulaire doit être égal au diamètre de cette base; mais cette supposition n'est pas rigoureuse. Le centre de l'ellipse est un peu abaissé au-dessous du plan de la base du cône, et son grand axe est aussi plus grand que le diamètre de cette base. Ces différences viennent de ce que la moitié de la base qui se trouve la plus voisine de l'observateur, lui paraît plus grande que l'autre moitié. Mais l'inégalité diminue à mesure que l'observateur s'éloigne, et elle

devient tout-à-fait insensible quand sa distance peut être considérée comme extrêmement grande, par rapport au rayon de la base ; ce qui est le cas de l'anneau de Saturne, quand nous l'observons de la terre. Alors le centre de l'ellipse coïncide avec le centre de la base, son grand axe est égal au diamètre de cette base, et perpendiculaire à l'axe du cône ; enfin le petit axe est au grand comme le sinus de l'inclinaison de l'axe sur le plan de la base est à l'unité (*).

(*) Tous ces résultats se déduisent ensemble de l'équation du cône oblique ; et comme ce petit problême offre une application très-simple de la géométrie analytique, je vais en donner ici l'analyse.

Nommons r le rayon du cercle qui sert de base au cône, et rapportons les points de sa circonférence à des coordonnées rectangulaires x et y, qui se croisent à son centre. L'équation de cette circonférence sera

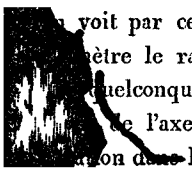
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Je suppose maintenant que l'observateur soit placé dans le plan des x et z, et que ses coordonnées soient x' et z'. Cette supposition ne particularise en rien le problême ; car on peut toujours prendre les axes des coordonnées de manière qu'elle soit remplie. En représentant par R la distance de l'observateur à l'origine, et par I l'inclinaison de l'axe sur le plan de la base, nous aurons

$$x' = R \cos I \qquad z' = R \sin I$$

Cela posé, cherchons l'équation du cône oblique. Par le point où se trouve l'observateur menons une ligne droite indéterminée quelconque ; l'équation de cette droite sera de la forme

$$x - x' = \alpha (z - z') \qquad y = \beta (z - z')$$



voit par ces résultats que si l'on mesure avec un ètre le rapport des deux axes de l'ellipse à un uelconque, on aura, pour le même instant, l'in- e l'axe sur le plan de la base. En faisant cette on dans le temps où la terre se trouve à 100° des

---

Le point où elle rencontre le plan des $x\,y$ se trouvera en faisant z nul, et ses coordonnées seront

$$x = x' - \alpha z' \qquad y = -\beta z'$$

Si nous voulons que la droite soit une des arêtes du cône, il faut que ces coordonnées satisfassent à l'équation de la base, ce qui donnera la condition

$$(x' - \alpha z')^2 + \beta^2 z'^2 = r^2$$

Mais les valeurs générales de α et de β peuvent se tirer de l'équation des rayons visuels ; car on a

$$\alpha = \frac{x - x'}{z - z'} \qquad \beta = \frac{y}{z - z'}$$

Si l'on met ces valeurs dans l'équation de condition en α et β, on aura une relation en $x\,y\,z$, qui appartiendra à tous les rayons visuels sans être particulière à aucun d'eux. Ce sera le lieu de tous les rayons visuels ou l'équation du cône. On aura ainsi, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$\left\{ x'(z - z') - z'(x - x') \right\}^2 + z'^2 y^2 = r^2 (z - z')^2$$

Coupons maintenant le cône par un plan perpendiculaire à l'axe, et cherchons l'ellipse d'intersection. Pour cela transformons d'abord les coordonnées x et z en d'autres x'' z'' aussi rectangulaires, situées dans le même plan et passant par la même origine. Nous aurons en général

$$x = x'' \cos \alpha'' - z'' \sin \alpha'' \qquad z = x'' \sin \alpha'' + z'' \cos \alpha''$$

(*Voyez* Géom. Anal., page 90). α'' est l'angle formé par le nouvel

nœuds de l'anneau, on en déduit immédiatement l'incli[naison] de l'anneau sur l'écliptique.

En effet, lorsque la terre se trouve à [la ligne] nœuds de l'anneau, le plan mené par la terre [et le] turne, perpendiculairement à l'écliptique, se [confond] même-tems perpendiculaire au plan de l'anneau ; et p[ar]

---

axe des x'' avec l'ancien axe des x. Prenons ce nouvel axe de manière qu'il soit perpendiculaire à l'axe du cône ; pour cela il suffit de faire

$$a'' = 100^\circ + I$$

ce qui donne

$$\sin a'' = \cos I \quad ; \qquad \cos a'' = -\sin I$$

et par conséquent

$$x = -x'' \sin I - z'' \cos I \quad ; \qquad z = x'' \cos I - z'' \sin I$$

Lorsque nous aurons substitué ces valeurs de x et z dans l'équation du cône, si nous voulons avoir l'intersection de sa surface par un plan perpendiculaire à l'axe, il suffira de faire $z'' = o$; mais puisque nous ne cherchons que l'équation de cette intersection, nous pouvons tout de suite faire z'' nul dans les valeurs générales de x et de z, puis les substituer ainsi dans l'équation du cône. En faisant cette substitution, et en mettant aussi pour x' et z' leurs valeurs $R \cos I$, $R \sin I$, on trouve après quelques réductions

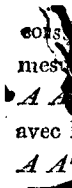
$$\left\{R^2 - r^2 \cos^2 I\right\} x''^2 + 2 R r^2 \sin I \cos I \,.\, x'' - R^2 \sin^2 I \,.\, \left\{r^2 - y^2\right\} =$$

Cette équation est celle d'une ellipse dont le demi-grand axe est parallèle à l'axe des y, et a pour valeur

$$\frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 I}} \quad ;$$

le demi-petit axe est

$$\frac{r \sin I}{1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 I} \quad ;$$



consiquent la ligne droite suivant laquelle il le coupe, mesure l'inclinaison de l'anneau sur l'écliptique. Soit, *fig.* 8, $A\,A$ cette droite, $I\,T$ l'intersection du plan coupant avec l'écliptique, T la terre, C le centre de Saturne, et $A\,A'$ l'étendue réelle de l'anneau. L'observation fait connaître les angles visuels $A\,T\,C$, $A'\,T\,C$, qui sont sensiblement égaux entr'eux, à cause du grand éloignement de Saturne; et chacun d'eux mesure le demi-petit axe de l'ellipse. Or, suivant les observations, ce petit axe est la moitié du grand axe parallèle à l'écliptique; c'est-à-dire, que $a'\,a$ est la moitié de $A'\,A$; car le grand axe de l'ellipse est le diamètre de l'anneau lui-même. D'après cela le sinus de l'angle $C\,a\,A$, qui est représenté par $\frac{C\,a}{C\,A}$, se trouve égal à $\frac{1}{2}$, et par conséquent l'angle $C\,A\,a$ à $C\,A\,T$

---

et enfin l'abscise du centre de l'ellipse, ou sa distance au centre de la base mesurée sur l'axe de x'', est

$$-\frac{r}{R}\cdot\frac{r\sin I\cos I}{1-\frac{r^2}{R^2}\cos I}$$

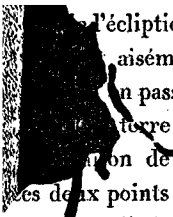
Si l'on regarde le rayon r de la base du cône comme extrêmement petit par rapport à la distance R de l'observateur, supposition qui peut bien à juste titre être employée pour Saturne, quand on l'observe de la terre, alors les termes affectés du coefficient $\frac{r}{R}$ deviendront extrêmement petits et insensibles. En faisant abstraction de ces termes, le demi-grand axe deviendra égal à r ou au rayon de la base du cône; le demi-petit axe sera $r\sin I$, c'est-à-dire égal au premier multiplié par le sinus de l'inclinaison de l'axe sur le plan de l'anneau; enfin la distance du centre de l'ellipse au centre de la base, et par conséquent au centre de Saturne, pourra être regardée comme nulle. Ce sont les résultats énoncés dans le texte.

lui-même, est égal à 33°,3333 ou 30° de la divisi[illegible]cka-gésimale. En ajoutant à cet angle $CTE + CT$[illegible] est-à-dire la latitude géocentrique de Saturne, plus [illegible] oitié du petit axe de l'ellipse, la somme donnera l'an[illegible] EA, puisque celui-ci est extérieur au triangle EA[illegible]. Cet angle IEA est l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique. On l'a trouvée, par ce procédé, égale à 34°.

Quand on a une valeur approchée de cet angle, et que l'on connaît la longitude des nœuds de l'anneau, il est facile de calculer, d'après le mouvement de Saturne, les variations que l'aplatissement de l'ellipse doit subir dans l'intervalle de quelques jours avant et après l'époque du maximum d'inclinaison. Par ce moyen, on réduit à cette époque les mesures de l'ellipse faites quelques jours avant et quelques jours après. Le résultat moyen de toutes ces mesures donne, avec plus d'exactitude, les rapports des deux axes de l'ellipse pour l'instant du maximum d'inclinaison.

Mais, pour faire ces observations, il faut que la terre se trouve à 100° des nœuds de l'anneau, afin que la projection de l'axe du cône sur l'écliptique soit perpendiculaire à la trace de l'anneau sur le même plan. Or, comment a-t-on pu reconnaître cette position, lorsque la longitude des nœuds de l'anneau n'était pas encore connue ? On y est parvenu d'après un autre caractère qui est particulier à cette situation de l'anneau ; c'est que l'ouverture de l'ellipse est alors la plus grande possible ; car cette ouverture est proportionnelle au sinus de l'inclinaison de l'axe du cône sur le plan de l'anneau ; or, il n'y a aucune position où cette inclinaison soit plus grande que quand la terre est le plus loin possible de la trace de l'anneau, c'est-à-dire quand elle se trouve à 100° de ses nœuds.

Pour déterminer complètement la position de l'anneau, il ne reste plus qu'à trouver la direction de sa trace sur le



l'écliptique, ou la situation de ses nœuds. On y parviendrait aisément si l'on connaissait l'instant où son plan passant par le centre de la terre, car alors Saturne et la terre se trouvent à-la-fois dans ce plan ; et comme la position de l'anneau sur l'écliptique est déjà connue, ces deux points suffisent pour déterminer ses nœuds : mais comment distinguer cet instant, puisque le passage du plan de l'anneau par le soleil peut occasionner des disparitions analogues ?

60. On résoudra cette difficulté en examinant les périodes dans lesquelles ces phénomènes se reproduisent ; car elles ne peuvent être les mêmes dans les deux cas. Les passages par le soleil ne dépendent que du mouvement de l'anneau et de celui de Saturne ; les autres dépendent aussi du mouvement du soleil autour de la terre.

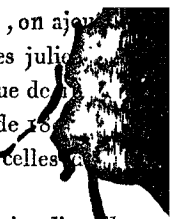
Or, on remarque qu'il y a des disparitions et des réapparitions de l'anneau, qui se succèdent très-exactement, et dans le même ordre à chaque révolution sidérale de Saturne. Il est donc naturel de penser qu'elles résultent du passage du plan de l'anneau par le soleil. Pour mettre cette vérité dans tout son jour, je rapporte ici la série de ces phénomènes tels qu'ils ont été observés (*).

1715	5 février	*R*
1730	10 novembre.	*D*
1744	23 juillet.	*D*
1760	25 avril.	*R*
1774	9 janvier.	*R*
1789	1 octobre.	*D*
1803	18 juin.	*D*

La lettre *D* indique une disparition ; la lettre *R* une réap-

(*) Ces époques sont tirées de l'ouvrage de *Dionis du Séjour* sur l'anneau de Saturne. Il ne faut les regarder que comme des

parition de l'anneau. Si, à l'époque de 1715, on aj[illegible] révolution sidérale de Saturne, ou 29 années juli[illegible] 1661,827213, on aura précisément l'époque de [illegible] l'on en déduira de même celles de 1774 et de 18[illegible]



L'époque de 1730 donnera pareillement celles [illegible] et de 1789.

61. Cet accord est trop exact pour qu'on puisse l'attribuer au hasard. Il indique évidemment la loi suivant laquelle ces phénomènes se suivent; et leurs retours étant indépendans de la révolution du soleil autour de la terre, il faut absolument en conclure qu'ils se rapportent aux passages de l'anneau par le centre de cet astre.

Alors nous voyons que ces phénomènes forment deux séries distinctes, qui marchent par les mêmes périodes, mais dont les époques sont différentes. Ces deux séries se rapportent évidemment aux deux situations opposées, dans lesquelles l'anneau doit rencontrer le soleil à chaque révolution.

62. Mais comme, dans chaque série, les passages reviennent toujours après une révolution complète de Saturne, il s'ensuit que ces deux situations de l'anneau répondent toujours aux mêmes points de l'orbite de cette planète, c'est-à-dire, *que le plan de l'anneau reste constamment parallèle à lui-même sur l'orbite de Saturne*, et par conséquent, *sa trace sur le plan de l'écliptique doit toujours faire, avec la trace de l'orbite, un angle constant.*

Ces résultats sont parfaitement conformes aux observations. En calculant la longitude héliocentrique des nœuds de

---

approximations; car les disparitions de l'anneau ne se font pas d'une manière subite : on ne le perd de vue que peu-à-peu, et on l'aperçoit d'autant plus long-tems, qu'on a des instrumens plus parfaits. Par cette raison, il n'est pas possible de fixer avec précision l'instant de son passage par la terre ou par le soleil.

[illegible], d'après les passages du plan par le centre de la [illegible] passages qui se distinguent des autres parce qu'ils [illegible]s compris dans les séries de l'article 60, on la [illegible]stamment la même. Il ne faut, pour cela, qu'un [illegible]s-simple (*). La trace du plan de l'anneau sur

(*) Rapportons la position des points de l'espace à trois coordonnées rectangulaires $x\ y\ z$, dont l'origine soit au centre de la terre. Prenons l'axe des z perpendiculaire à l'écliptique, et supposons l'axe des x dirigé vers l'équinoxe du printems; lorsque le plan de l'anneau passera par le centre de la terre, son équation sera de la forme

$$z = Ax + By$$

Les constantes A et B dépendront de la direction de sa trace sur l'écliptique, et de son inclinaison. Soit I cette inclinaison, qui est supposée connue par ce qui précède, et désignons par N la longitude de son nœud. D'après ce que nous avons démontré pour un cas tout semblable, en traitant de la rotation du soleil dans le troisième livre, page 264, on aura

$$A = -\text{tang } I \sin N\ ;\quad B = +\text{tang } I \cos N$$

ce qui donne à l'équation du plan la forme suivante :

$$z = y \text{ tang } I \cos N - x \text{ tang } I \sin N$$

Ceci est l'équation d'un plan mené par le centre de la terre parallèlement à l'anneau. A l'instant du passage de l'anneau par le centre de la terre, Saturne se trouve dans ce plan, et ses coordonnées géocentriques devront satisfaire à la relation précédente. Si donc on les désigne par x', y', z', on aura

$$z' = y' \text{ tang } I \cos N - x' \text{ tang } I \sin N$$

Désignons par λ la latitude géocentrique de Saturne à cette époque, par l sa longitude géocentrique, et nommons r la distance de son centre au centre de la terre. Nous aurons, d'après l'article cité,

$$x = r \cos\lambda \cos l\ ;\quad y = r \cos\lambda \sin l\ ;\quad z = r \sin\lambda$$

l'écliptique fait, avec la trace de l'orbite de Sat[illegible] un angle de 66°.

63. En examinant la table que nous venons de [illegible] on voit que les intervalles des passages du soleil [illegible] de l'anneau à l'autre, ne sont pas d'une égale dur[illegible] l'époque de 1715 et celle de 1730, il y a 15 ans et 9 mois; il n'y a que 13 ans et 8 mois entre celle de 1730 et de 1744.

---

où λ et l sont des quantités connues. Substituant dans l'équation précédente, et divisant par $r \cos \lambda$, il vient

$$\text{tang } \lambda = \text{tang } I \sin l \cos N - \text{tang } I \cos l \sin N$$

ou

$$\frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } I} = \sin (l - N)$$

équation qui détermine $l - N$, et par conséquent N, lorsque l'inclinaison I de l'anneau est connue ; par exemple, le 3 avril 1774, à dix heures du soir, heures vulgaires, l'anneau disparut, parce que son plan passait par le centre de la terre. On avait alors

Longitude géocentrique de Saturne	194°,5868	$= l$
Latitude.	2°,7221	$= \lambda$
Inclinaison de l'anneau sur l'écliptique.	34°,8	$= I$

Ces valeurs donnent

$$\log \left\{ \frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } I} \right\} = 8{,}847121 = \log \sin (l - N)$$

d'où l'on tire

$$l - N = 4°,48$$

et par conséquent

$$N = 190°,1068$$

C'était la longitude du nœud de l'anneau, le 3 avril 1774. Pour avoir cette longitude à une autre époque quelconque antérieure ou postérieure, il suffit de l'augmenter ou de la diminuer en raison de la précession.

est de même des époques suivantes. La différence tient tricité de l'orbe de Saturne. En effet, concevez par du soleil un plan parallèle à celui de l'anneau : ce minera les instans des passages. Si l'orbite est cir- lle se trouvera ainsi partagée en deux portions les intervalles des tems employés par Saturne pour ller d'un nœud à l'autre seront d'une égale durée; mais si l'orbite est elliptique, le plan parallèle à l'anneau la coupera en deux portions inégales, dont la plus longue à décrire sera celle qui contient l'aphélie, où le mouvement est le plus lent. Alors les intervalles des passages seront inégaux entr'eux ; c'est ce qui a lieu dans la position actuelle de l'orbe de Saturne. Cet astre a passé par son aphélie entre 1715 et 1730 ; il a passé par son périhélie entre 1730 et 1744.

64. Toutes les apparences de l'anneau de Saturne seraient faciles à prévoir, si l'on connaissait la période de ses passages par le centre de la terre, comme nous avons celle de ses passages par le soleil; mais le mouvement annuel du soleil autour de la terre donne à cette question un peu plus de difficulté. Pour la résoudre, il faut trouver un nombre de révolutions sidérales de Saturne, qui réponde exactement, ou à fort peu près, à un nombre exact d'années sidérales. Or, en prenant le rapport de ces périodes, qui est $\frac{10758,969840}{365,256364}$; et le réduisant en fraction continue suivant la méthode de l'article 31, on trouve pour les premières valeurs approchées $\frac{59}{2}$ et $\frac{324}{11}$. Je ne parle pas des suivantes, parce qu'elles donneraient des périodes trop longues pour pouvoir être employées.

La fraction approchée $\frac{59}{2}$ nous indique que dans 59 années sidérales il y a, à fort peu près, deux révolutions de Saturne; si l'on calcule exactement les durées de ces deux pé-

riodes, on trouve que la première excède la seconde de 321,185796; ainsi, après 59 années sidérales, Saturne sera en avance sur le soleil de cette quantité. D'après cette donnée connue, il est facile d'en conclure l'époque à laquelle les deux astres seront revenus à la même position respective, et le nombre de jours qu'il faut ajouter aux 59 années (*).

La période, donnée par la fraction $\frac{324}{11}$, est beaucoup plus exacte; elle montre que 324 années sidérales égalent,

---

(*) Soit R la durée de la révolution sidérale de Saturne, R' celle du soleil, désignons par D la différence 321,185796, et par x le nombre de jours qu'il faut ajouter aux 59 années ci-dessus, pour que les deux astres reprennent la même position respective. Il est clair que dans le tems D, Saturne décrit un arc égal à $\frac{400^{\circ}.D}{R}$. Dans le tems x, il décrit $\frac{400^{\circ}.x}{R}$; dans le même intervalle, le soleil parcourra $\frac{400^{\circ}.x}{R'}$. On aura donc l'égalité

$$\frac{400^{\circ}.x}{R}+\frac{400^{\circ}.D}{R}=\frac{400^{\circ}.x}{R'}$$

ou en divisant par 400°.

$$\frac{x+D}{R}=\frac{x}{R'}$$

d'où l'on tire

$$x=D.\frac{R'}{R-R'}$$

c'est le temps qu'il faut ajouter aux 59 années sidérales.

Dans la seconde période de 324 années, Saturne se trouve en arrière de 5j,606304; alors D est négatif et égal à cette quantité. On a donc

$$x=\frac{-DR'}{R-R'}$$

valeur qui doit être retranchée des 324 années sidérales.

à fort peu près, 11 révolutions de Saturne. La différence n'est que de 5/6o63o4, dont Saturne se trouve en arrière ; et il est facile d'en conclure l'époque à laquelle il a dû se retrouver dans la même position, par rapport au soleil, époque postérieure aux 324 années.

Ces périodes s'accordent assez exactement avec les retours observés ; mais il ne faut les appliquer qu'aux passages du plan de l'anneau par le centre de la terre : elles deviendraient nécessairement fautives, si on les appliquait aux passages par le soleil. La période de ceux-ci, comme on l'a vu plus haut, est égale à une révolution sidérale de Saturne. Cependant, même avec cette restriction, les résultats précédens pourraient être quelquefois en défaut, par suite des grandes inégalités du mouvement de Saturne, causées par l'attraction de Jupiter.

65. Pour compléter cette théorie, il ne reste plus qu'à exposer ce que les observations ont fait connaître sur la constitution physique de l'anneau.

En mesurant ses dimensions avec le micromètre, on a trouvé que sa largeur apparente est égale à la distance de son bord intérieur à la surface de Saturne ; cette distance est le tiers du diamètre de la planète, et sa valeur moyenne est 18″,13. Les dimensions réelles sont probablement un peu plus petites, parce qu'elles doivent paraître agrandies par l'effet de l'irradiation. En observant l'anneau avec d'excellentes lunettes, on reconnaît sur sa surface des lignes concentriques, noires et extrêmement déliées, qui semblent le séparer en autant de circonférences parallèles. Il y aurait donc ainsi plusieurs anneaux distincts et séparés les uns des autres. Il faut des lunettes extrêmement parfaites pour apercevoir cette séparation. Dans les autres, l'irradiation étendant un peu l'espace occupé par chaque anneau, fait disparaître les intervalles qui les séparent, et les réunit tous en un seul.

Quelques taches observées sur la surface de l'anneau ont fait voir qu'il tourne sur lui-même en $0^j,437$; son axe de rotation est perpendiculaire à son plan : il est le même que celui de Saturne.

La durée de cette rotation offre un rapport très-remarquable : si l'on conçoit autour de Saturne un satellite qui ait pour orbite la circonférence moyenne de l'anneau, et que l'on calcule, d'après la troisième loi de Képler, la durée de sa révolution sidérale, on la trouve précisément égale à celle de l'anneau (*).

66. Ce rapport explique comment l'anneau de Saturne peut se soutenir autour de cette planète sans la toucher, ou du moins il ramène ce fait à la cause générale qui soutient ainsi tous les satellites.

(*) Prenons pour unité le demi-diamètre apparent de Saturne. La distance de sa surface au bord intérieur de l'anneau est le tiers du diamètre entier de la planète. Cette distance sera donc exprimée par $\frac{2}{3}$; de-là, jusqu'à la circonférence moyenne de l'anneau, la distance est $\frac{1}{3}$, puisque la largeur totale de l'anneau est égale à la distance de son bord intérieur à la surface de la planète ou à $\frac{2}{3}$. Ajoutant à ces résultats le demi-diamètre de Saturne, qui est l'unité, on aura $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$, ou 2, pour le rayon de la circonférence moyenne de l'anneau, mesuré à partir du centre de Saturne.

Si l'on prend pour terme de comparaison le premier satellite de Saturne, on a vu que sa distance moyenne au centre de Saturne est $3,08$, le tems de sa révolution sidérale est $0^j,94271$. Ainsi, d'après la loi de Képler, que les carrés des tems des révolutions sont comme les cubes des moyennes distances, on aura

$$0^j,9427 \cdot \sqrt{\frac{2^3}{(3,08)^3}}$$

ou $0^j,49$, ce qui diffère peu des observations.

En effet, on peut considérer chaque particule de l'anneau comme un petit satellite de Saturne, et l'anneau lui-même comme un amas de satellites liés entr'eux d'une manière invariable. Si ces petits corps étaient libres et indépendans les uns des autres, leurs vîtesses varieraient avec leurs distances au centre de la planète; les plus voisins de ce centre iraient plus vîte, les plus éloignés plus lentement, suivant la troisième loi de Képler; et si l'on prend pour terme moyen la vîtesse qui convient à la circonférence moyenne de l'anneau, les vîtesses des autres particules s'en écarteraient, soit en plus, soit en moins, d'une égale quantité. Maintenant, si ces particules viennent à s'unir et à s'attacher les unes aux autres pour former un corps solide, il se fera une sorte de compensation entre leurs mouvemens : les plus rapides communiqueront aux plus lentes une partie de leur vîtesse; celles-ci leur communiqueront en échange une partie de leur lenteur, et ces efforts opposés se faisant mutuellement équilibre, il ne restera que le mouvement moyen, commun à toutes les particules, et qui sera celui de la circonférence moyenne (*). Les anneaux se soutiendront autour de Saturne, comme la lune se soutient autour de la terre,

(*) Il faut démontrer que si l'on choisit deux points à égale distance de la circonférence moyenne, leurs vîtesses excéderont celle de cette circonférence, l'une en plus, l'autre en moins, d'une égale quantité. Cela n'est vrai qu'autant que la distance des deux points à la circonférence moyenne peut être considérée comme très-petite par rapport au rayon de cette circonférence. Soit T le tems de la révolution moyenne, R la distance du milieu de l'anneau au centre de Saturne. Si ces données appartenaient à un satellite, on aurait

$$T^2 = K^2 R^3$$

K étant un coefficient constant pour tous les satellites de Saturne.

ou comme feraient les arches d'un pont, si le foyer de la pesanteur était au centre des voussoirs.

Cette théorie subsisterait encore dans le cas où l'anneau serait composé, comme il paraît l'être, de plusieurs anneaux concentriques et détachés les uns des autres ; seulement il faudrait l'appliquer séparément à chacun d'eux. Alors les durées de leurs rotations devraient être sensiblement différentes ; c'est au tems et à l'observation à confirmer ces résultats.

Si l'on considère un second satellite placé à la distance $R+u$, et que le tems de sa révolution soit $T+t$, on aura

$$(T+t)^2 = K^2 (R+u)^3$$

et si ce satellite est placé à la distance $R-u$, le tems de sa révolution étant représenté par $T-t'$, on aura

$$(T-t')^2 = K^2 (R-u)^3$$

Si l'on développe les deux membres de ces équations, en faisant usage de la première, il résulte

$$2Tt + t^2 = K^2 (3R^2 u + 3R u^2 + u^3)$$
$$-2Tt' + t'^2 = K^2 \{-3R^2 u + 3R u^2 - u^3\}$$

Or si u est une quantité très-petite par rapport à R, t et t' seront aussi très-petites du même ordre par rapport à T. On pourra donc négliger les carrés et les cubes de ces petites fractions, comparativement aux autres termes ; alors on aura seulement

$$2Tt = 3K^2 R^2 u \quad ; \quad -2Tt' = -3K^2 R^2 u$$

ce qui donne

$$t = t'$$

résultat qui est précisément celui que l'on voulait démontrer.

CHAPITRE VIII.

Des Comètes.

67. Dans le premier chapitre de cet ouvrage, nous avons déjà indiqué les apparitions passagères de ces astres qui, d'abord invisibles pour nous, augmentent peu-à-peu d'éclat, de vîtesse, et diminuant ensuite par les mêmes périodes, vont de nouveau se perdre dans l'éloignement. Ces phénomènes imprévus ont, pendant long-tems, effrayé les peuples, qui les regardaient comme le présage des plus grands malheurs. La traînée lumineuse, qui suit ordinairement les comètes, était sur-tout redoutée, et l'effet se proportionnait à son étendue. Il n'y a pas plus de cinquante ans que la philosophie est parvenue à dissiper ces erreurs; et les comètes mieux connues n'excitent plus aujourd'hui que l'intérêt des astronomes et la curiosité générale. Les découvertes qui fortifient l'esprit humain, ne sont pas les moins utiles.

68. On a douté long-tems si les comètes étaient de véritables astres; on les regardait comme de simples météores, engendrés fortuitement dans l'air par l'inflammation de quelques vapeurs. Lorsqu'on ne connaissait pas le télescope, on ne pouvait suivre les accroissemens et les diminutions progressives de leur lumière; on les voyait paraître et disparaître presque subitement. Leur queue légère et vaporeuse, à travers laquelle on peut voir les étoiles; leur blancheur souvent assez vive, semblaient leur donner beaucoup de ressemblance avec ces feux passagers que l'on nomme étoiles tombantes. Elles n'en différaient, en apparence, que

pour la durée. On pouvait penser que les comètes étaient seulement composées d'une matière plus compacte qui retarderait plus long-tems leur dissolution ; mais ces opinions sont tombées, quand on a eu des observations plus parfaites.

Toutes les comètes observées ont une parallaxe fort petite qui les place bien au-delà de l'orbe de la lune ; elles ne se forment donc pas dans notre atmosphère. De plus, leur mouvement apparent à travers les étoiles est assujetti à des lois régulières qui permettent de prévoir complettement leur marche, d'après un petit nombre d'observations. Cette régularité, cette constance, marquent évidemment des êtres durables ; et il est naturel d'en conclure que les comètes sont des astres permanens comme les planètes, mais assujettis à une marche différente.

69. Lorsqu'on les regarde au télescope, elles ressemblent à un amas de vapeurs, au centre duquel on voit ordinairement un noyau plus ou moins terminé. Cependant, quelques-unes d'entr'elles n'ont paru que comme une vapeur légère, sans aucun noyau sensible, car on voyait les étoiles au travers. Pendant les diverses périodes de leur révolution, elles éprouvent dans leur éclat des variations progressives qui paraissent dépendre de leur distance au soleil, soit que cet astre les embrase par sa chaleur, soit qu'il ne fasse que les éclairer. L'instant où leur éclat est le plus vif, peut même faire juger qu'elles se trouvent près de leur périhélie. Or, leur lumière, d'abord très-faible, devenant graduellement plus vive, jusqu'à surpasser celle des planètes les plus brillantes, et s'effaçant ensuite par les mêmes degrés, on doit en conclure que ces astres venant des régions les plus éloignées du ciel, s'approchent beaucoup plus près du soleil que les planètes, et s'en retournent ensuite à des distances beaucoup plus considérables.

70. Ces alternatives servent à expliquer les phénomènes que présentent les queues des comètes. Lorsque ces corps s'approchent très-près du soleil, ils doivent éprouver une chaleur énorme, tout doit se fondre et se vaporiser à leur surface; et ces vapeurs exhalées dans l'espace, ne participant plus à l'accélération du mouvement de la comète, doivent traîner derrière elle comme une sorte de queue. On expliquerait aussi par-là comment quelques comètes ont paru sans noyau, leur masse ayant été réduite toute entière en vapeurs par l'effet d'une chaleur excessive; mais pour apprécier ces considérations il faut connaître exactement les lois des mouvemens de ces astres.

71. Pour les découvrir, laissons-nous guider par l'analogie. Puisque les comètes sont des astres qui paraissent appartenir à notre système planétaire, il est naturel de penser qu'elles se meuvent autour du soleil comme les planètes, mais dans des orbites extrêmement alongées. Ces orbites seront donc encore des ellipses qui auront leur foyer au centre du soleil, mais dont le grand axe sera presque infini, sur-tout pour nous, qui n'en observons qu'une petite partie, celle où la comète devient visible en s'approchant du soleil. Ainsi l'orbite des comètes sera une *parabole*: car on appelle ainsi la courbe dans laquelle l'ellipse dégénère lorsqu'elle s'alonge indéfiniment. (*Voy. fig.* 9.)

En introduisant cette modification dans les lois de Képler, relatives au mouvement elliptique, on en déduit celles du mouvement parabolique des comètes.

Il en résulte que les aires décrites par une même comète dans sa parabole sont proportionnelles aux tems.

Les aires décrites par différentes comètes en tems égal sont proportionnelles aux racines carrées de leurs distances périhélies.

53186

Enfin, si l'on conçoit une planète mue dans un orbe circulaire dont le rayon soit égal à la distance périhélie d'une comète, les aires décrites par ces deux astres dans le même tems seront entr'elles comme l'unité à la racine carrée de 2, ce qui lie les mouvemens des comètes et des planètes (*).

(*) Suivant la troisième loi de Képler, les carrés des tems des révolutions sont comme les cubes des moyennes distances, c'est-à-dire, qu'on a

$$T^2 = k^2 a^3$$

k étant un coefficient constant pour toutes les planètes.

De plus, les aires décrites dans chaque orbite sont proportionnelles au tems; ainsi en nommant t le tems, et c l'aire décrite, on a

$$c = mt$$

m étant un coefficient constant pour la même planète, et variable d'une planète à une autre.

Ce coefficient se détermine aisément quand on connaît la surface de l'ellipse décrite, que nous nommerons S, et la durée de la révolution sidérale que nous nommerons T. Car l'aire entière de l'ellipse étant décrite toute entière à chaque révolution, on a

$$S = mT$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{S}{T}$$

Lorsque l'ellipse est excessivement étendue, l'orbite devient parabolique, S et T deviennent l'une et l'autre infinies, et cette expression ne peut plus servir. Cependant ces deux quantités conservent encore un rapport fini qu'il est nécessaire de connaître pour le substituer au précédent.

Afin de l'obtenir, il faut mettre à la place de T sa valeur $k\, a^{\frac{3}{2}}$ tirée de la première équation qui est commune à toutes les planètes; il faut, de plus, savoir qu'en représentant par b le demi petit axe de l'ellipse, dont a est le demi-grand axe, et par π le rapport

72. A l'aide de ces lois, on peut déterminer l'aire décrite par une comète dans un tems donné depuis son passage au périhélie, et fixer sa position dans sa parabole. Il ne s'agit plus que de voir si cette théorie est conforme aux observations.

---

de la circonférence au diamètre, la surface de l'ellipse a pour mesure $\pi a b$. On aura donc

$$m = \frac{\pi a b}{k a^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ou} \quad m = \frac{\pi b}{k \sqrt{a}}$$

L'excentricité dans l'ellipse, ou la distance du centre au foyer, a pour valeur $\sqrt{a^2 - b^2}$; la distance du foyer au sommet de la courbe, ou la distance périhélie, est $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Lorsque l'ellipse s'alonge pour se changer en parabole, cette distance ne devient pas infinie; au contraire, elle conserve toujours une certaine valeur finie que l'on peut représenter par D; on aura donc

$$D = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

d'où l'on tire

$$a^2 - b^2 = (D - a)^2 = D^2 - 2aD + a^2$$

et par conséquent

$$b = \sqrt{2aD - D^2}$$

valeur qui étant substituée dans celle de m, donne

$$m = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{\sqrt{2aD - D^2}}{\sqrt{a}}$$

ou en effectuant la division par $\sqrt{a}$

$$m = \frac{\pi}{k} \cdot \sqrt{2D - \frac{D^2}{a}}$$

Ceci a lieu dans toutes les ellipses possibles. Lorsque l'ellipse se change en parabole, a devient extrêmement grand et comme

Or, il existe un moyen rigoureux de la vérifier, c'est de faire passer une parabole par plusieurs lieux observés d'une comète, et de voir si tous les autres s'y trouvent compris.

Pour cela il suffit de trois observations : si l'on a observé la déclinaison de la comète et son ascension droite à trois époques différentes, qu'on en ait déduit ses longitudes et ses latitudes géocentriques, on connaîtra la direction de trois rayons visuels menés à ces mêmes époques de la terre à la comète, et sur le prolongement desquels elle a dû nécessairement se trouver. Les lieux correspondans du soleil sont connus : il faut donc trouver une parabole qui ait son foyer au centre

---

infini par rapport à D ; on peut donc alors négliger le terme $\frac{D^2}{a}$, qui est une fraction très-petite, et il reste simplement

$$m = \frac{\pi}{k}\sqrt{2D}$$

Comme le coefficient k est connu par la théorie des planètes, dès que l'on connaîtra la distance périhélie D, on aura la valeur de m, et l'on pourra par conséquent, au moyen de l'équation $c = mt$, évaluer les aires décrites par la comète à un instant quelconque depuis son passage au périhélie.

La valeur de m pour une planète est $\frac{\pi a b}{T}$, ce sera $\frac{\pi a^2}{T}$ si l'orbite est circulaire ; ou en mettant pour T sa valeur $k a^{\frac{3}{2}}$, ce sera $\frac{\pi}{k}\sqrt{a}$. Les aires décrites dans le même tems par cette planète et par la comète, sont entr'elles comme la valeur de m, c'est-à-dire, comme $\frac{\pi}{k}\sqrt{a}$ est à $\frac{\pi}{k}\sqrt{2D}$; et si le rayon a de la planète est égal à la distance périhélie D, ce rapport deviendra celui de 1 à $\sqrt{2}$, ce qui donne la proposition énoncée dans le texte.

de cet astre, qui coupe les trois rayons visuels, et qui les coupe dans des points dont les intervalles correspondent au nombre de jours écoulés.

Ou si l'on veut supposer la terre en mouvement sur l'écliptique, et le soleil immobile, que T, T', T'', *fig.* 10, représentent trois positions successives de la terre, et TC, $T'C'$, $T''C''$ trois rayons visuels menés à la comète, il s'agira de trouver une parabole $CC'C''$ dont le foyer soit en S au centre du soleil, et qui coupe les trois rayons visuels conformément aux conditions exigées.

Ces conditions sont plus que suffisantes pour déterminer complètement les élémens du mouvement parabolique, c'est-à-dire la distance périhélie de la comète, la position du périhélie, l'instant du passage par ce point, l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, et la position de ses nœuds. Ces cinq élémens étant connus, on peut assigner la position de la comète à une époque quelconque, et la comparer aux observations. Mais la recherche des élémens est extrêmement difficile, et l'on n'y parvient que par une analyse très-délicate, dont il serait impossible de rendre compte ici : on la trouvera dans la *Mécanique Céleste*. Je me bornerai à dire que de toutes les méthodes connues, celle que M. Laplace a donnée dans cet ouvrage est celle qui paraît la plus sûre, la plus exacte, et la seule jusqu'à présent connue, qui s'applique avec succès à tous les cas.

Plus de quatre-vingts comètes ont été calculées d'après la théorie du mouvement parabolique ; et leurs observations se trouvent parfaitement représentées. Il n'y a donc aucun doute qu'elle ne soit conforme à la nature. On a eu ainsi la connaissance précise des mouvemens de ces astres ; on a pu les suivre dans l'espace ; et cette épreuve, en confirmant les lois de Képler, a dévoilé plusieurs autres résultats importans.

73. Les comètes ne se meuvent pas toutes d'occident en

orient, comme les planètes, suivant l'ordre des signes; le mouvement de quelques-unes est direct; pour d'autres il est rétrograde.

Leurs orbites ne sont pas comprises dans une zône étroite du ciel, comme celles des planètes anciennement connues. Elles varient par tous les degrés d'inclinaison. Il en est dont le plan est presque couché sur l'écliptique; d'autres lui sont perpendiculaires. Au reste, le peu d'inclinaison du plan de l'orbite n'est pas non plus un caractère essentiel des planètes, comme le prouvent les grandes inclinaisons des petites planètes nouvellement découvertes. On peut même citer comme une induction favorable à cette idée, que les orbites des satellites d'Uranus sont presque perpendiculaires à l'écliptique; car les divers systèmes de satellites nous offrent, en petit, les images fidèles du grand système planétaire.

74. On observe encore que les queues des comètes ne commencent à paraître que quand ces astres se rapprochent beaucoup du soleil; leur longueur croît avec cette proximité, elles n'acquièrent leur plus grande étendue qu'après le passage au périhélie, et leur direction est toujours opposée au soleil, en formant vers cet astre une courbe un peu concave, comme le représente la figure 11.

Une des plus étendues a été celle de la comète de 1680 : elle occupait dans le ciel un espace de près de 66°. Celle de la comète de 1744 était encore plus remarquable; elle ressemblait à une sorte d'éventail, dont la longueur était de 17°, et la largeur de 130 : elle était assez brillante pour n'être pas effacée par la lumière de la pleine lune, et on l'apercevait même encore après le lever du soleil.

75. Ces résultats confirment l'idée que nous avons conçue d'abord d'après la seule inspection des phénomènes; ils s'ac-

cordent à montrer que les queues des comètes sont réellement l'effet de la vaporisation produite par une chaleur excessive : elles n'acquièrent toute leur longueur qu'après le passage au périhélie, parce que c'est seulement alors que la comète a été le plus échauffée et pénétrée par les rayons du soleil, de même que la surface de la terre n'atteint sa plus haute température qu'après le solstice d'été. Ce rapprochement paraît indiquer assez que les comètes, au moins avant leur passage au périhélie, sont des corps solides, qui s'échauffent progressivement, et peuvent ensuite se vaporiser en partie ou en totalité. Autrement comment pourraient-ils supposer une si forte chaleur? la comète de 1680, par exemple, se trouva, dans son périhélie, 166 fois plus près du soleil que la terre. Elle éprouva donc alors, de la part de cet astre, une chaleur 27556 fois plus grande que celle que la terre en reçoit, si, comme il est naturel de le penser, l'intensité de la chaleur du soleil est, comme l'intensité de la lumière, réciproquement proportionnelle au carré des distances. Cette énorme élévation de température surpasse plusieurs milliers de fois celle d'un fer rouge et tous les degrés de feu que nous pouvons produire. Un simple amas de vapeurs, exposé à une chaleur aussi vive, aurait dû mille fois se dissiper dans l'espace.

76. Après avoir calculé les mouvemens des comètes, on a cherché à prévoir leurs retours. En effet, si elles décrivent des ellipses très-alongées, leur marche dans la parabole ne peut être regardée que comme une première approximation. Mais l'analyse, qui donne le premier résultat, fournit aussi les moyens de le corriger, de calculer l'ellipse véritable, et par conséquent de déterminer la longueur de son grand axe en partie du rayon de l'orbe solaire. Alors, d'après la troisième loi de Képler,

on conclut la révolution sidérale de la comète et l'époque de ses retours.

Par malheur, ces résultats sont rarement susceptibles d'une très-grande exactitude, parce qu'on les conclut d'après l'observation d'un très-petit arc de l'orbite de la comète, qui est celui où nous pouvons la voir lorsqu'elle s'approche du soleil. D'ailleurs, il peut se faire que certaines comètes décrivent des paraboles ou des hyperboles dont les branches sont indéfinies, et alors une fois qu'on les aurait observées dans leur passage au périhélie, on les perdrait de vue pour toujours. Cependant il est probable que si de pareils corps existent, ils ont dû, à cause de l'ancienneté de l'univers, passer depuis long-tems devant le soleil; en sorte que les mouvemens périodiques sont les seuls qui restent à nos observations.

Lorsqu'on a observé une comète, et qu'on a déterminé les élémens de son orbite, on les compare à ceux des comètes anciennement connues, et on cherche s'il s'en trouve qui leur ressemblent. Si l'identité était parfaite, on en conclurait avec certitude que la comète avait déjà paru dans une autre de ses révolutions. Mais cette condition n'est pas rigoureusement nécessaire; car les élémens de l'orbite peuvent, comme ceux des autres corps célestes, avoir subi des perturbations qui les aient altérés. En conséquence, on examine seulement si les élémens observés approchent de ceux de quelque comète anciennement observée, et ensuite le calcul des probabilités fournit des méthodes pour juger jusqu'à quel point on peut compter sur cette ressemblance.

77. Il n'y a jusqu'à présent qu'une seule comète dont la révolution sidérale soit bien connue, et dont le retour soit certain : c'est celle de 1682, déjà observée en 1607, 1531 et 1456, et qui a reparu en 1759 : elle emploie environ

76 ans à faire sa révolution, et doit reparaître en 1832. D'après la troisième loi de Képler, si l'on prend pour unité le demi-grand axe de l'orbe terrestre, la distance moyenne de cette comète sera égale à la racine cubique du carré de 76, ou à 17,95 (*). Le grand axe de son orbite sera donc 35,9 ; et comme sa distance périhélie observée s'est trouvée de 0,58, il en résulte que sa distance aphélie est égale à 35,32. Elle s'éloigne donc du soleil trente-cinq fois plus que la terre, et s'en rapproche ensuite deux fois davantage, en parcourant ainsi une ellipse extrêmement alongée.

Les intervalles de ses retours au périhélie ne sont pas constamment les mêmes. Celui de 1531 à 1607 a été plus long de treize mois que celui de 1607 à 1682, et celui-ci a été de dix-huit mois plus court que le retour de 1682 à 1759. Il paraît donc que les mouvemens des comètes sont sujets à être troublés comme ceux des planètes, et d'une manière encore plus sensible.

78. La comète de 1770 offre un exemple frappant de ces inégalités. Les observations de cette comète, calculées d'abord par Lexell, et ensuite par M. Burkardt, ne peuvent être représentées que par une ellipse dans laquelle la durée de la révolution est de cinq ans et demi. Cependant on ne l'a jamais revue. Il n'y a donc aucun doute que son

(*) Si l'on nomme a, a' les distances moyennes de la terre et de la comète au soleil, T, T' les tems de leurs révolutions sidérales, les lois de Képler donnent

$$\frac{a'^3}{a^3} = \frac{T'^2}{T^2}$$

Dans le cas actuel, on a $T' = 76\ T$. On suppose $a = 1$; il reste donc

$$a' = \sqrt[3]{76^2} = 17{,}95.$$

orbite n'ait été changée depuis 1770. Nous verrons plus loin que ces effets sont dus à l'attraction universelle, qui, en maintenant les mouvemens des grands corps planétaires, livre les masses plus petites à des dérangemens considérables.

NOTE.

Nous avons donné dans le second Livre, pag. 153, les formules qui expriment les lois des mouvemens elliptiques. Nous allons pareillement donner ici celles qui conviennent aux mouvemens paraboliques.

Soit D la distance périhélie de la comète, v son anomalie, r son rayon vecteur, t le tems écoulé depuis son passage au périhélie: quand v sera donné, on trouvera r et t par ces deux équations

$$(1) \qquad t = \frac{D^{\frac{3}{2}}\, T}{\pi \sqrt{2}} \left\{ \tan\tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \tan^3 \tfrac{1}{2} v \right\}$$

$$(2) \qquad r = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} v}.$$

π représente la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, et T est la durée de la révolution sidérale de la terre, en sorte que l'on a

$$\pi = 3{,}141592\,6 ; \qquad \pi = 365{,}256383.$$

Quand v sera donné, ainsi que D, ces formules feront connaître t et r. Mais si t était donné, on ne pourrait obtenir v qu'en résolvant une équation du troisième degré. Pour éluder cette difficulté, les astronomes ont calculé les valeurs de t correspondantes aux valeurs de v, de degré en degré, dans une parabole où la distance périhélie D est l'unité. Et cette table, une fois calculée, leur donne les valeurs de v quand $\frac{t}{D^{\frac{3}{2}}}$ est connu. C'est ce que l'on nomme une *table du mouvement des comètes*. Au défaut de cette table, on résoudrait l'équation (1) par des essais.

Quant à la manière d'obtenir les coordonnées héliocentriques et géocentriques de la comète, les unes par les autres, nous avons donné, pag. 31, tout ce qu'il faut pour cet objet.

CHAPITRE IX.

Des Aërolithes.

79. On a vu tomber du haut des airs des corps solides composés de diverses substances minérales, et on leur a donné, par cette raison, le nom d'*aërolithes*, qui signifie *pierres de l'air*. On a douté long-tems de leur chûte, parce que l'on regardait comme un préjugé populaire l'opinion générale qui en attestait la réalité; mais le fait a été constaté de manière à ne laisser plus aucun doute sur son existence.

80. Leur caractère le plus remarquable, et ce qui les a fait distinguer d'abord, c'est qu'elles se ressemblent toutes parfaitement. Ce sont des masses pyriteuses où l'on voit briller des grains métalliques. La surface extérieure est noire, comme si elle avait été brûlée par le feu. L'intérieur est d'un blanc jaunâtre, la forme inégale. Elles ont toutes la même pesanteur spécifique, au moins à très-peu près, et on peut l'évaluer à 3,591, celle de l'eau étant prise pour unité. Leur analyse chimique donne toujours les mêmes substances, presque dans les mêmes proportions; elles sont composées de *silice*, de *magnésie*, de *soufre*, de *fer à l'état métallique*, de *nickel*, et de quelques parcelles de *chrôme*.

Ces caractères communs et constans indiquent avec la plus grande évidence une origine commune. Il faut, de plus, remarquer que le fer ne se rencontre jamais, ou presque jamais, à l'état métallique, dans les corps terrestres. Les matières volcaniques n'en contiennent point

qui ne soit oxidé. Le nickel est aussi très-rare, et on ne le trouve jamais sur la surface de la terre; le chrôme est plus rare encore. Il paraît donc par ces rapprochemens que les aërolithes ont une origine étrangère à notre globe, ou du moins qu'ils ne sont pas le produit des phénomènes qu'on y a jusqu'à présent observés.

81. Ces masses solides sont amenées sur la terre par des météores que l'on nomme *bolides*, ou *globes de feu*. Ce sont, en effet, des globes enflammés qui paraissent tout-à-coup dans l'atmosphère, et s'y meuvent avec une extrême rapidité. Leur vîtesse y est quelquefois égale à celle du soleil dans son orbite (*). Ils se meuvent dans une direction inclinée à l'horizon. Après avoir brillé d'un éclat très-vif pendant quelques instans, ils éclatent avec un très-grand bruit, souvent à une très-grande hauteur, et jusqu'à dix lieues au-dessus de la surface de la terre. On s'est assuré de ce fait en évaluant leur parallaxe d'une manière approchée, d'après les observations faites simultanément, par exemple, à l'instant de leur explosion, dans les lieux où on les avait aperçus. Du reste, ils ne paraissent affecter aucune direction déterminée par rapport au mouvement de la terre. Les uns vont d'orient en occident, d'autres d'occident en orient, du nord au sud, ou du sud au nord.

82. On ignore encore la véritable origine de ces masses; et l'on a imaginé diverses hypothèses pour l'expliquer. L'auteur de la *Mécanique Céleste* a pensé qu'elles pouvaient être jetées sur la terre par les volcans lunaires. En soumettant cette idée au calcul, on a trouvé qu'il suffisait pour cela d'une force de projection quadruple de celle d'un

(*) Voyez l'ouvrage de M. Chladny, intitulé *Réflexions sur l'origine de diverses masses de fer natif*, traduit de l'allemand par Eugène Coquebert. (*Journal des Mines*, n°. 88 et 90.)

boulet de calibre lancé avec douze livres de poudre. Cette force n'ayant aucune résistance d'atmosphère à vaincre, suffirait pour détacher un corps de la lune, et la pesanteur terrestre l'amenerait ensuite vers notre globe. Or, il ne paraît pas du tout improbable que les volcans lunaires puissent imprimer à un corps une pareille impulsion, puisque les volcans terrestres ont une force de projection beaucoup plus grande, quoique l'intensité plus grande de la pesanteur à la surface de notre globe, et sur-tout l'énorme résistance que présente notre atmosphère, s'opposent à ce qu'ils produisent les mêmes effets. Cette hypothèse, en donnant aux aërolithes une origine commune, a encore l'avantage d'expliquer l'identité de leur composition. D'autres physiciens pensent que les *aërolithes* ne sont autre chose que de petites planètes, ou des fragmens de planètes, qui circulent dans l'espace à la manière des autres corps célestes, et qui, se trouvant engagés dans l'atmosphère de la terre, s'y enflamment par le frottement qu'ils éprouvent, y perdent peu-à-peu leur vîtesse, et tombent enfin vers la terre par l'effet de leur pesanteur. Dans cette idée, les météores, que l'on nomme étoiles tombantes ou filantes, ne seraient que des corps de ce genre, qui entreraient dans notre atmosphère à de grandes hauteurs, mais avec une vîtesse suffisante pour la traverser, en sorte qu'ils ne feraient que s'enflammer en passant. Cette idée s'accorde assez bien avec la découverte récente des quatre petites planètes; mais elle n'explique pas l'identité de composition des aërolithes. Sans doute le tems nous éclairera sur cet objet, maintenant sur-tout que le préjugé scientifique qui existait contre ce phénomène n'empêchera plus de multiplier les observations : c'est pourquoi j'ai cru devoir en parler ici; car jusqu'à présent ces corps paraissent avoir une origine appartenant à l'astronomie.

CHAPITRE X.

Preuves des Mouvemens réels de la Terre.

83. Nous voici presque parvenus au terme des observations astronomiques : nous avons étudié les propriétés de l'atmosphère, calculé sa hauteur, rectifié les apparences qu'elle produit. Après nous être ainsi dégagés des illusions de nos sens, nous sommes entrés dans l'immensité de la sphère céleste : nous avons vu les étoiles placées dans un éloignement sans bornes, et notre système planétaire comme un point. Renfermés dans ce petit coin de l'univers, nous avons créé des instrumens qui nous ont permis de suivre et de mesurer avec exactitude les mouvemens des corps qui le composent. Nous sommes parvenus à les calculer, à les prévoir. Par une suite d'observations et d'inductions bien ménagées, nous avons acquis des connaissances précises sur la forme de ces corps et sur leur constitution physique, fort analogue à celle de la terre. Munis de cette multitude de faits, il ne nous reste plus qu'à les rapprocher les uns des autres pour développer leurs rapports. Nous avons étudié le système solaire dans ses diverses parties, contemplons-le maintenant dans son ensemble ; et, guidés par les analogies que les observations nous ont fait connaître, passons des apparences aux réalités.

84. La première question qu'il nous faut décider, c'est celle du mouvement de la terre ; il faut savoir si réellement le soleil et la sphère céleste tournent autour d'elle, ou si c'est elle qui tourne sur son axe et autour du soleil.

Pour fixer nos idées par une image sensible, traçons en petit la disposition du système solaire; *voyez* pl. 5; et sur cette feuille, qui nous représentera l'immensité du ciel, distribuons les corps célestes conformément aux observations.

D'abord, puisqu'il est sans aucun doute que notre terre en fait partie, nous prendrons à volonté un point pour la désigner, en le marquant du caractère ♁, qui servira à le reconnaître.

Et comme il est également certain que la terre est à une certaine distance du soleil, nous prendrons aussi à volonté un autre point pour représenter cet astre, en le désignant par le caractère ☉.

Maintenant, comment placerons-nous Mercure, pour que son mouvement soit conforme aux observations. Nous avons vu que son orbite embrasse le soleil et n'embrasse pas la terre; il faut donc la représenter par une petite ellipse qui passera entre la terre et le soleil, et qui aura un de ses foyers au centre de cet astre; nous la désignerons par le signe ☿.

Vénus, qui présente les mêmes apparences, se placera de la même manière dans une ellipse un peu plus grande, que nous désignerons par ♀.

Passons à Mars : son orbite embrasse la terre et le soleil; il faut donc le représenter par une ellipse ayant son foyer au centre de cet astre, et passant au-delà de la terre; nous la désignerons par ♂.

On placera de même les autres planètes supérieures : Cérès, Pallas, Junon, Vesta; Jupiter, Saturne et Uranus, chacune à leur distance du soleil. Quant aux satellites, un très-petit cercle décrit autour de la terre représentera l'orbe de la lune; et d'autres cercles semblables décrits autour de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, appartiendront aux

satellites de ces planètes ; enfin, des paraboles très-alongées, ayant leurs foyers au centre du soleil, seront les orbites des comètes.

Au-delà de tous ces corps, seront les étoiles fixes à une distance immense, et dans un ordre qui nous est inconnu.

Tel est l'état du système solaire, comme on le connaît aujourd'hui ; il résulte incontestablement, des observations, que la lune tourne autour de la terre, et que toutes les planètes, avec leurs satellites, et les comètes, se meuvent autour du soleil.

Restent maintenant trois attributions à partager entre le soleil, la terre et la sphère céleste : 1° le repos, qui semble appartenir à la terre ; 2° le mouvement annuel, qui semble appartenir au soleil ; 3° le mouvement diurne, qui paraît commun à la sphère céleste et à tout le reste de l'univers. Rassemblons les motifs qui peuvent servir à nous décider.

85. D'abord, puisque le soleil et toutes les planètes que l'on a pu observer ont un mouvement de rotation autour d'un axe qui passe par leur centre, l'analogie porte à penser que la terre tourne aussi sur elle-même.

Cette analogie est confirmée par l'aplatissement de ses pôles : aplatissement analogue à celui de Jupiter et de Saturne, et qui paraît un effet nécessaire de la force centrifuge.

La rotation de la terre est encore indiquée par l'accroissement de la pesanteur de l'équateur au pôle ; autre effet de la force centrifuge.

Elle l'est par la déviation des corps qui tombent d'une grande hauteur ; car on a observé que ces corps se portent un peu vers l'est, comme ils doivent le faire, si la terre tourne, parce qu'étant élevés au-dessus de sa surface,

leur distance à l'axe de rotation et leur vitesse sont plus grandes. Si l'on suppose la terre immobile, ces phénomènes sont inexplicables.

A ces indications très-puissantes, se joignent d'autres considérations : si l'on suppose la terre en mouvement, les phénomènes du mouvement diurne, ceux de la précession des équinoxes et de la nutation deviennent d'une simplicité extrême ; en supposant la terre immobile, ils sont d'une extrême complication.

La terre est un globe dont le rayon n'a pas sept millions de mètres ; le soleil est incomparablement plus considérable. Si le centre de cet astre coïncidait avec celui de la terre, son volume embrasserait l'orbe de la lune, et s'étendrait une fois au-delà. N'est-il pas infiniment plus simple de supposer à notre petit globe un mouvement de rotation déjà indiqué par tant d'autres phénomènes, que d'imaginer la masse immense du soleil décrivant, chaque jour, autour de nous, une circonférence dont le contour surpasserait deux cent millions de lieues (*) ? Quelle force énorme ne faudrait-il pas pour le contenir et balancer sa force centrifuge ? Mais cela n'est rien encore : il faudrait supposer des mouvemens semblables dans les planètes, dans les comètes, dans les satellites ; mouvemens exactement proportionnels à leur distance, tous parfaitement d'accord et comme concertés. Ce qui est bien plus, il faudrait les étendre à cette multitude d'étoiles dont le ciel est parsemé ; et tous ces corps, dont la distance est si grande, qu'il nous est impossible d'en concevoir l'idée, tourneraient ensemble chaque jour autour d'un point imperceptible, avec une

(*) Dans le tems des équinoxes, le soleil étant dans le plan de l'équateur, le rayon de cette circonférence serait égal à la distance de la terre au soleil, c'est-à-dire à trente-trois millions de lieues.

régularité inconcevable et avec une vitesse qui effraye l'imagination.

S'il est vrai que dans l'étude des phénomènes de la nature les lois les plus simples doivent toujours être préférées ; s'il est vrai qu'il faille suivre les analogies, et se laisser conduire par la chaîne des faits jusqu'aux véritables causes ; enfin, si l'on peut être assuré de la vérité d'un fait, lorsque toutes les preuves y conduisent, s'y concentrent et s'accordent pour lui donner une extrême simplicité, on doit regarder maintenant le mouvement de rotation de la terre comme une des vérités physiques les mieux établies. Nous y rapporterons désormais toutes les apparences des mouvemens diurnes du ciel.

86. Le mouvement annuel de la terre est indiqué par des preuves aussi fortes et non moins multipliées.

D'abord, puisque toutes les planètes, avec leurs satellites et les comètes, circulent autour du soleil, l'analogie porte à penser que la terre tourne aussi autour de cet astre.

Cette analogie est confirmée par les mouvemens des satellites, qui nous montrent que les petits corps du système solaire tournent autour des plus grands.

Elle l'est sur-tout par la troisième loi de Képler, que les carrés des temps des révolutions des planètes autour du soleil sont proportionnels aux cubes de leurs moyennes distances. La terre, supposée en mouvement autour du soleil, se trouve comprise dans cette loi.

En vain alléguerait-on la difficulté d'ébranler une masse comme la terre, et de lui imprimer une vitesse de circulation qui lui fasse décrire près de 7 lieues par seconde de tems sexagésimal, sans que nous puissions nous en apercevoir ; Jupiter, qui est 1000 fois plus gros que la terre, tourne bien aussi autour du soleil ; et pour laisser la terre

immobile, il faudrait le mettre en mouvement autour d'elle, ce qui serait encore d'une plus grande difficulté (*).

Mais nous ne devons pas mesurer à nos moyens les forces de la nature; l'accroissement ou la diminution de la vîtesse des corps célestes ne serait pas une raison décisive, si ces résultats n'étaient accompagnés d'une autre considération beaucoup plus puissante, celle d'une extrême simplicité.

En effet, si la terre circule autour du soleil, les lois de ses mouvemens n'ont rien de particulier, elles sont les mêmes que pour les autres planètes; mais si l'on suppose la terre immobile, il faut que le soleil, dans sa révolution annuelle, entraîne avec lui, sur l'écliptique, toutes les orbites des corps planétaires. Alors toutes les analogies sont détruites, et les mouvemens de ces corps prennent une extrême complication.

Enfin, l'aberration de la lumière offre une preuve sensible du mouvement annuel de la terre, comme la déviation des corps qui tombent en est une de sa rotation: c'est ce que je vais développer.

(*) D'après les résultats rapportés dans le premier livre, la distance moyenne de la terre au soleil est 23578 rayons terrestres, pag. 271; et le rayon moyen de la terre contient 1432l,4, pag. 171. Multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on trouve que le rayon moyen de l'orbe terrestre contient 33773127 lieues: ce qui donne la circonférence de cet orbe égale à 212202815 lieues. Si l'on divise cette circonférence par le nombre de secondes décimales contenues dans l'année sidérale, c'est-à-dire par 36525638, le quotient exprimera le nombre de lieues décrites par la terre sur son orbite dans une seconde décimale de tems; ce sera 5l,8097. En multipliant ce résultat par $\frac{100000}{86400}$, on aura l'arc décrit pendant une seconde de tems sexagésimal; ce sera 6l,724.

CHAPITRE XI.

De l'Aberration de la Lumière.

87. La sensation de la vue paraît être produite par une sorte de pression ou de choc des molécules lumineuses sur la membrane nerveuse qui tapisse le fond de l'œil, et que l'on nomme *la rétine*. La direction suivant laquelle ces molécules viennent frapper le globe de l'œil détermine la ligne droite sur laquelle nous rapportons l'objet dont elles émanent; et si la *série des molécules* qui compose le *rayon lumineux*, a été infléchie dans sa route par une cause quelconque, nous supposons les objets placés sur le prolongement de leur dernière direction; c'est ce qui arrive dans les réfractions atmosphériques.

Concevez maintenant qu'un observateur en repos reçoive des rayons lumineux qui, partant des objets, arrivent à son œil en ligne droite, cet observateur verra les objets sur le prolongement de ces rayons, et à leur véritable place. Mais s'il est lui-même en mouvement, et si sa vitesse est assez grande pour être comparable à celle de la lumière, quoiqu'elle puisse être beaucoup moindre, l'œil, par l'effet de ce mouvement, choquera les molécules lumineuses qui arriveront vers lui; il éprouvera donc à son tour un choc ou une pression composée de la vîtesse de la lumière et de la sienne propre, dirigée en sens contraire. Par l'effet de cette composition, les molécules lumineuses lui sembleront arriver à son œil dans une direction différente de celles qu'elles ont réellement.

Ainsi, lorsqu'une balle de paume est lancée avec beaucoup de vîtesse sur la raquette du joueur, qui la repousse fortement, la direction qu'elle prend après le choc se compose de celle qu'elle avait d'abord reçue, et de celle qui lui a été ensuite imprimée.

Le mouvement de la terre, s'il est réel, doit produire un effet semblable sur la lumière lancée par les astres. L'impression de cette lumière sur nos yeux ne doit pas se faire suivant la direction réelle des rayons lumineux. C'est en effet ce qui arrive ; et ce phénomène se nomme *l'aberration de la lumière*. Cherchons à en prévoir, à en mesurer exactement les diverses circonstances.

Le problème envisagé de la manière la plus générale, consiste en ceci : L'astre et l'observateur étant tous deux en mouvement, suivant des lois quelconques données, déterminer, à chaque instant, l'angle formé par les rayons visuels menés au lieu apparent de l'astre et à son lieu réel.

Pour commencer par le cas le plus simple, supposons d'abord que l'astre est immobile, et que la terre seule est en mouvement. Soit donc, à un instant quelconque, S l'astre, T la terre, *fig.* 12, *pl.* 3, l'un et l'autre étant considérés comme des points. Le rayon visuel ST représente la direction suivant laquelle la lumière de l'astre parvient réellement à la terre. Mais l'observateur ne verra point l'astre sur cette direction ; car étant lui-même en mouvement, suivant la ligne TT', il choque la molécule lumineuse, avec toute sa vîtesse, à l'instant où elle lui parvient ; et comme il se croit lui-même en repos, il attribue cet effet à un mouvement propre de la lumière en sens contraire. De-là résulte, pour l'observateur, une sensation composée de la vîtesse réelle de la molécule, suivant la direction ST, et de celle qu'il lui suppose, suivant la direction Tt, opposée au mouvement de la terre. Cette composition de mou-

vemens produit sur l'œil une impression exactement semblable à celle qu'il auroit éprouvée, s'il eût été immobile et que la molécule lumineuse l'eût choqué suivant la résultante des deux vîtesses. Ainsi, pour obtenir la direction apparente du rayon visuel TS', il faut, selon le principe de la composition des forces, prendre sur le prolongement du rayon réel ST, et à partir du point T une ligne Ts, qui représente la vîtesse propre de la lumière; prendre ensuite sur la direction Tt du mouvement de la terre, et en sens contraire de ce mouvement, une ligne Tt, qui représente sa vîtesse; et enfin, sur les droites Ts, Tt construire le parallélogramme $Rt\,Ts$. La diagonale TS' de ce parallélogramme étant indéfiniment prolongée, indiquera la direction apparente du rayon lumineux, à l'instant où l'observateur le reçoit; et l'angle STS', formé par cette diagonale, avec le rayon visuel réel, sera l'aberration que la lumière éprouve en vertu du mouvement de la terre.

Passons maintenant au cas général où l'observateur et l'astre sont l'un et l'autre en mouvement. *Voyez fig.* 13. Supposons qu'à l'instant où l'observateur reçoit l'impression du rayon lumineux, T soit le lieu de la terre, et S le lieu réel de l'astre. Alors TS sera le rayon visuel réel. Mais la molécule lumineuse qui parviendra dans cet instant à la terre n'aura point été lancée suivant cette direction. Car, à cause de la transmission successive de la lumière, lorsque l'astre se trouve en S, la lumière qu'il émet en ce point ne parvient en T qu'après un certain intervalle de tems. Pour trouver le point S', d'où est parti le rayon lumineux, qui arrive en T à la terre à l'instant où l'astre se trouve en S, il faut reculer un peu en arrière sur son orbite, et y prendre l'arc SS', égal au chemin que fait l'astre pendant le tems que la lumière employerait pour

parcourir la distance $S\,T$ en vertu de son seul mouvement d'émission. En effet, lorsque l'astre se trouve en S', la molécule lumineuse qu'il lance, suivant la direction $S'\,V'$, parallèle à ST, est animée de deux vîtesses : l'une est le mouvement de l'astre, suivant la direction $S'S$; l'autre le mouvement de transmission de la lumière, suivant $S'\,V'$, égal et parallèle à ST. Ces deux vîtesses peuvent être représentées par les lignes droites $S'\,S$ et $S'\,V'$, puisque ces lignes expriment leurs effets dans le même intervalle de temps. Par conséquent, si l'on construit sur ces droites le parallélogramme $S'\,S\,T\,V'$, le mouvement réel et absolu de la molécule lumineuse se fera suivant la direction $S'\,T$, et elle parviendra en T à la terre à l'instant où l'astre sera parvenu en S sur son orbite.

Cette construction suppose que l'arc $S'\,S$ est assez petit pour qu'on puisse le considérer comme rectiligne. Mais dans tous les cas que présente le système du monde, la marche des astres est si lente, comparativement à la vîtesse de la lumière, que la supposition précédente ne peut entraîner aucune erreur.

Si l'on veut effectuer cette composition de vîtesses autour du point T, comme dans le premier cas que nous avons considéré d'abord, il faudra mener par ce point une ligne Ts' parallèle à l'orbite $S'S$ de l'astre, c'est-à-dire à la direction de sa tangente en S', et dirigée dans le sens de son mouvement propre. Sur ce prolongement on prendra une ligne droite Ts' pour représenter la vîtesse de l'astre en S' ; on prolongera de même la direction ST du rayon visuel, mené au lieu réel de l'astre ; et sur ce prolongement on prendra une ligne Ts pour représenter la vîtesse de transmission de la lumière. On construira sur ces droites le parallélogramme $r\,s\,T\,s'$, et sa diagonale $r'T$ prolongée donnera la direction réelle du rayon lumineux,

qui parvient en T à la terre au moment où l'astre se trouve en S.

Maintenant la molécule lumineuse venue en T, suivant la direction $S'T$, est choquée par l'observateur avec toute la vîtesse du mouvement de la terre ; et cette sensation composée fait que l'observateur ne voit pas l'astre en S', sur la direction réelle du rayon lumineux, mais en avant de cette direction, et par exemple en S''. Il est évident que ce cas rentre dans celui que nous avons examiné d'abord relativement aux astres fixes. Pour trouver la direction du rayon apparent TS'', il faut composer la résultante Tr, qui indique la direction réelle du rayon lumineux, avec la vîtesse t T de la terre prise en sens contraire ; ou, ce qui revient au même, il faut en définitif composer ensemble autour du point T les trois vîtesses Ts, Ts', Tt, de la lumière, de l'astre et de la terre ; les deux premières étant prises dans leur direction naturelle, la troisième dans une direction opposée. La résultante de ces trois vîtesses exprimera la direction TR du rayon apparent ; et l'angle STS'' formé par ce rayon avec la ligne TS, menée au même instant de l'œil de l'observateur au lieu réel de l'astre, sera l'aberration que la lumière éprouve.

Cherchons maintenant à réunir tous les élémens de ce calcul, et comparons ensuite les résultats avec l'aberration.

Il est prouvé par les éclipses des satellites de Jupiter que la lumière emploie $571''$ de tems décimal pour parcourir le rayon moyen de l'orbe terrestre ; ce serait $8'.13''$ en tems sexagésimal. Pour plus de simplicité, nous supposerons d'abord cet orbe circulaire, et nous ferons abstraction des inégalités du mouvement annuel. Dans l'hypothèse que nous examinons ici, nous devons attribuer ce mouvement à la terre ; or, en $571''$ de tems elle décrira sur son orbite un

petit arc égal à $\frac{400^{\circ}\ 57'}{365,25638}$ ou $62'',5$, à raison de 400° pour une révolution sidérale. La vîtesse de la terre est donc à celle de la lumière comme ce petit arc est au rayon, puisque l'un et l'autre sont parcourus dans le même tems, c'est-à-dire comme $62'',5$ est à $636619'',77$, valeur du rayon convertie en secondes décimales.

Ainsi, en supposant la direction primitive de la lumière perpendiculaire au rayon terrestre, comme elle le serait, par exemple, si l'étoile était située au pôle de l'écliptique et à une distance infinie, la direction du rayon dévié sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont un des côtés, dirigé perpendiculairement à l'écliptique, aura pour longueur 636619,77; et l'autre situé dans ce plan sera exprimé par 62,5, de sorte que l'angle d'aberration aura pour tangente trigonométrique $\frac{62'',5}{636619'',77}$; et comme le dénominateur est le rayon réduit en secondes, on voit que la valeur de l'angle lui-même sera encore $62'',5$. C'est la plus grande qu'il puisse avoir. Un calcul semblable établi sur le principe de la composition des forces, suffit pour déterminer la quantité de l'aberration dans tous les autres cas.

A mesure que la terre parcourt son orbite en tournant autour du soleil, et changeant sans cesse de direction, elle doit toujours chasser devant elle le rayon lumineux, qui change ainsi continuellement de direction avec elle. Il en résulte donc que nous ne voyons jamais les astres à leur véritable place; que par l'effet de cette illusion leur lieu apparent doit osciller autour de leur lieu vrai, et que la période de ces oscillations doit être exactement d'une année.

Le mouvement de rotation de la terre doit produire

des effets analogues; mais ce mouvement étant soixante fois plus faible, à l'équateur même, que celui de révolution autour du soleil, l'effet qui en résulte est d'être beaucoup moins sensible, et par conséquent nous pouvons nous dispenser d'y avoir égard dans ces premières considérations.

88. Voilà des phénomènes très-remarquables, qui sont des conséquences nécessaires du mouvement annuel de la terre; voyons si les observations les confirment.

Elles s'y accordent très-exactement. Toutes les étoiles semblent en effet décrire annuellement, dans le ciel, de petites ellipses dont les dimensions sont précisément celles qui résultent de la théorie précédente.

Pour vérifier ce fait, il faut observer chaque mois la déclinaison d'une étoile et son ascension droite, et en soustraire les changemens qui sont dus à la précession et à la nutation. Si l'étoile n'a pas de mouvement propre, soit réel, soit apparent, on doit, après ces corrections, la retrouver constamment à la même place; or, c'est ce qui n'arrive jamais.

Voici, par exemple, les variations en déclinaison et en ascension droite de trois étoiles très-brillantes, *Régulus*, *la Chèvre* et *la Lyre*, observées à Paris, de mois en mois, pendant une année. Le signe + indique un accroissement; le signe — une diminution.

LONGITUDE DU SOLEIL.	CHANGEMENT DE L'ASCENSION DROITE.			CHANGEMENT DE LA DÉCLINAISON.		
	RÉGULUS	LA CHÈV.	LA LYRE	RÉGULUS	LA CHÈV.	LA LYRE
(*) Equinoxe du printemps, ou.. s.	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0
1 s.	— 23 ,1	— 40 ,1	+40 ,4	+ 8 ,3	— 8 ,6	+ 4 ,9
2 s.	— 53 ,0	— 63 ,9	+72 ,5	+19 ,1	—20 ,7	+ 22 ,8
Solstice d'été.... 3 s.	— 82 ,2	— 64 ,8	+87 ,0	+29 ,6	—33 ,3	+ 49 ,0
4 s.	—103 ,0	— 43 ,2	+81 ,5	+36 ,7	—42 ,6	+ 76 ,8
5 s.	—109 ,6	— 4 ,0	+56 ,2	+38 ,9	—46 ,6	+ 98 ,4
Equin. d'automne 6 s.	—100 ,0	+ 41 ,7	+18 ,5	+35 ,2	—43 ,8	+108 ,0
7 s.	— 76 ,8	+ 81 ,1	—21 ,9	+26 ,8	—35 ,2	+103 ,0
8 s.	— 46 ,9	+105 ,2	—54 ,0	+16 ,0	—23 ,1	+ 85 ,2
Solstice d'hiver. 9 s.	— 17 ,6	+106 ,2	—68 ,5	+ 5 ,6	—10 ,5	+ 59 ,0
10 s.	+ 3 ,1	+ 84 ,2	—62 ,9	— 1 ,5	— 1 ,2	+ 31 ,1
11 s.	+ 9 ,6	+ 45 ,4	—37 ,6	— 3 ,7	+ 2 ,8	+ 9 ,6
12 s.	0 ,0	0 ,0	0 ,0	0 ,0	0 ,0	0 ,0

(*) Cet équinoxe est pris pour point du départ; et les accroissemens de la déclinaison et de l'ascension droite de l'astre sont comptés à partir des valeurs qu'elles avaient alors.

Chaque observation, représentée par les nombres de ce tableau, est un milieu entre celles de plusieurs jours consécutifs. J'ai choisi des étoiles, comme la Chèvre et la Lyre, qui passent au méridien près du zénith de Paris, afin que l'irrégularité des réfractions ne puisse pas être regardée comme une cause possible des changemens dans les déclinaisons. Quant aux variations de l'ascension droite, elles sont déterminées d'après les passages des étoiles au méridien; et pour qu'on ne puisse pas en attribuer les changemens à des erreurs d'observation, j'ai choisi des étoiles où ces variations sont en sens contraire; en sorte qu'il est absolument impossible de les révoquer en doute.

89. Pour rendre leur marche plus sensible et plus facile à saisir, construisons la courbe qu'elles représentent. Ces variations étant très-faibles, la courbe ne peut avoir qu'une petite étendue; on peut donc la projeter sur la concavité du ciel, comme sur une surface plane. Alors chaque position de l'étoile se trouvera rapportée à deux coordonnées rectangulaires ayant pour origine la position apparente de l'étoile à l'instant de l'équinoxe que nous avons pris pour point de départ. L'une de ces coordonnées sera le changement de déclinaison depuis cet instant; l'autre sera la différence d'ascension droite, reportée à la hauteur de l'origine des coordonnées, c'est-à-dire multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'étoile (*). C'est ainsi que nous en avons agi pour calculer la petite ellipse de nutation.

(*) Voici quelles étaient, en 1800, les déclinaisons moyennes des trois étoiles que nous avons prises pour exemple :

Régulus.....	14°,3772
La Chèvre.....	50°,8630
La Lyre.....	42° 8957

Cette construction donne les figures 14, 15, 16. Ce sont des ellipses plus ou moins aplaties, et dont les inclinaisons sont différentes. Celle de la Lyre ressemble presque à un cercle ; celle de la Chèvre est très-sensiblement aplatie, et celle de Régulus est presque une ligne droite. Mais la longueur de leur grand axe est toujours la même et égale à 125″.

En comparant ces résultats avec les latitudes des étoiles, on voit que l'aplatissement de l'ellipse augmente à mesure que l'étoile est plus près du plan de l'écliptique.

En effet, la Lyre a pour latitude, en 1800. . 68°,6062
la Chèvre. . . . . 25°,4025
Régulus . . . . . 0°,5092

la première est donc fort élevée au-dessus du plan de l'écliptique ; la dernière est presque comprise dans ce plan.

90. Ces résultats sont parfaitement d'accord avec la théorie déduite du mouvement de la terre. En effet, dans cette hypothèse, soit T', T'', T''', l'ellipse décrite annuellement par la terre autour du soleil représenté par S, *fig.* 17. Désignons par E le lieu vrai d'une étoile placée à une hauteur quelconque au-dessus du plan de l'écliptique, qui est ici celui de la figure. Les rayons lumineux ET', ET'', ET''', venus de cette étoile à divers points T' T'' T''' de l'orbe terrestre, pourront être supposés parallèles entr'eux ; car cet orbe vu de l'étoile soutendrait un si petit angle, qu'on peut le regarder comme un point. Cela posé, quand la terre est en T', quelle est la position du rayon apparent ? Pour l'obtenir, il faut d'abord, comme nous l'avons déjà expliqué, prendre sur la direction réelle du rayon une ligne droite $T'e$ qui représente la vîtesse propre de la lumière ; puis du point e, parallèlement à la direction $T''t'$ du mouvement de la terre, il faut mener une

ligne ee' qui en représente la vitesse ; et la diagonale Te' sera la direction apparente du rayon lumineux. Si l'on répète la même construction quand la terre se trouve en T'' ou en T''' sur son orbite, la longueur et la direction des lignes $T''e$, $T'''e$, qui représentent la vitesse de la lumière, seront les mêmes que tout-à-l'heure ; mais la direction et la grandeur des lignes $e\,e'$, $e\,e''$, qui représentent les vitesses de la terre, changeront, puisque la direction et la vitesse du mouvement de la terre varient dans les différens points de l'orbe terrestre. Seulement ces droites resteront toujours parallèles à l'écliptique, parce que la direction du mouvement de la terre est toujours comprise dans ce plan. Les rayons apparens formeront ainsi autour du rayon réel $T'E$, $T''E$, $T'''E$, une surface conique qui aura ce rayon pour axe, et dont la base, parallèle à l'écliptique, sera une courbe plane, ovale, dont les rayons vecteurs seront les vitesses de la terre dans son orbite. Si l'on se borne à la première puissance de l'excentricité de l'orbe terrestre, ce qui suffit toujours pour le calcul de l'aberration, la courbe des vitesses, construite de cette manière, est une ellipse semblable à celle que la terre décrit ; mais elle est située à angles droits sur cette dernière. Elle a pour foyer le lieu moyen de l'étoile ; et son sommet le plus rapproché du foyer, ou ce qu'on pourrait appeler son périastre, étant vu du lieu moyen de l'étoile, a sa longitude égale à celle de l'aphélie de l'orbe terrestre augmentée d'un angle droit. Cette même ellipse sert évidemment de base à tous les cônes de rayons visuels apparens, quelle que soit la position de l'étoile à laquelle ils appartiennent ; mais la section de ces cônes perpendiculairement à leur axe, section qui représente l'orbite apparente de l'étoile vue de la terre, varie avec leur obliquité sur l'écliptique. Si l'on se borne à la première puissance de l'excentricité de l'orbe terrestre,

cette intersection est encore une ellipse dont le grand axe est parallèle au plan de l'écliptique et constant pour toutes les étoiles. L'angle visuel qu'il soutend sur la sphère céleste est égal à $125''$, c'est-à-dire double de la plus grande valeur de l'aberration. Le petit axe de l'ellipse est au grand comme le sinus de la latitude de l'étoile est au rayon. Elle paraît sur le grand axe de son ellipse quand l'axe du cône devient perpendiculaire à la direction de la vitesse de la terre. Elle paraît sur son petit axe, lorsque l'axe du cône fait le plus petit angle possible avec cette vitesse; ce qui arrive quand la direction du mouvement de la terre devient parallèle au cercle de latitude mené par l'étoile. Si l'on fait abstraction de l'excentricité de l'orbe terrestre, la direction de la vitesse de la terre est toujours perpendiculaire au rayon vecteur mené de la terre au soleil. Alors l'étoile se trouve sur le grand axe de son ellipse quand elle est en opposition ou en conjonction avec le soleil; et elle paraît sur le petit axe dans les quadratures, quand sa longitude diffère de celle du soleil de 100°. En général, sa position apparente pour un instant quelconque peut être facilement assignée, d'après la théorie précédente, et le résultat se trouve constamment conforme aux observations.

Nous avons déja remarqué plusieurs fois que, lorsqu'une loi simple, et susceptible d'être exprimée par un énoncé mathématique, satisfait à un grand nombre d'observations indépendantes les unes des autres, en ne présentant que des écarts très-petits et irréguliers, cette loi peut être regardée comme plus exacte que les observations mêmes, et doit être employée à les corriger. Le phénomène de l'aberration est dans ce cas. Puisqu'il accorde si bien toutes les observations des étoiles, nous ne pouvons douter de son existence. Alors, en le regardant comme démontré, il faut conclure sa mesure exacte des observations, non

pas d'une seule, mais d'un très-grand nombre, afin que les erreurs qu'elles comportent se compensent et s'affaiblissent dans le résultat moyen.

Pour parvenir à ce but, il faut partir du fait de l'aberration, et de sa cause maintenant connue. Puis, sur ces données, il faut établir les formules qui expriment les mouvemens apparens d'une étoile quelconque dont la position est donnée. On trouvera dans une note placée à la fin de ce chapitre le calcul de ces formules, fondé sur le seul principe de la composition des forces.

Mais on n'a encore ainsi que la loi de ces variations; il reste à déterminer leur valeur absolue et numérique. Car quoiqu'on puisse bien, ainsi que nous l'avons fait d'abord, la conclure de la vitesse de la terre comparée à celle de la lumière, telle que la donnent les éclipses des satellites de Jupiter, toutefois comme cela suppose les mouvemens de ces astres parfaitement connus, on pourrait conserver quelque doute sur l'exactitude des résultats obtenus de cette manière. Voyons donc à déduire, des seules observations d'étoiles, la quantité absolue de l'aberration.

Pour cela on renverse le problème. On suppose que les changemens des lieux apparens de plusieurs étoiles en déclinaison et en ascension droite aient été exactement observés. On égale ces résultats aux expressions algébriques qui les représentent, suivant la théorie; alors la quantité absolue de l'aberration est seule inconnue, et chaque équation de ce genre suffit pour la déterminer. Mais pour éluder les petites erreurs que les observations comportent, on forme un grand nombre d'équations de ce genre, plusieurs milliers par exemple, et on prend le milieu entre tous les résultats. On sent aussi que pour plus d'exactitude les changemens observés doivent être les plus grands possibles parmi ceux que chaque étoile éprouve.

Telle fut la marche que suivit le célèbre astronome Bradley, auquel on doit la découverte des deux phénomènes de la nutation et de l'aberration. Dans le mémoire où il expose cette dernière, il rapporte qu'il observa pendant long-temps les distances zénithales d'un grand nombre d'étoiles, avec un mural de 12 pieds; qu'ensuite il dépouilla ces distances des changemens que la précession y produit; la nutation n'était pas encore trouvée alors, et ses variations sont peu considérables dans l'intervalle d'une année. Ces corrections faites, il trouva que les plus grandes variations annuelles en déclinaison étaient

pour	γ du Dragon.	39″ sexagésimales
	η de la Grande Ourse . .	36″
	α de la Cassiopée.	34″
	α de Persée.	23″
	τ de Persée	25″
	β du Dragon.	39″
	la 35e de la Giraffe. . . .	19″
	la Chèvre.	16″

Et en égalant ces résultats à leur expression analytique, il en tira, pour le grand axe de l'ellipse d'aberration, les valeurs suivantes :

γ du Dragon.	40″,4
η de la Grande Ourse . .	40 ,4
α de la Cassiopée.	40 ,3
α de Persée.	40 ,2
τ de Persée.	41 ,0
β du Dragon.	40 ,2
35e de la Giraffe.	40 ,2
la Chèvre.	40 ,0
moyenne.	40″,4

Ce qui, converti en secondes décimales, donne 124″,65 au

lieu de 125″ que nous avons adopté. En combinant ainsi plusieurs milliers d'observations de M. Maskeline, et tenant compte du changement annuel de la nutation, M. Delambre a trouvé 40″,492 sexagésimales, ou, en secondes décimales, 124″,976, et il a obtenu un résultat exactement semblable par la discussion approfondie d'un très-grand nombre d'éclipses des satellites de Jupiter.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que l'aberration de la lumière produite par la vitesse de translation de la terre dans son orbite. S'il est vrai, comme toutes les probabilités semblent l'indiquer, que le mouvement diurne du ciel ne soit pareillement qu'une apparence causée par la rotation réelle de la terre en sens contraire, cette rotation doit aussi produire une aberration proportionnée à sa vitesse, par conséquent beaucoup plus faible que la première, mais qu'il faut cependant soumettre au calcul, ne fût-ce que pour s'assurer qu'elle est insensible. On y parvient par le même principe de la composition des forces, et l'on obtient ainsi l'expression de l'effet qui en résulte sur l'ascension droite des astres et sur leur déclinaison. Mais ces effets sont si petits qu'ils se confondent jusqu'à présent avec les erreurs des observations.

Si de la terre nous passons aux autres corps célestes qui composent notre système planétaire, on conçoit que les mouvemens propres dont ces corps sont animés doivent s'imprimer aussi à la lumière qu'ils nous envoient, et il en doit résulter encore une autre espèce d'aberration. Ces effets, et tous ceux du même genre que l'on pourrait imaginer, se calculent toujours de la même manière. On considère tous les mouvemens de l'observateur et de l'astre comme autant de forces qui agissent sur les molécules lumineuses; et d'après le principe de la composition des forces on cherche la direction de leur résultante, sur

laquelle l'observateur rapporte toujours le rayon lumineux lorsqu'il le reçoit. Nous avons déjà expliqué plus haut le principe général de cette composition de vitesse.

Enfin, si le système solaire est aussi en mouvement dans l'espace, en vertu d'une impulsion primitive, commune à tous les corps de ce système, ce que la rotation de la plupart d'entr'eux indique avec beaucoup de vraisemblance, la vitesse de ce mouvement de translation, combinée avec les précédentes et avec la vitesse propre de la lumière, produira encore une autre sorte d'aberration. Mais le déplacement du système planétaire, quoique très-probable, n'est pas encore sensible dans les observations modernes, les seules qui par leur exactitude puissent servir pour calculer sa direction et sa vitesse. Ainsi, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à déterminer ces deux élémens, l'aberration inégale que ce mouvement doit produire sur les différentes étoiles, à raison de leurs positions différentes, se confondra avec leurs mouvemens propres, sans que l'on puisse les en séparer.

On trouvera dans les notes jointes à ce chapitre les formules relatives à ces divers genres d'aberration.

91. Dans tout ceci, nous n'avons considéré que les vîtesses imprimées à la lumière par les mouvemens des corps célestes auxquels elle participe; mais l'expérience prouve que tous les corps transparens que la lumière traverse modifient sa vîtesse par leur action. Ainsi l'atmosphère qui nous environne augmente la vîtesse des molécules lumineuses qui nous viennent des astres à travers le vide des cieux. Cette vîtesse change encore et dans des proportions très-notables, en traversant les verres de nos lunettes astronomiques et les humeurs de nos yeux. Parmi toutes ces variations de la vîtesse, quelle valeur faut-il choisir pour la composer avec le mouvement de la terre? L'aberration

astronomique peut-elle être changée à volonté par toutes ces causes, ou en est-elle indépendante ? Ce sont des questions qui, par leur application continuelle et par les conséquences qu'elles entraînent, méritent d'être sérieusement examinées.

Pour ne pas trop compliquer le problème, faisons abstraction de l'atmosphère dont l'action sur la lumière est très-faible. Je prouverai plus loin que cette action, quelle que fût son intensité, ne pourrait influer en rien sur l'aberration.

Presque toutes les observations astronomiques consistent à déterminer l'instant où le centre des astres est caché par des fils mobiles avec la terre, mais dont la position est connue sur sa surface. Tels sont les fils de nos micromètres. Examinons d'abord comment se font ces occultations, en ayant égard aux mouvemens simultanés de la lumière et de la terre ; et pour ne rien mêler d'étranger à ces considérations, faisons abstraction des verres dont nos lunettes sont armées. Admettons, en un mot, que l'observation se fasse à l'œil nu.

Je suppose donc que l'observateur regarde l'astre à travers un tube dont l'axe soit déterminé par des fils très-fins placés en croix à ses deux extrémités : puis je demande quelle est la direction réelle de cet axe dans l'espace, lorsque l'étoile se trouve occultée derrière les intersections des fils ?

Je dis que cette direction est justement celle de la résultante des deux vîtesses de la terre et de la lumière dans l'espace. En effet, soit S l'astre, *fig.* 18, ST, ST' la direction réelle de ses rayons lumineux, TF la longueur du tube à travers lequel se fait la vision. Si l'observateur, qui se trouve en T, dirige le tube suivant la résultante des vîtesses de la terre et de la lumière dans l'espace, les lignes TT', $T'F$, se trouveront proportionnelles à ces vîtesses. Par conséquent, s'il

n'y a pas d'obstacle dans l'intérieur du tube, la molécule lumineuse qui entre en F suivant la direction SF, le parcourra librement à mesure qu'il s'avance parallèlement à lui-même; et ainsi cette molécule arrivera en T' au même [illegible] que la terre. Réciproquement si la molécule lumineuse parcourt librement l'axe du tube, il faut en conclure que cet axe est dirigé parallèlement à la résultante des deux vitesses, car cette position est la seule dans laquelle la molécule puisse parcourir le tube sans rencontrer ses parois. Or, ce cas est toujours celui qui a lieu quand on voit l'astre sur les intersections des fils placés aux deux extrémités du tube. La molécule lumineuse qui se trouve alors interceptée est la même qui serait parvenue en T' à l'observateur, suivant la direction ST'; et comme toutes celles qui la précèdent parviennent à son œil, c'est au point T', et seulement en ce point, qu'il observe l'interruption du rayon lumineux.

Si nous comparons, dans ces circonstances, le mouvement apparent de la molécule lumineuse, venue de l'astre, avec celui des molécules lumineuses venues des fils qui déterminent l'axe optique du tube, nous trouverons que ces deux mouvemens sont absolument les mêmes. Car, au moment où la lumière de l'astre arrive en F à l'entrée du tube, suivant la direction SF, avec la vitesse FT', si l'on conçoit qu'à ce même instant le fil placé en F lance une molécule lumineuse de même vitesse, suivant la même direction, ces deux molécules iront nécessairement ensemble de F en T', et arriveront en même tems à l'observateur, suivant la même direction.

Si l'on ne voulait considérer que le mouvement relatif de ces deux particules par rapport à l'observateur, il n'y aurait qu'à décomposer leur vitesse propre SF en deux autres tF et $S'F$, dont la première tF fût parallèle et égale

au mouvement de la terre. Alors l'autre vîtesse $S'F$ exprimerait leur direction et leur vîtesse apparente, car l'observateur fait toujours abstraction du mouvement qui lui est commun avec les corps qu'il observe. Ainsi les deux molécules parcourraient encore la longueur du tube ensemble et se quitter, comme précédemment.

Supposons maintenant qu'une cause quelconque, agissant sur elles, suivant la direction de la composante $S'F'$, vînt à accélérer leur vîtesse apparente, il est clair qu'il n'en résulterait aucun changement dans leur direction relativement à l'axe mobile du tube : seulement elles arriveraient à l'observateur un peu plutôt qu'elles n'auraient fait sans cette circonstance. Ainsi, lorsqu'une balle de fusil est dirigée avec justesse par un tireur adroit, elle atteint toujours le but, quelle que soit la force de la charge et celle de la poudre dont il fait usage. Seulement, selon qu'elle est plus forte ou plus faible, la balle atteint le but plutôt ou plus tard.

Tel est précisément l'effet que produisent sur les rayons apparens les objectifs de nos lunettes, et en général tous les milieux réfringens dont on pourrait supposer la lunette remplie. Les surfaces extrêmes de ces milieux étant perpendiculaires à l'axe optique de la lunette, par conséquent à la direction du rayon apparent, ils ne font qu'accélérer sa vîtesse, mais ils ne changent nullement sa direction relativement à l'observateur. Par exemple, dans nos lunettes astronomiques ordinaires, où les fils du micromètre sont placés au foyer de l'objectif, la marche de la molécule lumineuse venue de l'astre s'accélère d'abord en traversant l'objectif ; puis, à sa sortie, elle reprend la vîtesse qu'elle avait primitivement dans l'air. Elle éprouve un accroissement semblable en traversant l'oculaire, et elle reprend de même sa vîtesse primitive quand elle en est sortie ;

mais, dans tout ce trajet, et parmi les variations de vîtesse qu'elle éprouve, sa direction apparente ne change point : elle reste constamment la même que celle des molécules lumineuses qui émanent du fil du micromètre, avec la même vîtesse, soit absolue, soit relative, et avec la même [illegible]. En un mot, une fois que l'on a décomposé la vîtesse propre de la lumière en deux directions, dont l'une est égale et parallèle à la vîtesse de la terre, la molécule lumineuse devient un objet terrestre ; seulement sa vîtesse apparente n'est pas celle de la lumière ordinaire, elle est représentée par $S' F$, *fig.* 18.

On voit donc que les accroissemens de vîtesses imprimés aux molécules lumineuses par les instrumens optiques, parallèlement à leur direction apparente, ne font qu'accélérer un peu l'instant où elles nous parviennent. Mais comme la vîtesse de la lumière est extrêmement considérable, le tems absolu qu'elle met à traverser ces instrumens est tout-à-fait insensible pour nos organes, et aussi l'accélération qui en résulte dans leur arrivée, depuis la surface extérieure de l'objectif jusqu'à notre œil, est également insensible pour nous. Quand on formerait des objectifs avec les matières les plus réfringentes que l'on connaisse, quand on remplirait le tube de la lunette avec de l'eau, comme l'avait proposé Boscovich ; quand même on pourrait faire ce tube de diamant, qui est, de toutes les substances connues, celle qui accelère le plus la vîtesse de la lumière, l'accélération qui en résulterait sur une si petite longueur ne ferait pas voir la molécule lumineuse un cent millième de seconde plutôt, et par conséquent elle ne changerait pas d'un cent millième de seconde l'instant où l'astre devrait se trouver réellement sur la direction apparente que nous venons de déterminer.

Mais si l'on observait la molécule lumineuse venue de

l'astre à travers des milieux dont l'action réfringente ne fût pas parallèle à sa direction apparente ; par exemple, à travers des prismes qui dévieraient le rayon lumineux, on devrait s'apercevoir de cette petite différence de vitesse qui distingue la direction apparente de celle que suit naturellement la lumière en vertu de son seul mouvement d'émission ; car la déviation produite par l'action de ces corps différerait de celle qu'ils feraient éprouver à un rayon de lumière émis naturellement par un corps terrestre suivant cette même direction. En observant avec exactitude cette différence de déviation, on peut en conclure par le calcul la différence des vitesses et leurs rapports. Alors, dans le parallélogramme $S\,t\,F\,S'$, on connaîtra le rapport du côté $S\,F$, qui exprime la vitesse propre de la lumière de l'astre, au côté $S'\,F$ qui exprime sa vitesse apparente. On connaît de plus l'angle $S'\,S\,F$, formé par la direction du mouvement de la terre avec le rayon réel de l'astre à l'instant de l'observation. Avec ces données on peut calculer l'angle d'aberration $S\,F\,S'$, et le rapport des côtés SF et $S\,S'$, qui représentent les vitesses propres de la lumière et de la terre. En répétant l'expérience sur des étoiles différentes, on saura si la vitesse propre de la lumière est la même pour toutes, ou si elle est différente. On pourra même espérer de rendre sensibles les petites différences de vitesse que le mouvement de la terre éprouve dans les diverses époques de l'année, en vertu de l'ellipticité de son orbite. Cette méthode qui détermine l'aberration par des observations faites avec le prisme, paraît d'autant plus exacte, qu'en accroissant l'angle réfringent du prisme, on augmente la déviation qu'il produit, de manière à la rendre beaucoup plus considérable que la valeur naturelle de l'angle d'aberration qui s'observe directement. C'est ce moyen que M. Arago a employé, sur l'in-

vitation de M. Laplace; mais, ce qu'on était loin de prévoir, il a trouvé que toutes les lumières, soit terrestres, soit célestes, directes ou réfléchies, éprouvent absolument la même déviation, quelle que soit la direction dans laquelle elles sont lancées (*). On pourrait croire que cette anomalie [illegible] à la difficulté d'observer exactement le centre de l'image réfractée, parce que dans ces expériences l'action des prismes décompose toujours la lumière et dilate l'image du point lumineux sous la forme d'un spectre oblong et coloré. Mais cette cause d'erreur n'existe point dans les expériences de M. Arago, parce qu'il s'est servi d'un prisme achromatique, composé de flint-glass et de crown-glass, dans des proportions telles qu'il recomposait presque exactement la lumière; de sorte que l'image de l'étoile, vue à travers ce prisme était presque aussi concentrée que si on l'eût observée à travers des milieux à faces parallèles.

Cette égalité de déviation qui paraît, au premier coup-

(*) Le prisme dont M. Arago s'est servi dans ses expériences, était placé devant l'objectif d'un cercle répétiteur, de manière à n'en couvrir qu'une partie; de sorte que l'on pouvait observer successivement le rayon lumineux direct à travers la lunette seule, et le même rayon dévié par le prisme. En tenant compte des temps où les deux observations étaient faites, on ramenait l'astre, par le calcul, à une même hauteur sur l'horizon. La différence des angles observés directement et à travers le prisme donnait la déviation éprouvée par le rayon lumineux. En observant ainsi les étoiles de l'écliptique qui passaient au méridien à six heures du soir, la terre qui tourne sur elle-même, comme autour du soleil, d'occident en orient, marchait, sur son orbite, dans le même sens que leur lumière; et par conséquent celle-ci n'avait, en arrivant sur le prisme, que la différence des deux vitesses. Le contraire avait lieu pour les étoiles qui passaient au méridien à six heures du matin, et la terre allait en sens contraire de leur lumière. Mais cette opposition, qui aurait dû donner une différence de 50″ sexagésimales dans les déviations observées, n'y a produit aucun changement appréciable.

d'œil, directement contraire à la théorie de Newton, peut néanmoins s'y ramener, comme l'a fait M. Arago, en supposant que les corps lumineux lancent dans toutes les directions des molécules de lumière douées d'une infinité de vitesses différentes, parmi lesquelles il n'y en a qu'une seule qui convienne à nos organes, et qui puisse produire sur nous la sensation de lumière. Cette idée s'accorde avec une découverte faite depuis quelques années par M. Herschell : c'est que, lorsqu'on décompose la lumière par un prisme, il existe, hors du spectre coloré, des rayons invisibles qui peuvent encore échauffer les corps plus que les rayons lumineux eux-mêmes, et qui même produisent sur eux des effets chimiques caractéristiques, comme MM. Wollaston et Ritter l'ont depuis observé. Mais, d'un autre côté, si l'on admettait que chaque point d'un corps lance une infinité de molécules de vitesses différentes dans la même direction, il semble que plusieurs de ces molécules devraient se choquer dans leur trajet depuis l'astre jusqu'à nous ; et il est difficile de comprendre comment il en resterait toujours qui conservassent la même vitesse. Ces considérations et beaucoup d'autres prouvent que nos connaissances sur la nature de la lumière sont encore fort imparfaites. Remarquons néanmoins que les expériences de M. Arago ne font que légitimer encore plus la nécessité de calculer les aberrations de tous les astres avec une même valeur de la vitesse de la lumière, quelle que soit la direction dans laquelle leur lumière nous arrive, et quelle que soit la nature des instrumens avec lesquels nous l'observons.

Dans tout ce qui précède nous avons fait abstraction de l'atmosphère terrestre et de son action sur la lumière émanée des astres ; mais en lui appliquant les considérations générales dont nous venons de faire usage, il est également facile d'apprécier l'influence qu'elle peut avoir sur

l'aberration. Supposons d'abord l'étoile placée au zénith afin d'éviter les effets de la réfraction : dans ce cas, si l'on décompose la vîtesse propre de la molécule lumineuse à l'instant où elle entre dans l'atmosphère, et si on la résout en deux autres, dont l'une soit parallèle et égale au mouvement de l'observateur, l'autre vîtesse, qui est celle de la direction apparente, sera dirigée suivant le rayon terrestre, et par conséquent perpendiculaire aux couches atmosphériques. L'action de l'atmosphère ne fera donc qu'accélérer un peu le mouvement de la molécule lumineuse sans changer sa direction apparente. Mais l'atmosphère est si peu épaisse, et la lumière emploie si peu de tems à la traverser, que l'effet de cette accélération sera tout-à-fait insensible pour nous. En effet, la distance du soleil à la terre est égale à 23578 rayons terrestres. Si l'on suppose la hauteur de l'atmosphère égale à $\frac{1}{100}$ du rayon terrestre, elle sera $\frac{1}{2357800}$ de la distance de la terre au soleil. Or, la lumière parcourt cette distance en $571''$ de tems décimal. Ainsi, avec cette même vîtesse, elle traverserait l'épaisseur de l'atmosphère dans un tems exprimé par $\frac{571''}{2357800}$. Quand l'atmosphère serait de diamant, son action ne ferait que doubler cette vîtesse, et le tems dont il s'agit serait moitié moindre, c'est-à-dire qu'il serait exprimé par $\frac{285,5}{2357800}$ ou $\frac{1}{8258}$ de seconde de tems décimal ; cette accélération serait donc tout-à-fait insensible, et pourtant elle surpasse plusieurs milliers de fois celle que l'atmosphère produit.

Mais si la molécule lumineuse entre obliquement dans les couches atmosphériques, comme cela arrive quand nous observons les astres à l'horizon, alors l'action de

ces couches devenant oblique à la direction absolue de la molécule, ne fait pas seulement que l'accélérer, elle devrait la dévier de cette direction, et la dévier inégalement, selon la direction et l'intensité de sa vîtesse. L'aberration qui en résulte devrait donc être inégale sur les différens astres, selon leur position et leur hauteur apparente. Mais il est facile de sentir que cet effet est absolument nul d'après les expériences de M. Arago que nous avons rapportées ; car l'atmosphère agit en cela comme faisait le prisme dans ces expériences. D'ailleurs, indépendamment de ce résultat, l'action réfringente de l'atmosphère est si peu considérable, et la déviation totale qu'elle fait éprouver au rayon lumineux est si faible, que les inégalités de la vîtesse des molécules lumineuses ne peuvent pas s'y manifester d'une manière sensible ; car dans les circonstances les plus favorables, en supposant le mouvement propre de la molécule conspirant avec le mouvement de la terre, ou opposé à ce mouvement, on trouve par le calcul que le changement de la réfraction du rayon, en vertu de ce changement de vîtesse, ne serait que de $\frac{36}{100}$ de seconde décimale, même à 88° décimaux de distance au zénith ; ce qui est à-peu-près la limite où l'on puisse observer avec exactitude, à cause des réfractions atmosphériques. De sorte que l'astre ne varierait que de $\frac{18}{100}$ de seconde de part et d'autre de son lieu moyen, en vertu des changemens de vîtesse apparente de sa lumière ; et l'effet devenant de plus en plus insensible quand la distance zénithale est moindre, on pourrait tout-à-fait le négliger. Mais suivant ce que nous venons de remarquer, les observations de M. Arago prouvent que cette différence n'est pas seulement très-petite, elle doit être absolument nulle.

Enfin il nous reste à considérer les variations de direction et de vîtesse apparente que les molécules lumineuses venues des astres peuvent subir dans les humeurs de nos yeux. Quant au changement de direction apparente, nous devons conclure, par ce qui précède, qu'il sera nul si les couches dont nos yeux se composent sont perpendiculaires à la direction du rayon apparent, c'est-à-dire si la vision se fait bien directement par le centre de l'ouverture de la pupille, comme cela arrive ordinairement quand on observe avec des instrumens d'optique. Tout se réduira donc alors à un accroissement de la vîtesse de la molécule pendant qu'elle traverse notre œil ; mais ce trajet est si court, que l'effet de cette accélération sera parfaitement insensible. Il n'y aurait donc d'erreur à craindre, que si l'on observait dans une position oblique de l'œil ; car alors les rayons venus de l'astre et ceux qui viennent du micromètre, auquel on la compare, tomberaient bien sur le globe de l'œil avec la même direction ; mais comme ils ont des vîtesses différentes, la réfraction qu'ils souffriraient à cause de leur obliquité, serait inégale ; et lorsque l'image du fil et l'image de l'étoile coïncideraient l'une sur l'autre au fond de la rétine, leurs directions hors de l'œil seraient réellement séparées. L'erreur résultante de cette cause pourrait être fort considérable ; car la force réfringente des humeurs des yeux est à-peu-près égale à celle de l'eau distillée, et celle du cristallin doit être plus considérable encore ; de sorte que la déviation produite par ces substances semble devoir être fort sensible. Mais les expériences faites avec le prisme nous prouvent encore, dans cette circonstance, que l'erreur dont il s'agit n'aura pas lieu ; car le globe de l'œil et les humeurs qui le remplissent agiront sur la lumière précisément comme le prisme dans les

expériences de M. Arago; et par conséquent, dans ce cas, comme dans celui du prisme, l'obliquité des surfaces réfringentes ne produira point de déviation apparente.

En résumant ce que nous venons de dire, on voit que l'aberration produite par le mouvement de la terre est toujours indépendante des instrumens avec lesquels nous l'observons. Car, lorsque l'action des milieux réfringens est parallèle à la résultante des vitesses de la lumière et de la terre, ce qui est le cas le plus ordinaire, la théorie démontre qu'il n'en peut résulter aucun changement dans la direction apparente des molécules lumineuses, parce que la composition des deux vitesses doit se faire à l'instant où la molécule lumineuse rencontre les objets terrestres; et dans l'autre cas, où l'action oblique des milieux réfringens tendrait à altérer cette direction, l'expérience, faite au moyen du prisme, prouve que la déviation apparente est encore insensible par des causes qui, à la vérité, ne nous sont pas jusqu'à présent bien connues.

La théorie de l'aberration de la lumière complète la connaissance des mouvemens généraux que l'on observe dans les positions apparentes des étoiles. En corrigeant cette aberration par le calcul, ainsi que la précession et la nutation, on fait disparaître tous les déplacemens apparens, et on ramène le système entier des étoiles à l'immobilité, dont quelques-unes seulement s'écartent encore par de petits mouvemens propres qui ne sont assujettis à aucune loi.

En voyant cet accord si parfait de la théorie avec les phénomènes, on ne peut s'empêcher de convenir que l'aberration de la lumière est une preuve frappante du mouvement de la terre; la découverte en est due au célèbre astronome Bradley, qui a aussi reconnu le premier les effets de la nutation, comme nous l'avons dit plus haut.

92. Si l'on se rappelle que tous les phénomènes célestes

permettent d'admettre le mouvement de la terre, qu'ils se représentent dans cette hypothèse avec une simplicité beaucoup plus grande que dans toute autre ; si l'on se rappelle toutes les analogies qui indiquent ce mouvement, et qu'il faudrait violer pour l'exclure ; enfin si l'on ajoute à tant d'indications la preuve frappante que nous venons de découvrir dans l'aberration de la lumière, on regardera comme un fait certain que la terre a réellement, dans l'espace, un double mouvement de rotation sur elle-même, et de révolution autour du soleil. NOUS ADMETTRONS DÉSORMAIS CE RÉSULTAT COMME UNE VÉRITÉ INCONTESTABLE.

NOTE sur l'Aberration.

Pour résoudre tous les problèmes de l'aberration, il suffit de se rappeler ce théorème de statique. La résultante de plusieurs forces ou de plusieurs vîtesses, décomposées suivant une direction quelconque, est égale à la somme de ces forces ou de ces vîtesses, décomposées suivant la même direction. Soient V'', V''', etc., les petites vîtesses secondaires dont la molécule lumineuse se trouve ainsi animée, sa vîtesse propre étant représentée par V'. Rapportons, comme nous l'avons fait souvent, tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires x' y' z', menés du centre de la terre à l'équinoxe du printems, au premier point du Cancer et au pôle boréal de l'écliptique. Cela posé, si l'on représente par X' Y' Z' les angles formés par la direction de la vîtesse V' avec ces trois axes, V' cos X' exprimera cette vîtesse décomposée parallèlement à l'axe des x' ; et de même V' cos Y', V' cos Z' seront ses composantes parallèlement aux axes des y' et des z'. Au moyen d'une notation semblable, on pourra faire subir aux autres vîtesses la même décomposition. Alors si l'on nomme V la résultante de toutes ces vîtesses, et X, Y, Z, les angles que sa direction forme avec les trois axes, on aura,

par le principe de statique que nous venons de rappeler tout-à-l'heure,

$$V\cos X = V^{I}\cos X^{I} + V^{II}\cos X^{II} + V^{III}\cos X^{III}\ldots \text{ etc.}$$
$$V\cos Y = V^{I}\cos Y^{I} + V^{II}\cos Y^{II} + V^{III}\cos Y^{III}\ldots \text{ etc.}$$
$$V\cos Z = V^{I}\cos Z^{I} + V^{II}\cos Z^{II} + V^{III}\cos Z^{III}\ldots \text{ etc.}$$

on a de plus

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1;$$
$$\cos^2 X^{I} + \cos^2 Y^{I} + \cos^2 Z^{I} = 1;$$
$$\cos^2 X^{II} + \cos^2 Y^{II} + \cos^2 Z^{II} = 1 \ldots \text{ etc.}$$

Les termes dépendans de V et de V^{I} peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées du lieu apparent et du lieu réel de l'astre. En effet, soient l^{I} la longitude géocentrique vraie de l'astre, λ^{I} sa latitude vraie, r^{I} sa distance, ces élémens étant relatifs au centre de la terre; et désignons par l, λ, r, sa longitude, sa latitude et sa distance apparentes, vues du même point, mais affectées de l'aberration. On aura, comme nous l'avons souvent remarqué,

$$x^{I} = r^{I}\cos\lambda^{I}\cos l^{I} \qquad y^{I} = r^{I}\cos\lambda^{I}\sin l^{I} \qquad z^{I} = r^{I}\sin\lambda^{I}$$
$$x = r\cos\lambda\cos l \qquad y = r\cos\lambda\sin l \qquad z = r\sin\lambda$$

$x^{I}\ y^{I}\ z^{I}$ sont les coordonnées rectangulaires du lieu vrai, et $x\ y\ z$ celles du lieu apparent, vus l'un et l'autre du centre de la terre. Or, il est évident que l'on aura aussi

$$\cos X^{I} = \frac{x^{I}}{r^{I}} = \cos\lambda^{I}\cos l^{I};\quad \cos Y^{I} = \frac{y^{I}}{r^{I}} = \cos\lambda^{I}\sin l^{I};\quad \cos Z^{I} = \frac{z^{I}}{r^{I}} = \sin\lambda^{I}$$

$$\cos X = \frac{x}{r} = \cos\lambda\cos l;\quad \cos Y = \frac{y}{r} = \cos\lambda\sin l;\quad \cos Z = \frac{z}{r} = \sin\lambda$$

valeurs qui, étant substituées dans les trois équations des composantes, donnent

$$V\cos\lambda\cos l = V^{I}\cos\lambda^{I}\cos l^{I} + V^{II}\cos X^{II} + V^{III}\cos X^{III}\ldots \text{ etc.}$$
$$V\cos\lambda\sin l = V^{I}\cos\lambda^{I}\sin l^{I} + V^{II}\cos Y^{II} + V^{III}\cos Y^{III}\ldots \text{ etc.}$$
$$V\sin\lambda = V^{I}\sin\lambda^{I} + V^{II}\cos Z^{II} + V^{III}\cos Z^{III}\ldots \text{ etc.}$$

de là on tire

$$V^2 = \left\{ V^I \cos\lambda^I \cos l^I + V^{II} \cos X^{II} \ldots \right\}^2 + \left\{ V^I \cos\lambda^I \sin l^I + V^{II} \cos Y^{II} \ldots \right\}^2 + \left\{ V^I \sin\lambda^I + V^{II} \cos Z^{II} \ldots \right\}^2$$

$$\text{tang } l = \frac{V^I \cos\lambda^I \sin l^I + V^{II} \cos Y^{II} + V^{III} \cos Y^{III} \ldots \text{ etc.}}{V^I \cos\lambda^I \cos l^I + V^{II} \cos X^{II} + V^{III} \cos X^{III} \ldots \text{ etc.}}$$

$$\sin\lambda = \frac{V^I}{V} \sin\lambda^I + \frac{V^{II}}{V} \cos Z^{II} + \frac{V^{III}}{V} \cos Z^{III} \ldots \text{ etc.}$$

La première de ces équations détermine la résultante V; ensuite les deux autres déterminent la longitude et la latitude apparentes.

Ces équations peuvent se simplifier beaucoup, en remarquant que les vitesses secondaires V^{II} V^{III}, provenant des mouvemens de l'observateur et du corps lumineux dans l'espace, sont extrêmement petites par rapport à la vitesse propre de la lumière, qui est ici représentée par V^I. On peut donc, sans craindre aucune erreur, se borner à la première puissance des rapports $\frac{V^{II}}{V^I}$, $\frac{V^{III}}{V^I}$. En extrayant ainsi la racine carrée de V par approximation, et prenant de même les valeurs approchées de tang l et de sin λ, on trouve

$$V = V^I + V^{II} \left\{ \cos\lambda^I \cos l^I \cos X^{II} + \cos\lambda^I \sin l^I \cos Y^{II} + \sin\lambda^I \cos Z^{II} \right\} + V^{III} \left\{ \cos\lambda^I \cos l^I \cos X^{III} + \cos\lambda^I \sin l^I \cos Y^{III} + \sin\lambda^I \cos Z^{III} \right\} + \text{etc.} \ldots$$

$$\text{tang } l = \text{tang } l^I + \frac{V^{II}}{V^I} \frac{\left\{ \cos Y^{II} \cos l^I - \cos X^{II} \sin l^I \right\}}{\cos\lambda^I \cos^2 l^I} + \frac{V^{III}}{V^I} \frac{\left\{ \cos Y^{III} \cos l^I - \cos X^{III} \sin l^I \right\}}{\cos\lambda^I \cos^2 l^I} \ldots \text{etc.}$$

$$\sin\lambda = \sin\lambda^I - \frac{V^{II}}{V^I} \cos\lambda^I \left\{ \sin\lambda^I \cos l^I \cos X^{II} + \sin\lambda^I \sin l^I \cos Y^{II} - \cos\lambda^I \cos Z^{II} \right\} - \frac{V^{III}}{V^I} \cos\lambda^I \left\{ \sin\lambda^I \cos l^I \cos X^{III} + \sin\lambda^I \sin l^I \cos Y^{III} - \cos\lambda^I \cos Z^{III} \right\} \text{ etc.}$$

Maintenant il est facile de tirer de ces équations les diffé-

rences $l-l'$, $\lambda-\lambda'$, c'est-à-dire l'aberration en longitude et en latitude. En effet, considérons d'abord la seconde : elle donne immédiatement la valeur de tang l — tang l', qui est égale à $\frac{\sin(l-l')}{\cos l \cos l'}$; et l'on voit que sin $(l-l')$ est une fraction extrêmement petite, du même ordre que les rapports $\frac{V''}{V'}, \frac{V'''}{V'}$ . . .

Puisque nous nous bornons à la première puissance de ces rapports, nous devons supposer $l=l'$ dans les termes déjà multipliés par sin $(l-l')$; ce qui réduit $\frac{\sin(l-l')}{\cos l \cos l'}$ à $\frac{\sin(l-l')}{\cos^2 l'}$.

Par la même raison, la différence sin λ — sin λ', ou $2 \sin \frac{1}{2}(\lambda-\lambda') \cos \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')$, se réduit à $2 \sin \frac{1}{2}(\lambda-\lambda') \cos \lambda'$. De cette manière on aura les sinus des aberrations cherchées. Mais, à cause de la petitesse de ces sinus, on peut leur substituer les rapports $\frac{l-l'}{R''}$, $\frac{\lambda-\lambda'}{R''}$, R'' étant le rayon réduit en secondes. Si l'on veut aussi employer ce même rayon pour représenter la vîtesse propre de la lumière, comme nous l'avons fait dans le texte, V' se trouvera aussi égal à R''. Alors les vîtesses secondaires V'' V''' . . . devront aussi être exprimées en secondes, puisqu'elles doivent toujours l'être en unités de même espèce que V'. On obtient ainsi ces expressions très-simples et symétriques :

$$(1)\quad l=l'+V''\frac{\{\cos Y''\cos l'-\cos X''\sin l'\}}{\cos\lambda'}+V'''\frac{\{\cos Y'''\cos l'-\cos X'''\sin l'\}}{\cos\lambda'}\text{ etc.}$$

$$\lambda=\lambda'-V''\{\sin\lambda'\cos l'\cos X''+\sin\lambda'\sin l'\cos Y''-\cos\lambda'\cos Z''\}$$
$$-V'''\{\sin\lambda'\cos l'\cos X'''+\sin\lambda'\sin l'\cos Y'''-\cos\lambda'\cos Z'''\}$$
$$\text{etc.}$$

Ce sont les valeurs de la longitude et de la latitude géocentriques apparentes. Les premiers termes de ces valeurs sont, comme on voit, la longitude et la latitude géocentriques vraies ; les autres termes, toujours fort petits, expriment les variations que les élémens du lieu vrai éprouvent en vertu des diverses espèces d'aberration.

Si l'on voulait que ces formules exprimassent l'aberration en ascension droite et en déclinaison, il n'y aurait qu'à supposer que

l'on a pris l'équateur, au lieu de l'écliptique, pour plan des $x^I y^I$, et que l'axe des z^I est dirigé au pôle boréal de l'équateur. Alors les longitudes l^I et l deviendront les ascensions droites vraies et apparentes; nous les désignerons par a^I et a. De même les latitudes $\lambda^I \lambda$ se changeront en déclinaisons vraies et apparentes; nous les nommerons d^I et d. Mais alors il faudra que $X^{II}\ Y^{II}\ Z^{II}$, $X^{III}\ Y^{III}\ Z^{III}$, etc., représentent les angles formés par les vitesses $V^{II}\ V^{III}$ avec les nouveaux axes des coordonnées, que nous nommerons $x\ y\ z$; ou, ce qui reviendra au même, il faudra, au lieu des termes $V^{II}\cos X^{II}$, $V^{II}\cos Y^{II}$, $V^{II}\cos Z^{II}$, etc., mettre, dans les équations (1), les composantes parallèles à ces nouveaux axes. Cela ne produira aucun changement dans les composantes parallèles aux x, qui sont exprimées par $V^{II}\cos X^{II}$, $V^{III}\cos X^{III}$. Car l'axe des x ne change point dans cette transformation de coordonnées, puisqu'il est toujours dirigé vers l'équinoxe du printemps. *Voyez fig.* 19. Il n'y aura donc de différence que dans les composantes relatives aux axes des y^I et des z^I; car ceux-ci font avec les nouveaux axes des $y\ z$ un angle $Y^I\ T\ Y$, égal à l'obliquité de l'écliptique, que nous exprimerons par ω. Mais, en prenant la vîtesse V^{II} pour exemple, on peut considérer les nouvelles composantes cherchées comme les coordonnées $y\ z$ d'un point qui, rapporté aux axes des y^I et des z^I, aurait pour coordonnées $V^{II}\cos Y^{II}$, $V^{II}\cos Z^{II}$. Alors, d'après les formules de la Géométrie Analytique, les valeurs des $y\ z$, relativement à ce point, seront (*)

$V^{II}\cos Y^{II}\cos\omega - V^{II}\cos Z^{II}\sin\omega$; parallèlement aux y

$V^{II}\cos Y^{II}\sin\omega + V^{II}\cos Z^{II}\cos\omega$; parallèlement aux z

En substituant la première de ces quantités au lieu de $V^{II}\cos Y^{II}$, et la seconde au lieu de $V^{II}\cos Z^{II}$ dans les expressions générales de l'aberration, on aura l'ascension droite et la déclinaison apparentes.

Dans les formules auxquelles nous venons de parvenir, on voit se reproduire un principe que nous avons déjà remarqué dans plusieurs autres circonstances. C'est celui de la co-existence des mou-

(*) Voy. *Géomét. Analyt.*, 4e. édit., pag. 90, en changeant dans les formules α en ω; x et x^I en y, y^I, et enfin y, y^I en z, z^I.

vemens très-petits. Les différentes vîtesses secondaires qui sollicitent la lumière, étant très-petites, produisent autant d'aberrations partielles qui se superposent d'une manière linéaire, pour former l'aberration totale ; ce qui permet de considérer chacune d'elles séparément.

Examinons d'abord les termes qui pourraient provenir d'un mouvement de translation du *système* planétaire. Ces termes se détruisent d'eux-mêmes relativement aux corps qui composent ce système et qui se déplacent avec lui. En effet, d'après ce qui a été démontré dans le texte, le mouvement de l'astre doit être appliqué à la molécule lumineuse avec sa direction propre, et le mouvement de l'observateur doit lui être appliqué en sens contraire de sa direction réelle. Or, ici ces deux mouvemens sont égaux, puisque tous les corps du système planétaire sont supposés transportés d'un mouvement commun. Leurs effets se compensent donc par leur opposition, et de cette compensation résulte une vîtesse apparente qui est nulle. Ainsi le mouvement de translation commun à tous les corps du système planétaire ne peut, s'il existe, produire aucune aberration dans leurs positions respectives observées d'un quelconque d'entr'eux.

L'effet n'est pas le même pour les rayons lumineux lancés par les corps étrangers à ce système ; il faut leur transporter aussi la vîtesse du mouvement de translation prise en sens contraire ; ce qui donne une vîtesse absolue V'', qui est commune à tous ces corps. Mais le changement qui en résulte sur leurs longitudes et sur leurs latitudes, est différent selon les valeurs de ces quantités, à cause des facteurs variables $\sin \lambda'$, $\cos \lambda'$, $\sin l'$, $\cos l'$, qui entrent dans la formule de l'aberration. Ainsi le déplacement du système planétaire dans l'espace doit produire sur les étoiles une aberration qui dépend de leur situation par rapport à la trajectoire que le système décrit. Pour calculer cette aberration, il faudrait connaître la direction du mouvement de translation et sa vîtesse. Mais comme ces deux choses sont jusqu'à présent inconnues, l'aberration qui en résulte pour les différentes étoiles se compose avec les petits mouvemens qui leur sont propres, et nous la confondons avec eux ; ce qui montre qu'il faut mettre beaucoup de réserve dans les conséquences que l'on peut déduire de la comparaison de ces mouvemens.

Venons maintenant à la partie de l'aberration qui dépend du

mouvement annuel de la terre autour du soleil ; mouvement qu'il faut transporter en sens contraire au soleil et à tous les astres.

Deux choses sont à apprécier dans ce mouvement, sa direction et sa vitesse. Ces deux quantités sont nécessaires pour déterminer la valeur des termes qui en résultent dans la formule.

Faisons d'abord abstraction de l'excentricité de l'orbe terrestre. M. Delambre a trouvé par les retards des éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière emploie $8^{l}\ 13^{ll}$ de tems sexagésimal pour parcourir la distance moyenne du soleil à la terre. Or, en $8^{l}\ 13^{ll}$ la terre décrit autour du soleil un petit arc égal à $\frac{360°.8^{l}\ 13^{ll}}{365j,256383}$, à raison d'une circonférence entière pour une année sidérale. Cet arc étant évalué en secondes devient $\frac{360.360000''.0j.005706}{365j,256383}$ ou $\frac{360.20'',5416}{365,256383}$; quantité qui peut se mettre sous la forme $20'',5416 - \frac{5,256383.20''.5416}{365,256383}$ ce qui la rend facile à calculer, et alors elle se réduit à $20'',5416 - 0'',2956 = 20'',2460$. Si l'on emploie cette quantité pour représenter la vitesse de la terre, celle de la lumière sera représentée par le rayon de l'orbite, réduit aussi en secondes sexagésimales, ou par $206264'',8$. Ainsi, en représentant par R'' le rayon ainsi transformé, la valeur abstraite de la vitesse V' due au mouvement de la terre, sera

$$V' = \frac{20'',246}{R''}$$

la vitesse de la lumière étant prise pour unité. Or, par la nature des expressions de l' et de λ', il faut pour l'homogénéité exprimer V' en secondes de degré; pour cela il faut multiplier le nombre abstrait qui représente V', par le rayon réduit en secondes, c'est-à-dire par R'' ; ce qui revient à supprimer le dénominateur de V' ; par conséquent la valeur qu'il faut substituer dans notre formule est simplement $V' = 20'',246$.

Mais avant d'appliquer cette expression, donnons-lui toute la généralité qu'elle comporte, en ayant égard à l'excentricité de l'orbe terrestre. Par l'effet de cette excentricité, l'intensité de la vitesse varie dans les différens points de l'orbite ; sa direction change aussi, puisque l'orbite n'est plus circulaire ; mais il est facile d'avoir égard à ces variations.

Evaluons d'abord l'expression variable de la vîtesse. Soit α le petit angle décrit par la terre autour du soleil pendant que la lumière parcourt le rayon r de l'orbite. L'arc réellement décrit par la terre, dans cet intervalle, ne diffère pas sensiblement de $r\alpha$; car à cause de sa petitesse et du peu d'excentricité de l'orbite, il se confond avec un arc de cercle qui serait décrit du rayon r; nous avons déjà fait cette remarque, page 136 du 2e. Livre. Prenons donc l'arc $r\alpha$ pour représenter la vîtesse de la terre. Celle de la lumière se trouvera représentée par le rayon r; et leur rapport $\frac{r\alpha}{r}$, ou simplement α, exprimera la valeur de V'' qu'il faut substituer dans notre formule de l'aberration. Nous supposons ici l'angle α exprimé en secondes comme doit l'être la vîtesse V''.

Il ne s'agit donc que d'avoir l'expression générale de α. Or, nous l'avons déjà formée dans la page 186 du second Livre. En nommant a le demi-grand axe de l'ellipse, e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, T le tems d'une révolution anomalistique, et représentant par π la demi-circonférence dont le rayon égale 1, nous avons trouvé alors que l'arc α, décrit pendant le tems t, avait pour valeur

$$\alpha = \frac{2\pi a t \sqrt{1-e^2}}{r^2 T}.$$

Ici t est le tems que la lumière emploie pour parcourir le rayon r. Ainsi, en admettant avec M. Delambre $8'.\,13''$ pour le demi-grand axe, on trouvera proportionnellement pour le rayon r

$$= 8'.\,13''.\,\frac{r}{a}.$$

Valeur qui étant substituée dans α, donne

$$= \frac{8'.\,13''.\,2\pi}{T} \cdot \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}.$$

La quantité $\frac{8'.\,13''.\,2\pi}{T}$ est justement l'aberration constante que nous avons calculée d'abord dans le cas de l'orbite circulaire, et que nous avons trouvée égale à $20'',246$. Car la différence de l'année anomalistique à l'année sidérale que nous avons em-

ployée, ne changerait pas ce résultat de $0'',0002$. En faisant donc usage de cette valeur, et écrivant V'' au lieu de α, il vient

$$V'' = 20'',246 \cdot \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}$$

On voit, en effet, que si l'on supposait dans cette formule l'excentricité nulle, ce qui donne $e = o$ et $a = r$, on retomberait sur l'aberration constante de l'orbite circulaire, comme cela devait naturellement arriver.

Mais en général il faut mettre pour r sa valeur dans l'ellipse, qui est

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}$$

en appelant v la longitude héliocentrique de la terre, et ϖ la longitude du périhélie. Cette substitution étant faite, la valeur de V'' devient

$$V'' = 20'',246 \cdot \frac{1+e\cos(v-\varpi)}{\sqrt{1-e^2}}$$

Il faut maintenant déterminer les angles $X''\,Y''\,Z''$, formés par cette vîtesse avec les trois axes rectangulaires $x'\,y'\,z'$. Comme elle est toujours dirigée dans le sens du mouvement de la terre, tangentiellement à l'orbe terrestre, on voit d'abord qu'elle forme un angle droit avec l'axe des z', puisque cet axe est perpendiculaire à l'écliptique. On a donc

$$\cos Z'' = o\,;$$

et comme on a en général

$$\cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' = 1$$

il en résulte $\cos Y'' = \sin X''$.

Ces valeurs étant substituées dans les formules générales (1), elles donnent, pour ce genre d'aberration en longitude et en latitude

$$(2)\quad l = l' + \frac{V''}{\cos\lambda'}\sin(X''-l')\,;\quad \lambda = \lambda' - V''\sin\lambda'\cos(X''-l').$$

Avant d'aller plus loin, il est essentiel de déterminer rigoureu-

sement le signe de ces deux corrections ; car l'équation qui nous a donné cos V'' avait réellement deux racines, l'une positive, l'autre négative ; et nous aurions pu y satisfaire aussi bien en prenant cos $V'' = -\sin X''$, qu'en faisant cos $V'' = +\sin X''$. Puisque nous avons adopté cette dernière racine, il faut voir quel signe nous devons donner à la vitesse V'', en conséquence de cette détermination.

Pour cela, considérons une étoile située dans la partie boréale de l'écliptique, et dont la longitude vraie l', soit égale à celle du périhélie de l'orbe terrestre. Dans ce cas, $X'' - l'$ sera l'angle formé par la direction du mouvement de la terre avec la distance périhélie de l'orbe terrestre ; et cet angle, comme ceux dont il est la différence, se mesurera sur l'écliptique, d'orient en occident, selon l'ordre des signes. Il sera égal à un angle droit, lorsque la terre se trouvera au périhélie de son orbite. On aura donc alors

$$\cos(X'' - l') = 0 \; ; \quad \sin(X'' - l') = +1.$$

Dans ce cas, l'aberration doit être nulle sur la latitude de l'étoile ; et son effet se reportant tout entier sur la longitude, doit l'*augmenter* d'une quantité $\frac{V''}{\cos\lambda'}$. La première condition relative à la latitude est satisfaite d'elle-même, puisque cos $(X'' - l') = 0$. La seconde exige que V'' soit positif. Ainsi la direction propre de la vitesse de la terre doit être regardée comme positive au périhélie, dans nos formules, et par conséquent comme négative à l'aphélie. En effet, si l'on suit les conséquences de cette convention sur la latitude ou sur la longitude de l'étoile, dans les diverses parties de l'orbite, pour l'exemple particulier que nous venons de choisir, on les trouvera toujours conformes avec ce qui doit résulter du principe même de l'aberration, tel que nous l'avons expliqué dans le texte.

Si l'on voulait obtenir, d'après les formules précédentes, les variations correspondantes de l'ascension droite, il faudrait, conformément à ce que nous avons dit plus haut, employer la même valeur V'' cos X'' pour la composante parallèle aux x ; mais il faudrait substituer V'' cos Y'' cos ω pour la composante parallèle aux y, et V'' cos Y'' sin ω pour la composante parallèle aux z ; ou, ce qui revient au même, il faudrait subs-

tituer ces quantités au lieu de $V'' \cos Y''$ et de $V'' \cos Z''$ dans les formules générales (1). On aurait ainsi

$$a = a' + \frac{V''}{\cos d'} \left\{ \cos Y'' \cos \omega \cos a' - \cos X'' \sin a' \right\}$$

$$d = d' - V'' \left\{ \cos X'' \sin d' \cos a' + \cos Y'' \sin d' \sin a' \cos \omega - \cos Y'' \cos d' \sin \omega \right\};$$

Mais nous venons de trouver que, relativement à la vîtesse de la terre, $\cos Y'' = \sin X''$, par conséquent

$$(3) \quad a = a' + \frac{V''}{\cos d'} \left\{ \sin X'' \cos \omega \cos a' - \cos X'' \sin a' \right\}$$

$$d = d' - V'' \left\{ \cos Y'' \sin d' \cos a' + \sin X'' \sin d' \sin a' \cos \omega - \sin X'' \cos d' \sin \omega \right\}.$$

a' d' sont l'ascension et la déclinaison vraies ; a et d sont l'ascension droite et la déclinaison apparentes. Ces expressions rentreraient dans les précédentes, si l'on y supposait ω nul, et qu'on y changeât a en l, et d en λ ; ce qui devait en effet arriver, puisque, dans cette supposition, l'équateur coïncide avec l'écliptique. On pourrait même en général les mettre sous une forme aussi simple que celles de la longitude et de la latitude, en prenant deux angles auxiliaires N et N', tels qu'on ait

$$\text{tang } N = \frac{\text{tang } a'}{\cos \omega} ; \quad \text{tang } N' = \frac{\sin a' \cos \omega - \cot d' \sin \omega}{\cos a'} ;$$

car alors elles deviendront

$$a = a' + \frac{V'' \sin a'}{\cos d' \sin N} \cdot \sin (X'' - N)$$

$$d = d' - \frac{V'' \cdot \sin d' \cos a'}{\cos N} \cdot \cos (X'' - N').$$

Il ne reste plus qu'à déterminer X'', c'est-à-dire l'angle que la tangente de l'orbe terrestre forme avec la ligne des équinoxes à un instant quelconque.

Or, si l'on rapporte l'équation d'une ellipse à des coordonnées rectangulaires x'' y'' parallèles à ses axes a et b, et dont l'origine soit au centre de l'ellipse, l'angle formé par la tangente

de l'ellipse avec le grand axe que je suppose être celui des x, aura pour tangente trigonométrique

$$\frac{-b^2 x''}{a^2 y''}.$$

(Voyez *Géom. Analyt.* 4e éd., pag. 143.) Nous nommerons cet angle n. Pour appliquer cette expression au cas qui nous occupe, il faut mettre l'origine des coordonnées au foyer de l'ellipse et y introduire l'angle $v-\varpi$, formé par le rayon vecteur r avec le grand axe. Nommons de plus e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, comme nous l'avons supposé plus haut, nous aurons

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2, \quad y''=r\sin(v-\varpi) \quad x=\sqrt{a^2-b^2}+r\cos(v-\varpi);$$

d'où l'on tire

$$b^2=a^2(1-e^2), \quad y''=r\sin(v-\varpi), \quad x''=ae+r\cos(v-\varpi).$$

Au moyen de ces transformations, la quantité $\frac{-b^2x''}{a^2y''}$ ou tang n devient

$$\text{tang } n=-\frac{(1-e^2)\left\{ae+r\cos(v-\varpi)\right\}}{r\sin(v-\varpi)}.$$

Et en y mettant pour r sa valeur $\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}$, elle prend cette forme très-simple

$$\text{tang } n=-\frac{\left\{e+\cos(v-\varpi)\right\}}{\sin(v-\varpi)}.$$

Si l'excentricité de l'ellipse terrestre était nulle, on aurait

$$e=0 \qquad \text{tang } n=-\cot(v-\varpi),$$

et par conséquent

$$n=90+v-\varpi.$$

Mais puisque l'excentricité, sans être nulle, est extrêmement petite, la valeur de n sera très-peu différente de cette quantité. Soit n' cette différence, en sorte qu'on ait

$$n=90+v-\varpi-n';$$

ce qui donne

$$\text{tang } n = \frac{-\cos(v-\varpi) - \sin(v-\varpi)\,\text{tang } n'}{\sin v - \varpi \quad -\cos(v-\varpi)\,\text{tang } n'}.$$

En substituant cette valeur de tang n dans l'équation précédente, on trouve

$$\text{tang } n' = \frac{e \sin(v-\varpi)}{1 + e\cos(v-\varpi)}.$$

L'angle n', comme nous l'avions prévu, se trouve très-petit, du même ordre que l'excentricité. Dans tous les calculs de l'aberration, il suffit de conserver la première puissance de cette quantité. On peut donc négliger le terme multiplié par e dans le dénominateur; ce qui réduit ce dénominateur à l'unité. On peut aussi substituer à tang n' le rapport du petit arc n' au rayon réduit en secondes, c'est-à-dire $\frac{n'}{R''}$.

Alors on aura $\qquad n' = e R'' \sin(v-\varpi)$

ou simplement $\qquad n' = e \sin(v-\varpi)$,

en supposant l'excentricité e exprimée en secondes, comme nous l'avons fait souvent. Par ce moyen, nous aurons

$$n = 90 + v - \varpi - n' = 90 + v - \varpi - e \sin(v-\varpi).$$

n est l'angle formé par la tangente de l'orbe terrestre avec la distance périhélie. En lui ajoutant l'angle ϖ, formé par la distance périhélie avec la ligne des équinoxes, la somme $n + \varpi$ exprimera l'angle formé par la tangente de l'orbe terrestre avec la ligne des équinoxes, que nous avons prise pour axe des x'. Cet angle $n + \varpi$ sera donc justement celui que nous avons nommé X''. Nous aurons ainsi

$$X'' = 90 + v - e \sin(v-\varpi).$$

v est la longitude héliocentrique de la terre, et ϖ la longitude héliocentrique du périhélie de l'orbe terrestre. A la place de ces quantités il sera plus commode d'introduire les longitudes géocentriques ☉ et ☋, du soleil et du périgée solaire, qui sont immédiatement données par les tables astronomiques. Cela est extrêmement

facile; car les lieux apparens du soleil et du périgée solaire sont diamétralement opposés sur la sphère céleste au lieu réel de la terre et du périhélie de l'orbe terrestre ; de sorte qu'en comptant les longitudes dans le même sens et à partir du même équinoxe, comme on doit toujours le faire, on a constamment

$$\Theta = v + 180°, \qquad \varphi = \varpi + 180°,$$

par conséquent

$$v = \Theta - 180°, \qquad \varpi = \varphi - 180°;$$

ce qui donne

$$X'' = -90° + \Theta - e \sin \{\Theta - \varphi\};$$

par conséquent

$$X'' - l' = -90° + \Theta - l' - e \sin (\{\Theta - \varphi\}.$$

et en substituant cette valeur dans les expressions de l'aberration en longitude et en latitude, elles deviennent

$$l = l' - \frac{V''}{\cos \lambda'} \cdot \cos \{\Theta - l' - e \sin (\Theta - \varphi)\}$$

$$\lambda = \lambda' - V'' \sin \lambda' \cdot \sin \{\Theta - l' - e \sin (\Theta - \varphi)\}.$$

On aura de même pour l'ascension droite et la déclinaison

$$a = a' - \frac{V'' \sin a'}{\cos d' \sin N} \cdot \cos \{\Theta - N - e \sin (\Theta - \varphi)\}$$

$$d = d' - \frac{V'' \sin d \cos a'}{\cos N} \cdot \sin \{\Theta - N' - e \sin (\Theta - \varphi)\}$$

N et N' étant, comme nous l'avons vu, des angles auxiliaires, tels qu'on ait

$$\text{tang } N = \frac{\text{tang } a'}{\cos \omega}; \quad \text{tang } N' = \frac{\sin a' \cos \omega - \cot d' \sin \omega}{\cos a'}.$$

Il ne reste plus qu'à mettre dans ces expressions, au lieu de V'', la valeur que nous avons trouvée plus haut, c'est-à-dire

$$V'' = 20'',246 \cdot \frac{\{1 + e \cos (v - \varpi)\}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

ou bien

$$V = 20'',246 \cdot \frac{\{1 + e \cos (\Theta - \varphi)\}}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

En substituant cette valeur de V'' dans les formules précédentes,

il faut se borner à la première puissance de l'excentricité ; ce qui réduit le dénominateur de V'' à l'unité. Ensuite, en se bornant toujours aux termes de cet ordre, on aura

$$\cos\{\Theta - l' - e\sin(\Theta - \varpi)\} = \cos(\Theta - l') + e\,.\,\sin(\Theta - \varpi)\sin(\Theta - l')$$
$$\sin\{\Theta - l' - e\sin(\Theta - \varpi)\} = \sin(\Theta - l') - e\,\sin(\Theta - \varpi)\cos(\Theta - l').$$

Ceci suppose seulement que l'on met pour e sa valeur abstraite 0,016814, et non pas la réduction de cette valeur en secondes. Les termes analogues de l'ascension droite et de la déclinaison donneront des résultats semblables ; et en les multipliant par $1 + e\cos(\Theta - \varpi)$, on aura définitivement

$$l = l' - \frac{20'',246}{\cos\lambda'}\left\{\cos(\Theta - l') + e\cos(\varpi - l')\right\}$$
$$\lambda = \lambda' - 20'',246\sin\lambda'\left\{\sin(\Theta - l') + e\sin(\varpi - l')\right\}$$
$$a = a' - \frac{20'',246\sin a'}{\cos d'\sin N}\left\{\cos(\Theta - N) + e\cos(\varpi - N)\right\}$$
$$d = d' - \frac{20'',246\sin d'\cos a'}{\cos N'}\left\{\sin(\Theta - N') + e\sin(\varpi - N')\right\}.$$

A quoi il faut toujours joindre les équations auxiliaires

$$\text{tang}\, N = \frac{\text{tang}\, a'}{\cos\omega}\,;\quad \text{tang}\, N' = \frac{\sin a'\cos\omega - \cot d'\sin\omega}{\cos a'}.$$

Au reste, nous n'introduisons ici ces angles que pour montrer l'analogie des formules qui appartiennent à l'équateur et à l'écliptique ; car, pour les calculs numériques, il sera souvent plus exact, et presque toujours aussi simple, d'employer immédiatement les valeurs de a et de d, après en avoir éliminé N et N'. On aurait alors

$$a = a' - \frac{20'',246}{\cos d'}\left\{\cos\omega\cos a'\cos\Theta + \sin a'\sin\Theta\right\}$$
$$- \frac{20'',246.e}{\cos d'}\left\{\cos\omega\cos a'\cos\varpi + \sin a'\sin\varpi\right\}$$

$$d = d' - 20'',246\left\{\sin d'\cos a'\sin\Theta - \sin a'\sin d'\cos\omega\cos\Theta + \cos d'\sin\omega\cos\Theta\right\}$$
$$- 20'',246.e\left\{\sin d'\cos a'\sin\varpi - \sin a'\sin d'\cos\omega\cos\varpi + \cos d'\sin\omega\cos\varpi\right\}.$$

On pourrait encore décomposer les produits de sinus en sommes

et en différences, comme nous avons fait pour la nutation, dans le second livre, page 117. C'est même ainsi que l'on opère ordinairement, quand on veut réduire la formule en tables. N'oublions pas que ϖ est la longitude du périhélie de l'orbe solaire ; et l'on a au commencement de 1811

$$\varpi = 279°.40'.24''$$

Elle augmente chaque année de $61''{,}9$, comme nous l'avons démontré dans le second livre, page 161.

Les positions apparentes du soleil, telles qu'on les observe, sont elles-mêmes affectées des effets de l'aberration, et il faut les en dépouiller pour avoir les lieux réels de cet astre. Rien n'est plus facile d'après les formules précédentes, car le soleil est un astre dont la latitude est nulle, et dont la longitude est égale à $\odot$. En introduisant ces modifications dans nos formules, elles donnent

$$l = l' - 20''{,}246 \left\{ 1 + e \cos (\varpi - \odot) \right\}.$$

Les résultats que nous venons d'obtenir vont nous faire connaître l'orbite décrite chaque année par le lieu apparent de l'étoile autour de son lieu moyen. Cette orbite étant très-petite, nous opérerons ici comme pour l'ellipse de nutation ; nous la projetterons sur la surface concave du ciel comme sur une surface plane, et nous rapporterons ses points à deux coordonnées rectangulaires, ayant leur origine au lieu moyen de l'astre ; ces coordonnées seront les différences de latitude $\lambda - \lambda'$, $l - l'$, et les différences de longitude reportées à la hauteur du lieu moyen de l'étoile, c'est-à-dire $(l - l') \cos \lambda'$. En nommant les premières Y, les secondes X ϖ comme nous l'avons fait, alors nous aurons

$$X = -20''{,}246 \left\{ \cos (\odot - l') + e \cos (\varpi - l') \right\}$$
$$Y = -20''{,}246 \sin \lambda' \left\{ \sin (\odot - l') + e \sin (\varpi - l') \right\}.$$

Dans ces équations la longitude ϖ du périhélie peut être supposée constante pendant l'intervalle d'une année ; car la variation de $61''\,9$ qu'elle éprouve n'est pas sensible sur le résultat, à cause du très-petit facteur e qui multiplie le terme où elle entre.

Ainsi, en éliminant la longitude ☉ du soleil, on aura l'équation de l'orbite demandée. Il est visible que cette équation sera

$$\{Y+20'',246.e\sin(\varphi-l')\}^2+\{X+20'',246.e\cos(\varphi-l')\}^2=\{20'',246\}^2$$

ou bien

$$\{Y+20'',246.e\sin\lambda'\sin(\varphi-l')\}^2+\sin^2\lambda'\{X+20'',246.e\cos(\varphi-l')\}^2=\{20'',246\}^2\sin^2\lambda'.$$

Cette équation est celle d'une ellipse qui est rapportée à des coordonnées parallèles à ses axes, mais dont le centre n'est pas au lieu moyen de l'étoile. Si l'on appelle X' Y' les coordonnées rapportées au centre, on aura

$$Y'=Y+20'',246.e\sin\lambda'\sin(\varphi-l')\;;\quad X'=X+20'',246.e\cos(\varphi-l'),$$

et ensuite

$$Y'^2+X'^2\sin^2\lambda'=\{20'',246\}^2\sin^2\lambda'.$$

Quand $Y'=0$, on a $X'=20'',246$,
c'est le demi-grand axe, et l'on voit qu'il est parallèle à l'écliptique.
Quand $X'=0$, on a $Y'=20'',246\sin\lambda'$,
c'est le demi-petit axe; il est tangent au cercle de latitude.
On voit aussi que le centre de l'ellipse ne coïncide pas tout-à-fait avec le lieu moyen. La différence dépend de l'excentricité de l'orbe terrestre. D'après les valeurs précédentes, cette différence est égale à

$$20'',246.e\sin\lambda'\sin(\varphi-l'),$$

dans le sens des Y ou de la latitude,

et à $20'',246.e\cos(\varphi-l')$

dans le sens des X; ce qui donne sur la longitude

$$\frac{20'',246.e\cos(\varphi-l')}{\cos\lambda'}$$

en divisant par le cosinus de la latitude de l'astre.

Le petit axe de l'ellipse s'évanouit quand λ' est nul, c'est-à-dire pour les étoiles situées dans le plan même de l'écliptique, et alors l'ellipse se change en une portion de ligne droite. C'est à fort peu près le cas de l'ellipse de Régulus, comme nous l'avons vu par les observations.

Au contraire, si $\lambda' = 90°$, l'ellipse se change en une circonférence de cercle, dont le rayon a encore cette même valeur $20'',246$; c'est ce qui arrivera pour une étoile située au pôle même de l'écliptique. Dans tous les cas le grand axe de l'ellipse est invariable, et quelle que soit la position de l'étoile, il est égal à $40'',492$. Le second axe seul dépend de cette position, et varie proportionnellement au sinus de la latitude. Telles sont la nature et les dimensions de la courbe apparente que décrivent annuellement les étoiles, par l'effet de l'aberration que produit le mouvement de la terre dans son orbite.

Le mouvement de rotation diurne produit aussi dans la position des astres une petite aberration, qu'il est nécessaire d'évaluer, ne fût-ce qu'afin de s'assurer qu'elle est insensible.

Il est d'abord très-facile d'en trouver l'expression générale d'après nos formules. En effet, soit V''' la vîtesse de rotation de l'observateur sur son parallèle. Cette vîtesse étant parallèle à l'équateur, il est sensible qu'il faut adopter ici un système de coordonnées qui se rapportent à l'ascension droite et à la déclinaison. Soient donc X''' Y''' Z''' les angles formés par la vîtesse V''' avec les trois axes rectangulaires menés à l'équinoxe du printems, à 90° degrés d'ascension droite et au pôle boréal de l'équateur, on aura d'abord $Z''' = 90°$, puisque la vîtesse V''' est parallèle à l'équateur, par conséquent $\cos Y''' = \sin X'''$. Ainsi, en n'ayant égard qu'à cette cause d'aberration, les formules générales (1) donneront ici comme dans la page 155,

$$a = a' + \frac{V'''}{\cos d'} \sin (X''' - a')$$

$$d = d' - V''' \sin d' \cdot \cos (X''' - a').$$

Maintenant, si l'on nomme A l'ascension droite du zénith de l'observateur, et $+D$ sa déclinaison, supposée boréale, on aura

$$X''' = 90 + A;$$

car la vîtesse V''' étant dirigée suivant la tangente de la courbe que décrit l'observateur, est perpendiculaire au rayon du parallèle sur lequel il se trouve. Or ce rayon fait toujours l'angle variable A avec l'axe des x; et ce résultat est analogue à la valeur que nous

avons trouvée pour X'' dans l'ellipse terrestre, page 159. Substituant dans les formules précédentes, il vient

$$a = a' + V''' \cdot \frac{\cos(A - a')}{\cos d'}$$

$$d = d' + V''' \sin d' \cdot \sin(A - a').$$

Dans ces expressions $A - a'$ est l'angle horaire de l'astre compté du méridien supérieur et d'occident en orient. Il ne reste plus qu'à évaluer l'intensité de la vîtesse V'''. Pour l'obtenir, il faut la comparer avec celle du mouvement annuel.

La rotation de la terre s'achève en un jour, et son mouvement dans son orbite se fait en un an, c'est-à-dire en 365j,25. Dans l'intervalle d'un jour, chaque point de l'équateur terrestre décrit une circonférence de cercle dont le rayon est égal au rayon de cet équateur, c'est-à-dire $\frac{1}{23578}$, en prenant pour unité le rayon moyen de l'orbite solaire. Ainsi, en négligeant l'excentricité de cette orbite, qui n'est ici d'aucune conséquence, la vîtesse annuelle de la terre est à celle de sa rotation diurne à l'équateur, comme le périmètre de l'orbite, divisé par le tems employé à le parcourir, est à la circonférence de l'équateur divisée par le tems de la rotation, c'est-à-dire, comme $\frac{2\pi}{365,25} : \frac{2\pi}{23578}$ ou comme $1 : \frac{365,25}{23578}$; d'où il est facile de conclure que la vîtesse de rotation à l'équateur est environ la 65e partie de la vîtesse annuelle. Or, nous avons trouvé que celle-ci était représentée par $20'',246$, en représentant la vîtesse de la lumière par le rayon réduit en secondes. La vîtesse de rotation de la terre sera donc 65 fois plus petite, c'est-à-dire égale à $\frac{20'',246}{65}$ ou $0'',311$, environ un tiers de seconde sexagésimale. Telle est la valeur de V''' à l'équateur. Mais cette valeur diminue proportionnellement au cosinus de la déclinaison du parallèle sur lequel l'observateur se trouve; c'est-à-dire que si cette déclinaison est D, la vîtesse de rotation devient V''' cos D, ou $0''.311 . \cos D$. Ainsi, en substituant cette valeur dans l'expression de a et de d, on aura

$$a = a' + 0''.311 \cdot \frac{\cos D \cdot \cos(A - a')}{\cos d'};$$

$$d = d' + 0''.311 \cdot \cos D \sin d' \cdot \sin(A - a').$$

Dans ces expressions, on voit que l'aberration en ascension

droite, produite par la rotation de la terre, est la plus grande possible à l'instant du passage des astres au méridien, parce qu'alors l'angle horaire $A - a'$ est nul. Dans ce cas, l'aberration en déclinaison produite par la même cause est nulle aussi. Cela devait être, puisque la vîtesse de rotation étant alors perpendiculaire au plan du méridien, ne peut altérer que l'ascension droite. Au contraire, quand l'angle horaire $A - a'$ est de six heures, l'effet de la rotation sur l'ascension droite est nul et se reporte tout entier sur la déclinaison. Aussi, dans ce cas, la vîtesse de l'observateur devient-elle perpendiculaire au méridien de l'astre.

Pour une même valeur de l'angle horaire, l'aberration en ascension droite augmente en même tems que la déclinaison de l'astre. Afin d'en apprécier les effets, prenons pour exemple la polaire. Sa déclinaison moyenne, au 1er janvier 1811, est $88°.18'.1''$, ce qui donne

$$\frac{0'',311}{\cos d'} = 10'',1485.$$

Telle serait l'altération produite sur l'ascension droite de la polaire dans son passage au méridien, à l'équateur même, où $D = 0$. Cet effet serait moindre sur un parallèle plus rapproché du pôle; par exemple, à 45° de latitude, on aurait $D'' = 45°$;

par conséquent $$\cos D = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ce qui le réduirait à $$\frac{10'',1845}{\sqrt{2}} \text{ ou } 7'',4.$$

A Paris, ce serait $6''9$ ou $0'',45$ de tems sexagésimal. Ces corrections sont extrêmement petites; mais pourtant, puisqu'elles sont certaines, il faut y avoir égard dans les observations.

Il ne nous reste plus qu'à considérer la partie de l'aberration produite par le mouvement propre des astres qui lancent ou qui réfléchissent la lumière. Pour cela il faut évaluer la vîtesse de ce mouvement et sa direction.

Pour les planètes qui se meuvent dans des ellipses très-peu excentriques, comme la terre, la vîtesse est facile à évaluer; son expression est semblable à celle que nous avons trouvée plus haut relativement à la terre: représentons-la de même par V''. Soit r le rayon vecteur héliocentrique de la planète, et t' le tems que la lumière emploierait à le parcourir. Nommons a' l'angle décrit par ce rayon autour du soleil pendant le tems t'. L'ellipse étant très-peu excentrique, l'arc de cercle $r'a'$ représentera, à très-peu

près, l'arc décrit par la planète sur son orbite ; et le rapport de sa vitesse à celle de la lumière sera $\frac{r^{l}\,a^{l}}{r^{l}}$, ou simplement a^{l}. Or, en nommant e^{l} le rapport de l'excentricité de l'ellipse de la planète à son demi-grand axe a^{l}, et désignant par T^{l} le tems de sa révolution sidérale, on aura ici, comme pour la terre, page 154,

$$a^{l} = V^{II} = \frac{2\pi\, a^{l2}\, t^{l} \sqrt{1-e^{l2}}}{r^{l2}\, T^{l}}.$$

De plus, si nous représentons par a le demi-grand axe de l'orbe terrestre que la lumière parcourt en $8^{l}\,13^{II}$, le tems t^{l} qu'elle emploie à parcourir le rayon vecteur r^{l} sera proportionnellement égal à $8^{l}\,13^{II} \cdot \frac{r^{l}}{a}$; ce qui donne

$$V^{II} = \frac{8^{l}\,13^{II} \cdot 2\pi\, a^{l2} \sqrt{1-e^{l2}}}{a\, r^{l}\, T^{l}}.$$

Il faut éliminer r^{l} au moyen de l'équation de l'ellipse. Or, si l'on nomme v^{l} et ϖ^{l} les angles formés par le rayon vecteur et la distance périhélie avec une droite fixe menée sur le plan de l'orbite, et que nous supposerons être la ligne des nœuds de la planète, on aura

$$r^{l} = \frac{a^{l}\,(1-e^{l2})}{1+e^{l}\cos(v^{l}-\varpi^{l})}$$

ce qui donne

$$V^{II} = \frac{8^{l}\,13^{II} \cdot 2\pi\, a^{l} \left\{1+e^{l}\cos(v^{l}-\varpi^{l})\right\}}{a\, T^{l} \sqrt{1-e^{l2}}}$$

En nommant T la révolution sidérale de la terre, nous avons trouvé plus haut

$$\frac{8^{l}\,13^{II} \cdot 2\pi}{T} = 20^{II}.246\,;$$

par conséquent, si nous en tirons la valeur du facteur constant $2\pi \cdot 8^{l}\,13^{II}$, l'expression de V^{II} deviendra

$$V^{II} = 20^{II},246\ \frac{a^{l}\, T \left\{1+e^{l}\cos(v^{l}-\varpi^{l})\right\}}{a\, T^{l} \cdot \sqrt{1-e^{2}}}$$

On peut encore la simplifier ; car, d'après la troisième loi de Képler, on a

$$\frac{T^{2}}{T^{l2}} = \frac{a^{3}}{a^{l3}}.$$

ce qui donne $$\frac{T}{T'} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}}}$$

En substituant cette valeur de $\frac{T}{T'}$, et prenant le demi-grand axe a de l'orbe terrestre pour unité de distance, l'expression de V'' devient

$$V'' = 20'',246 \frac{\left\{1 + e\cos(v' - \varpi')\right\}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}$$

Nous sommes parvenus à cette expression en supposant l'ellipse très peu excentrique ; aussi n'est-elle qu'approchée. Si l'on cherchait la valeur rigoureuse de V'' d'après les formules du mouvement elliptique données dans la page 153 du second livre, on trouverait

$$V'' = 20'',246 \frac{\left\{1 + 2e'\cos.(v' - \varpi') + e'^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}$$

Cette expression rentre dans la précédente, lorsqu'on développe le numérateur en série et qu'on se borne à la première puissance de e'. Mais il est nécessaire de lui conserver cette généralité pour pouvoir l'appliquer aux ellipses les plus excentriques, et même aux paraboles que les comètes décrivent. Dans ce cas il faut considérer que la quantité $a'(1-e'^2)$ est la moitié du paramètre de l'orbite. Ainsi, pour appliquer la formule à une comète, il faut regarder $a'(1-e'^2)$ comme une quantité finie égale au demi-paramètre de la parabole décrite par la comète, et supposer ensuite $e' = 1$, puisque les deux axes deviennent infinis quand la parabole dégénère en ellipse, ce qui réduit leur rapport à l'unité. (Voyez *Géom. Analyt.*, pag. 186.) Si l'on nomme D' la distance périhélie de la comète, qui est égale au quart du paramètre, on aura $a'(1-e'^2) = 2D'$,
en substituant cette valeur, et faisant ensuite $e' = 1$, l'expression de V'' devient

$$V'' = 20'',246 \frac{\left\{2 + 2\cos(v' - \varpi')\right\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2D'}}$$

ou $$V'' = 20'',246 \cdot \frac{2\cos\frac{1}{2}(v' - \varpi')}{\sqrt{2D'}}$$

c'est l'expression de la vitesse pour les comètes.

Avant d'aller plus loin, faisons ici une remarque importante. Lorsque nous avons cherché la direction apparente des rayons lumineux dans l'article 87, en composant la vîtesse propre de la lumière avec les vîtesses de la terre et de l'astre que l'on observe, nous avons vu qu'il fallait prendre cette dernière dans sa direction naturelle, et celle de la terre dans une direction opposée. En conséquence, comme la terre et les planètes tournent autour du soleil dans le même sens, d'occident en orient, il faut, puisque la vîtesse de la terre est positive dans nos formules, considérer celle des planètes comme négative ; ou, si l'on veut s'énoncer d'une manière plus générale, il faut que nous regardions comme négatifs tous les mouvemens propres *directs*, et comme positifs tous les mouvemens *rétrogrades*.

Connaissant ainsi l'expression de la vîtesse dans chaque point de l'orbite, calculons maintenant sa direction, qui coïncide toujours avec la tangente de l'orbite. Si celle-ci est une ellipse peu excentrique, comme cela a lieu pour les planètes, l'angle que sa tangente forme avec une ligne fixe menée dans le plan de l'orbite, peut être développé en série, comme nous l'avons fait pour la terre, page 159. Par exemple, si nous nommons v' et ϖ' les angles formés par le rayon vecteur héliocentrique de la planète, et par sa distance périhélie avec la ligne des nœuds de l'orbite, l'angle formé par la tangente de l'ellipse avec le grand axe sera

$$90° + v' - \varpi' - e \sin (v' - \varpi')$$

en supposant toujours que l'on se borne à la première puissance de l'excentricité. Si l'on ajoute à ce résultat l'angle ϖ' formé par la distance périhélie avec la ligne des nœuds de la planète, la somme que nous désignerons par N sera l'angle formé par la direction de la tangente avec cette même ligne des nœuds. On aura ainsi

$$N = 90° + v' - e \sin (v' - \varpi').$$

Il faut maintenant déduire de ces données les cosinus des angles X'' Y'' Z'' formés par la tangente avec les trois axes des coordonnées. Or, cela est très-facile. En effet, l'angle N est mesuré sur le plan de l'orbite. Supposons que ce plan fasse avec l'écliptique un angle I. Alors on pourra regarder N comme l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle, dont un des côtés, celui qui est opposé à l'angle I, sera l'inclinaison de la tangente

sur le plan de l'écliptique, ou $90° - Z''$; et l'autre, que nous nommerons N', sera la projection de N sur ce même plan. Alors, par les principes de la trigonométrie sphérique, on aura

$$\cos Z'' = \sin N . \sin I \qquad \text{tang } N' = \text{tang } N \cos I$$

Si à l'angle N' nous ajoutons la longitude héliocentrique du nœud de l'orbite représentée par n, la somme $N' + n$ sera l'angle que la projection de la vîtesse sur l'écliptique forme avec la ligne des équinoxes, et l'on aura

$$\text{tang } (N' + n) = \frac{\text{tang } N' + \text{tang } n}{1 - \text{tang } N' \text{ tang } n}$$

ou bien $$\text{tang } (N' + n) = \frac{\text{tang } N \cos I + \text{tang } n}{1 - \text{tang } N \text{ tang } n \cos I}$$

Or, en général, quand la projection d'une ligne droite sur le plan des $x\,y$ fait un angle α avec l'axe des x, on a, par les formules de la Géométrie Analytique,

$$\frac{\cos Y''}{\cos X''} = \text{tang } \alpha$$

(Voyez *Géomét. Analyt.*, pag. 52.) En joignant à ces résultats l'équation de condition qui existe toujours entre les carrés des cosinus des trois angles $X''\ Y''\ Z''$, on aura dans le cas actuel

$$\cos Z'' = \sin N \sin I,$$
$$\cos Y'' = \cos X'' \text{ tang } (N' + n)$$
$$\cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' = 1.$$

Les deux dernières donnent d'abord

$$\cos^2 X'' + \cos^2 X'' \text{ tang}^2 (N' + n) = \sin^2 Z''$$

ou bien

$$\cos^2 X'' = \sin^2 Z'' \cos^2 (N' + n);$$

d'où l'on tire $$\cos X'' = \sin Z'' . \cos (N' + n),$$

et ensuite $$\cos Y'' = \sin Z'' . \sin (N' + n).$$

Or, on a en général

$$\cos (N' + n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 (N' + n)}}$$

$$\sin (N' + n) = \frac{\text{tang } (N' + n)}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 (N' + n)}}.$$

Substituant pour tang $(N' + n)$ sa valeur, et réduisant le dénominateur, on trouve

$$\cos(N' + n) = \frac{\cos n - \operatorname{tang} N \sin n \cos I}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 N \cos^2 I}}$$

$$\sin(N' + n) = \frac{\sin n + \operatorname{tang} N \cos n \cos I}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 N \cos^2 I}}$$

Or $\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 N \cos^2 I} = \frac{\sqrt{\cos^2 N + \sin^2 N \cos^2 I}}{\cos N} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 N \sin^2 I}}{\cos N} = \frac{\sin Z''}{\cos N}$

par conséquent

$$\cos(N' + n) = \frac{\cos N \cos n - \sin N \sin n \cos I}{\sin Z''};$$

$$\sin(N' + n) = \frac{\cos N \sin n + \sin N \cos n \cos I}{\sin Z''}$$

Enfin, en substituant ces valeurs simplifiées dans les expressions de cos X'' et cos Y'', on trouve

$$\cos X'' = \cos N \cos n - \sin N \sin n \cos I,$$

$$\cos Y'' = \cos N \sin n + \sin N \cos n \cos I,$$

$$\cos Z'' = \sin N \sin I,$$

valeurs qui satisfont, en effet, à la condition

$$\cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' = 1,$$

comme on peut s'en assurer facilement.

Rappelons-nous maintenant que les expressions général de l'aberration en longitude et en latitude, trouvées dans la page 9 étaient

$$l = l' + \frac{V''}{\cos \lambda'} \left\{ \cos l' \cos Y'' - \sin l' \cos X'' \right\}$$

$$\lambda = \lambda' - V'' \left\{ \sin \lambda' \cos l' \cos X'' + \sin \lambda' \sin l' \cos Y'' - \cos \lambda' \cos Z'' \right\}.$$

Je n'en rapporte qu'un seul terme, parce que tous les autres sont de même forme. En substituant dans ces expressions, pour cos X''. cos Y'', cos Z'', les valeurs que nous venons d'obtenir, elles prennent la forme suivante

$$l = l' + \frac{V''}{\cos \lambda'} \left\{ \cos N \sin (n - l') + \sin N \cos I \cos (n - l') \right\}$$

$$\lambda = \lambda' - V'' \left\{ \sin \lambda' \cos N \cos (n - l') - \sin \lambda' \sin N \cos I \sin (n - l') - \cos \lambda' \sin N \sin I \right\}.$$

Il est facile de vérifier ces expressions; car, en supposant l'inclinaison I nulle, ainsi que λ^{I}, ce qui est le cas d'une planète qui parcourrait le plan de l'écliptique, on doit retomber sur les résultats que nous avons trouvés pour le mouvement apparent du soleil. En effet, dans ce cas, elles se réduisent aux suivantes :

$$l = l^{I} + V^{II} \sin\left(N + n - l^{I}\right),$$
$$\lambda = 0 ;$$

et comme alors $N + n$ est l'angle formé par le rayon vecteur héliocentrique de la planète avec la ligne des équinoxes, angle que nous avons désigné précédemment par X^{II} dans les formules (2) de la page 155, on voit qu'en effet ces expressions s'accordent avec celles que l'on tireroit des équations (2) pour l'aberration du soleil.

Relativement aux planètes, l'inclinaison I n'est pas nulle; mais elle est, en général, peu considérable. Il y aura donc de l'avantage à se rapprocher du cas précédent, et l'on y parviendra en introduisant $1 - 2\sin^{2}\frac{1}{2}I$ au lieu de $\cos I$; ce qui réunira tous les termes indépendans de I en un seul. On aura de cette manière

$$l = l^{I} + \frac{V^{II}}{\cos\lambda^{I}}\left\{\sin\left\{N + n - l^{I}\right\} - 2\sin^{2}\tfrac{1}{2}I\sin N\cos\left(n - l^{I}\right)\right\}$$

$$\lambda = \lambda^{I} - V^{II}\left\{\sin\lambda^{I}\cos\left\{N + n - l^{I}\right\} - \cos\lambda^{I}\sin N\sin I + 2\sin\lambda^{I}\sin N\sin^{2}\tfrac{1}{2}I\sin\left(n - l^{I}\right)\right\}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à substituer pour V^{II} et N leurs valeurs, qui, en se bornant à la première puissance de l'excentricité, sont

$$V^{II} = \frac{-20'',246}{\sqrt{a^{I}}}\left\{1 + e^{I}\cos\left(v^{I} - \varpi^{I}\right)\right\},$$

$$N = 90^{\circ} + v^{I} - e\sin\left(v^{I} - \varpi^{I}\right)$$

Je donne à V^{II} le signe négatif, parce que le mouvement des planètes est direct. En substituant d'abord la valeur de l'angle N sous les signes de sinus et de cosinus, nous aurons

$$\sin\left\{N + n - l^{I}\right\} = \cos\left(v^{I} + n - l^{I}\right) + e^{I}\sin\left(v^{I} - \varpi^{I}\right)\sin\left(v^{I} + n - l^{I}\right)$$

$$\cos\left\{N + n - l^{I}\right\} = -\sin\left\{v^{I} + n - l^{I}\right\} + e^{I}\sin\left(v^{I} - \varpi^{I}\right)\cos\left(v^{I} + n - l^{I}\right)$$

$$\sin N = \cos v^{I} + e^{I}\sin\left(v^{I} - \varpi^{I}\right)\sin v^{I}$$

$$\cos N = -\sin v^{I} + e^{I}\sin\left(v^{I} - \varpi^{I}\right)\cos v^{I}.$$

Ensuite, effectuant la multiplication par V'', il viendra

$$\frac{1}{\varepsilon} = l' - \frac{20'',246}{\cos\lambda'\sqrt{a'}}\left\{\begin{array}{l}\cos(v'+n-l') - 2\sin^2\tfrac{1}{2}I\cdot\cos(n-l')\cos v' \\ + e'\cos(\varpi'+n-l') - 2e'\sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(n-l')\cos\varpi'\end{array}\right\}$$

$$\lambda = \lambda' - \frac{20'',246}{\sqrt{a'}}\left\{\begin{array}{l}\sin\lambda'\sin(v'+n-l') + \cos\lambda'\sin I\cos v' \\ - 2\sin\lambda'\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(n-l')\cos v' \\ + e'\sin\lambda'\sin(\varpi'+n-l') + e'\cos\lambda'\sin I\cos\varpi' \\ - 2e'\sin\lambda'\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(n-l')\cos\varpi'\end{array}\right\}$$

Telles sont les valeurs des aberrations que le mouvement propre des planètes produit sur leur longitude et sur leur latitude géocentriques vraies, représentées par l' et λ' dans ces formules. v' et ϖ' sont les angles formés par le rayon vecteur héliocentrique, et la distance périhélie de la planète avec la ligne des nœuds de l'orbite ; n est la longitude héliocentrique du nœud ascendant. Si l'on suppose l'inclinaison I égale à zéro, ainsi que λ', ce qui est le cas d'une planète qui se mouvrait dans le plan de l'écliptique, l'aberration en latitude devient nulle, comme cela doit être ; l'aberration en longitude se réduit à ses deux premiers termes. De plus, l'orbite coïncidant avec l'écliptique, $v' + n$ devient la longitude héliocentrique de la planète, $\varpi' + n$ est celle de son périhélie; et enfin, en supposant $a' = 1$, on retrouve les résultats que nous avons obtenus plus haut pour l'aberration en longitude due au mouvement apparent du soleil.

Les formules générales que nous venons de trouver, page 172, s'appliqueront également aux comètes, il suffira d'y mettre pour V'' et N les valeurs qui conviennent à la parabole. Nous avons déjà formé la valeur de V'' dans la page 168 ; quant à celle de N, il faut se rappeler que dans la page 158 nous avons trouvé l'expression générale de l'angle formé par la tangente de l'ellipse avec le grand axe. Cet angle, qui est précisément $N - \varpi'$, était donné par l'équation

$$\text{tang}\{N-\varpi'\} = -\frac{\{e+\cos(v'-\varpi')\}}{\sin(v'-\varpi')}$$

dans la parabole $e = 1$, et cette équation devient

$$\text{tang}\,(N-\varpi') = -\frac{\{1+\cos(v'-\varpi')\}}{\sin(v'-\varpi')}$$

Si l'on y met pour $\sin(v'-\varpi')$ et $\cos(v'-\varpi')$ leurs valeurs en fonction de l'arc sous double, on trouve

$$\text{tang}\,(N-\varpi') = -\frac{1}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(v'-\varpi')}$$

par conséquent

$$N - \varpi' = 90 + \tfrac{1}{2}(v' - \varpi')$$

et enfin

$$N = 90 + \tfrac{1}{2}(v' + \varpi')$$

on a de plus

$$V'' = \frac{20'',246}{\sqrt{\tfrac{1}{2}D'}} \cos \tfrac{1}{2}(v' - \varpi')$$

Substituant ces quantités dans nos formules générales de la page 172, et faisant V'' négatif comme pour une planète, ce *suppose le mouvement direct*, on aura pour les comètes

$$l = l' - \frac{20'',246 \cdot \cos \tfrac{1}{2}(v' - \varpi')}{\cos \lambda' \sqrt{\tfrac{1}{2}D'}} \left[\cos \left\{ \tfrac{1}{2}(v' + \varpi') + n - l' \right\} \right.$$

$$\left. - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos \left\{ n - l' \right\} \cos \tfrac{1}{2}(v' + \varpi') \right]$$

$$\lambda = \lambda' - \frac{20'',246 \cdot \cos \tfrac{1}{2}(v' - \varpi')}{\sqrt{\tfrac{1}{2}D'}} \left[\sin \lambda' \sin \left\{ \tfrac{1}{2}(v' + \varpi') + n - l' \right\} \right.$$

$$\left. + \cos \lambda' \sin I \cos \tfrac{1}{2}(v' + \varpi') - 2 \sin \lambda' \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin (n - l') \cos \tfrac{1}{2}(v' + \varpi') \right]$$

Si le mouvement héliocentrique de la comète était rétrograde, il faudrait changer les signes des termes qui expriment les aberrations, c'est-à-dire qu'il faudrait mettre $+ 20'',246$ au lieu de $- 20'',246$. De plus, il faut se rappeler que v' et ϖ' expriment les angles formés dans l'orbite par le rayon vecteur et par l'axe de la section conique avec la ligne des nœuds, dont n est la longitude héliocentrique.

Les aberrations particelles que nous venons de calculer sont celles qui résultent du mouvement propre de la planète ou de la comète. Il faut toujours y joindre celles qui sont produites par le mouvement de la terre, et dont l'expression générale est

$$l = l' - \frac{20'',246}{\cos \lambda'} \left\{ \cos (\odot - l') + e \cos (\varpi - l') \right\}$$

$$\lambda = \lambda' - 20'',246 \sin \lambda' \left\{ \sin (\odot - l') + e \sin (\varpi - l') \right\}$$

l' et λ' sont, comme ci-dessus, les longitudes et les latitudes géocentriques vraies de l'astre à l'instant que l'on considère, ϖ est la longitude du périgée de l'orbe solaire, e est son excentricité. Cette première partie de l'aberration est commune à tous les astres.

CHAPITRE XII.

Des Stations et des Rétrogradations des Planètes.

93. Lorsque dans les recherches physiques on a le bonheur de parvenir à la vérité, elle ne sert pas seulement pour prévoir les phénomènes et trouver la raison de ceux qui paraissaient auparavant inexplicables ; mais, ce qui est également précieux, tous les faits précédens s'éclairent, leurs lois se simplifient, et l'on peut, en quelque sorte, les embrasser plus facilement. Cette double influence qui s'étend sur les recherches futures et sur les découvertes passées est le caractère le plus ordinaire de la vérité, et l'indice le plus sûr qu'on la connaît.

94. Nous allons en voir une preuve dans l'explication de plusieurs phénomènes bizarres que présente le mouvement des planètes, vu de la terre. Ce mouvement ne paraît pas toujours dirigé dans le même sens, comme il l'est réellement lorsqu'on le rapporte au centre du soleil : il est tantôt direct, tantôt nul, tantôt rétrograde. Ainsi, quand Vénus passe au-delà du soleil, par rapport à la terre, son mouvement comparé aux étoiles paraît direct ; quand elle passe entre la terre et le soleil, il paraît rétrograde ; enfin, dans la transition d'un de ces états à l'autre il devient tout-à-fait insensible, et Vénus paraît stationnaire. Mercure offre les mêmes apparences, et les planètes supérieures en offrent d'analogues ; elles sont directes dans leurs conjonctions, rétrogrades dans leurs oppositions.

Ces phénomènes se nomment les *stations* et les *rétrogradations* des planètes.

95. Ils sont faciles à expliquer dans toute hypothèse, pour Mercure et Vénus, dont l'orbite n'embrasse pas la terre ; car ces planètes tournant autour du soleil toujours dans le même sens et d'occident en orient, suivant l'ordre des signes, leur mouvement doit paraître direct lorsqu'elles vont de la digression occidentale à l'orientale, en passant au-delà le soleil ; et il doit paraître rétrograde, lorsqu'elles reviennent de la digression orientale à l'occidentale, en passant au-devant de cet astre, par rapport à la terre. Le mouvement annuel de la terre ou celui du soleil ne fait que modifier ces apparences, en faisant varier les points des stations.

Mais celles que présentent les autres planètes ne sont pas si faciles à expliquer. Il semble, en effet, que leur mouvement devrait nous paraître constamment direct, puisque nous sommes placés au-dedans de leurs orbites et qu'elles tournent toujours dans le même sens autour du soleil ; mais il faut faire attention que le soleil emporte avec lui sur l'écliptique l'orbite de ces planètes. Ce mouvement peut, dans certains cas, contrarier le mouvement de la planète, et le favoriser dans d'autres, selon qu'il est dirigé dans le même sens ou dans le sens opposé ; et comme l'effet combiné de ces deux vitesses détermine la direction apparente de la planète, on conçoit qu'il peut en résulter les stations et les rétrogradations observées.

96. Mais pour juger jusqu'à quel point cette explication s'accorde avec les phénomènes, et savoir si le mouvement de la terre les représente avec plus de simplicité, il devient nécessaire de les exposer avec quelque détail. Comme leur marche est la même pour toutes les planètes supérieures, il suffira d'en considérer une seule ; nous prendrons pour exemple Mars.

Il y a des tems où Mars paraît sur l'horizon peu d'instans avant le soleil. Quelques jours auparavant, il était plongé dans les rayons de cet astre, et il était impossible de l'apercevoir. Il sort donc alors de la conjonction. C'est depuis cette époque que nous allons suivre ses mouvemens.

Si l'on observe jour par jour sa hauteur méridienne et son ascension droite, on voit d'abord que son mouvement est *direct*, c'est-à-dire dirigé d'occident en orient, comme celui du soleil. On reconnaît cette direction, parce que ses ascensions droites augmentent journellement. Mars, qui se trouve alors à l'occident du soleil, tend donc à s'en rapprocher; mais le mouvement propre de cet astre est plus rapide que le sien. De-là il arrive que les deux astres, au lieu de se rapprocher, s'éloignent. En même tems le mouvement de Mars se ralentit. Il devient tout-à-fait insensible après un intervalle d'environ une année. Alors Mars se trouve éloigné du Soleil d'environ 152° de la division décimale, et pendant quelques jours la planète comparée aux étoiles paraît stationnaire. Mais ensuite elle prend un mouvement rétrograde, c'est-à-dire dirigé d'orient en occident; et comme le soleil, au contraire, marche toujours d'occident en orient, ces deux astres s'éloignent plus rapidement l'un de l'autre. En suivant cette nouvelle marche, Mars arrive à 200° du soleil; il se couche alors quand cet astre se lève, et se trouve opposé à lui par rapport à la terre: c'est alors que sa vîtesse rétrograde est la plus grande. En continuant sa marche dans ce sens, Mars se rapproche de plus en plus du soleil, et les mouvemens opposés de ces deux astres conspirent pour diminuer la distance angulaire qui les sépare. Mais en même tems la vîtesse rétrograde de Mars s'affaiblit; elle devient nulle, lorsque la distance angulaire des deux astres n'est plus que de 152°. Alors

Mars comparé aux étoiles, paraît stationnaire. L'arc de rétrogradation qu'il a décrit dans le ciel, est d'environ 18°, et le tems qu'il a employé à le décrire est de 73 jours. Après cet intervalle, Mars reprend son mouvement direct, qui tend à l'éloigner du soleil en le ramenant sur la partie de l'équateur qu'il a déjà parcourue ; mais le soleil ayant un mouvement plus rapide, se rapproche peu-à-peu de lui, et l'atteint après un intervalle d'environ une année ; alors Mars revenu à la conjonction, se plonge de nouveau dans les rayons du soleil, se lève avec cet astre, et redevient invisible pour nous.

97. Ces irrégularités sont communes à toutes les planètes supérieures, avec les modifications que comportent la différence de leurs mouvemens. Il y a même des différences sensibles dans l'étendue et la durée des rétrogradations d'une même planète. En voici les valeurs moyennes relativement aux planètes principales.

	DISTANCES ANGULAIRES de la Planète et du Soleil à l'instant de la station en grades.	ARC moyen de Rétrogradation en grades.	DURÉE moyenne de la Rétrogradation.	DURÉE moyenne de la Révolution Synodique.
Mercure.	20°.	15°.	23 jours.	118 jours.
Vénus..	32°.	18°.	42	584
Mars...	152°.	18°.	73	780
Jupiter..	128°.	11°.	121	399
Saturne.	121°.	7°.	139	378
Uranus..	115°.	4°.	151	370

98. Il s'agit maintenant d'expliquer ces phénomènes dans la supposition du mouvement de la terre. Or, cela est extrêmement facile, et ils en sont une conséquence si frappante, qu'elle suffirait seule pour faire adopter le reste de cette théorie.

Pour bien comprendre ceci, servons-nous d'une figure. Plaçons le soleil en O, *fig.* 20, au centre des mouvemens planétaires. Traçons autour de lui un cercle $B\ C\ D\ E$ pour représenter l'orbite annuel de la terre, et un autre plus grand $B'\ C'\ D'\ E'$, qui sera celui d'une planète supérieure, par exemple, de Jupiter. Prenons en outre sur le premier de ces cercles, des arcs égaux $B\,C$, $C\,D$, $D\,E$, et sur le second, d'autres arcs $B'\,C'$, $C'\,D'$, $D'\,E'$, aussi égaux entr'eux, qui seront ceux que Jupiter décrit dans le même intervalle de temps. Ceux-ci seront proportionnellement plus petits que les précédens, à cause du mouvement plus lent de Jupiter, c'est-à-dire qu'ils répondront à un plus petit nombre de degrés sur son orbite. Supposons maintenant que la terre étant en B, Jupiter soit en B'; il nous paraîtra en B'' sur la sphère céleste, dans le prolongement de la ligne droite $B\,B'$. Maintenant, si la terre passe de B en C, et Jupiter de B' en C' dans le même tems, nous le verrons passer en C'' sur la sphère céleste, et son mouvement paraîtra direct, selon l'ordre des signes. La terre allant ensuite de C en D, et Jupiter de C' en D', ce mouvement paraîtra toujours direct; mais peu-à-peu la terre commencera à s'interposer plus directement entre le soleil et la planète. Lorsqu'elle sera en F, Jupiter paraîtra en F'': et il semblera être retourné en arrière sur la sphère céleste. Dans le passage d'une de ces directions à l'autre, il aura paru stationnaire, ce qui sera arrivé tandis que la terre décrivait l'arc $E\,F$. La terre arrivant en G, et Jupiter en G', en opposition avec

le soleil, on le verra en G'' sur la sphère céleste, et déjà il semblera reculé en arrière de tout l'arc $E''\ G''$, quoiqu'en effet il ait toujours continué à suivre sa marche directe et uniforme dans son orbite. Jupiter et la terre continuant à marcher dans le même sens, la rétrogradation apparente continuera aussi de la même manière ; mais sa vitesse diminuera à mesure que le mouvement propre de la terre devenant plus oblique sur le rayon visuel mené à la planète, altérera moins le mouvement propre de Jupiter. Enfin la rétrogradation cessera tout-a-fait, lorsque la terre sera parvenue en un point I de son orbite, tel que la direction de sa vitesse, à cet instant, soit exactement dirigée suivant le rayon visuel mené à la planète. Alors si Jupiter est en I', il paraîtra en I'' sur la sphère céleste, et semblera de nouveau stationnaire. Quand ensuite la terre viendra de I en K, et Jupiter en K', il se trouvera avoir décrit l'arc $I''\ K''$ suivant l'ordre des signes. A partir de cette époque, il reprendra son mouvement direct sur la sphère céleste. Toute la rétrogradation comprendra donc l'arc $E''\ I''$, et il l'aura faite en décrivant sur son cercle l'arc $E'\ I'$, pendant que la terre décrivait l'arc $E\ I$ sur le sien. Ceci doit s'entendre de Mars, de Saturne et de toutes les autres planètes supérieures. Seulement ces rétrogradations sont plus fréquentes dans Saturne, parce que son mouvement est plus lent que celui de Jupiter ; ensorte que la terre le rejoint plutôt. Au contraire, elles le sont moins dans Mars, dont le mouvement est plus rapide, ce qui fait que la terre emploie plus de tems à le rejoindre. On voit avec quelle merveilleuse simplicité le mouvement de la terre se prête à rendre raison de toutes ces bizarreries. C'est à Copernic que l'on doit d'avoir fait revivre l'idée de ce mouvement, déjà avancée par d'anciens philosophes, mais qu'il a le premier

prouvée d'une manière complette, en montrant avec quelle simplicité et quelle exactitude elle satisfait aux observations.

Si toutes les planètes se mouvaient comme la terre dans le plan de l'écliptique ; si, de plus, leurs orbites et celle de la terre étaient circulaires, ce qui rendrait tous les mouvemens uniformes, les époques des rétrogradations de chaque planète seraient constantes ; elles reviendraient après une révolution synodique, et leur durée et leur étendue seraient constantes aussi. Mais l'inclinaison des orbites et leur ellipticité troublent la simplicité de ces rapports et influent sur les époques aussi bien que sur les durées des rétrogradations. Malgré cette complication on conçoit que la cause optique de ces apparences étant connue, leur détermination exacte est un problème purement géométrique dont la solution doit se déduire des formules qui expriment le mouvement de chaque planète, en ayant égard à l'ellipticité et à l'inclinaison de son orbite. Mais comme l'observation des stations et des rétrogradations n'est d'aucun usage, nous croyons inutile d'entrer dans cette généralité.

NOTE.

Pour donner seulement un essai de ce calcul, nous considérerons le cas simple où les orbites des planètes seraient circulaires et comprises dans le plan de l'écliptique. Dans ce cas, leurs mouvemens angulaires héliocentriques seraient uniformes. Partons de l'époque où la planète et la terre ont dû se trouver du même côté du soleil et sur la même ligne droite ; ce serait l'instant de l'opposition pour les planètes supérieures. Nommons t les tems comptés à partir de cette époque. Les arcs décrits par la terre et par la

planète, pendant le tems t, pourront être représentés par nt $n't$, n et n' étant des constantes. Rapportons leurs positions héliocentriques à deux coordonnées rectangulaires $x\ y$, dont la première soit dirigée suivant le rayon vecteur où s'est fait la coïncidence ; nous aurons, en nommant a et a' les rayons des orbites,

pour la terre	$x = a \cos nt$	$y = a \sin nt$
pour la planète	$x' = a' \cos n't$	$y' = a' \sin n't$

Maintenant si l'on conçoit une ligne droite menée de la terre à la planète, à un instant quelconque, cette droite fera avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique sera exprimée par

$$\frac{y'-y}{x'-x}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{a \sin nt - a' \sin n't}{a \cos nt - a' \cos n't}.$$

Lorsque la planète est stationnaire, le rayon visuel reste parallèle à lui-même ; ainsi, pour déterminer le tems t, où ce phénomène a lieu, il faut exprimer qu'alors, en faisant varier t d'une quantité fort petite et arbitraire, que nous pouvons représenter par $\pm \omega$, la fonction précédente n'éprouve aucune variation. Cette condition est absolument pareille à celle dont nous avons fait usage dans le second livre, en exposant la méthode des moindres carrés. Elle se réduit à déterminer t de manière que la fonction dont il s'agit soit un *minimum* ou un *maximum*. En opérant comme nous avons fait alors, on trouve que la valeur de t, qui jouit de cette propriété, doit satisfaire à la relation suivante :

$$\{a \cos nt - a' \cos n't\}\{an \cos nt - a'n' \cos n't\}$$
$$+ \{a \sin nt - a' \sin n't\}\{an \sin nt - a'n' \sin n't\} = 0$$

En effectuant les multiplications indiquées, cette équation prend une forme plus simple ; elle devient

$$a^2 n + a'^2 n' - a a' (n + n') \cos (n - n') t = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos (n - n') t = \frac{a^2 n + a'^2 n'}{a a' (n + n')}.$$

Cette condition déterminera l'angle $(n - n')t$, et par conséquent t, lorsque les quantités a, a', n, n' seront connues.

On a vu plus haut qu'en nommant T le tems de la révolution

sidérale d'une planète, a le demi-grand axe de son orbite, et K une constante commune à toutes les planètes, on a par la troisième loi de Képler

$$T^2 = K^2 a^3 \; ; \quad T'^2 = K^2 a'^3.$$

Dans le système planétaire, K est égal à la révolution sidérale de la terre, ou à 365j,256383.

De plus, en nommant π la demi-circonférence, dont le rayon est l'unité, il est facile de voir que l'on a

$$n = \frac{2\pi}{T} \qquad n' = \frac{2\pi}{T'}$$

puisque la planète doit avoir fait une révolution entière sur son orbite, quand le tems t est augmenté de T, ou d'une révolution sidérale. Ces diverses équations donnent a et a' en fonction de T et de T'; et comme n et n' se trouve déjà exprimée de la même manière, on voit que l'on peut introduire uniquement les quantités T, T' dans l'expression de $\cos(n - n')\,t$. Or, en faisant cette substitution, K disparaît aussi bien que 2π, et il reste

$$\cos(n - n')\,t = \frac{\left\{T^{\frac{1}{3}} + T'^{\frac{1}{3}}\right\}(T\,T')^{\frac{1}{3}}}{T + T'}.$$

Cette expression très-simple fera connaître l'angle $(n - n')\,t$ pour chaque planète; soit θ sa valeur, on aura

$$t = \frac{\theta}{n - n'} \qquad \text{ou bien} \qquad t = \theta\,\frac{T\,T'}{2\pi(T' - T)}$$

Comme un cosinus ne change point de valeur quand la quantité qu'il comprend change de signe, on voit qu'il y aura deux valeurs de θ qui satisferont au problème, savoir $+\theta$ et $-\theta$. Il y aura donc deux valeurs de t et deux stations, l'une avant la conjonction, l'autre après. Elles seront également éloignées de ce point, et par conséquent $2t$ sera la durée totale de la rétrogradation.

Si de plus on veut connaître l'étendue de la rétrogradation, et la distance de la planète au soleil à l'instant où elle devient stationnaire, rien n'est plus facile. Pour cela il faut considérer le triangle rectiligne $P_1 T_1 S_1$ formé par le soleil, la terre et la planète (*Voy.* fig. 21). Nommons P_1 T_1 S_1 les angles de ce triangle qui correspondent à ces trois corps. Nous venons de déterminer l'angle au soleil S_1, il est égal à $(n - n')\,t$. Nous connaissons de plus le rapport des côtés qui le comprennent: ce sont les rayons des orbites, ou a et a'. Nous aurons donc la différence $T_1 - P_1$ des deux autres angles par

la proportion connue $a' + a : a' - a :: \text{tang}\frac{1}{2}(T_1 + P_1) : \text{tang}\frac{1}{2}(T_1 - P_1)$, qui, en mettant pour a, a_1 et $T_1 + P_1$ leurs valeurs, donne

$$\text{tang}\frac{1}{2}(T_1 - P_1) = \frac{T'^{\frac{2}{3}} - T^{\frac{2}{3}}}{T'^{\frac{2}{3}} + T^{\frac{2}{3}}} \cdot \text{tang}\frac{1}{2}\{200^\circ - S_1\}$$

connoissant $T_1 - P_1$ et $T_1 + P_1$ on connaîtra T_1. C'est la distance angulaire de la planète au soleil, à l'instant de la station.

Or, à ce même instant, l'angle formé au centre du soleil entre le rayon vecteur de la terre et l'axe des x est égal à nt, ou au mouvement héliocentrique de la terre depuis l'opposition. Le supplément de cet angle, ou $200^\circ - nt$, exprime donc l'angle $S_1 T_1 X_1$ compris entre le soleil et le point de la sphère céleste où l'opposition est arrivée. Si de cette distance on retranche l'angle T_1 la différence $200^\circ - nt - T_1$ exprimera l'angle $X T_1 P_1$, c'est-à-dire le mouvement apparent et géocentrique de la planète depuis l'opposition. C'est la moitié de l'arc de rétrogradation; en le doublant on aura $2\{200^\circ - nt - T_1\}$ pour la valeur totale de cet angle.

Appliquons, par exemple, ces formules à Jupiter. Nous aurons d'abord, suivant le tableau de la page 37,

pour la terre..... $T = 365^j,256$

pour Jupiter..... $T' = 4332^j,596$

ces nombres étant substitués dans l'expression générale de $\cos(n - n')t$, on en tire en degrés sexagésimaux

$(n - n')t = \pm 54^\circ.25'.50'' ; \quad t = \pm 60^j,31 ; \quad 2t = 120^j,62$

$2t$ est la durée totale de la rétrogradation. On aura ensuite $T_1 + P_1$ ou $200^\circ - S_1 = 125^\circ.34'10''$, ce qui donne $T_1 - P_1 = 105^\circ.35'.50$. De-là on tire l'angle à la terre $T_1 = 115^\circ.35'0''$, ou en grades $T_1 = 128^g,4259$. Pendant le tems t le mouvement héliocentrique de Jupiter est $nt = 4^\circ 59' 10''$. Ajoutons cette quantité à $(n - n')t = 54^\circ.25'.50''$, nous aurons $nt = 59^\circ.25'.0''$, dont le supplément est $120^\circ.35'.0''$; c'est la valeur de l'angle $S_1 T_1 X_1$. Si l'on en retranche l'angle $T_1 = 115^\circ.35',0''$, on aura $5^\circ.0'.0''$ pour le mouvement géocentrique de la planète depuis l'opposition; le double de cette quantité exprimera donc l'étendue totale de la rétrogradation, qui sera de $10^\circ.0'0''$, ou en grades, $11^g,1111$. Ce sont les mêmes résultats que nous avons rapportés dans le texte, en négligeant les fractions, qui ne sont d'aucune importance dans cette évaluation.

CHAPITRE XIII.

Des vraies Dimensions des Orbes Planétaires.

99. Dans les chapitres précédens, nous avons déterminé les distances des planètes au soleil en partie du grand axe de l'orbe terrestre. Nous connoissons ainsi les rapports de ces distances entr'elles ; et nous en avons formé le tableau dans la page 37. Mais nous ne savons rien sur leur grandeur absolue ; et si nous en voulons prendre une idée sensible, il faut les exprimer en rayons terrestres, la plus grande de toutes les mesures qui soient à notre portée.

100. Cela serait facile, si l'on avait, pour un seul instant, la distance d'une planète à la terre exprimée de cette manière ; car les positions géocentriques de la planète et du soleil étant connues pour la même époque, par la théorie des mouvemens, de la planète et de la terre, un simple calcul trigonométrique donnerait la distance de la planète au soleil, exprimée pareillement en rayons terrestres. On connaît déjà la valeur de cette distance en parties du grand axe de l'orbe de la terre ; on pourrait donc convertir ce grand axe dans la même mesure ; alors la seconde loi de Képler donnerait tous les grands axes et toutes les dimensions des orbites exprimées de la même manière, d'après la seule durée des révolutions.

101. La parallaxe d'une seule planète, si elle était connue, donnerait immédiatement sa distance à la terre, exprimée en rayons terrestres ; mais ces parallaxes sont en général trop petites pour pouvoir être observées avec exactitude. Celle de Mars est la seule qui devienne bien sensible dans certaines

circonstances favorables à l'observation. C'est lorsque cette planète est périhélie, et qu'elle approche en même tems de l'opposition. Alors sa distance à la terre est la plus petite possible, et sa parallaxe est la plus grande.

Par exemple, le 6 octobre 1751, Mars n'étant pas très-éloigné de l'opposition, sa parallaxe devint sensible, et les observations comparées de Largentin et de Lacaille la donnèrent de 76″ décimales, ou 24″,6 sexagésimales, comme on l'a vu dans la page 250 du premier livre, et il en résulte que la distance de Mars à la terre, à cette époque, était de 8371 rayons terrestres.

Cette même distance conclue de la théorie du mouvement elliptique, était alors exprimée par 0,4354, le demi-grand axe de l'orbe terrestre étant pris pour unité.

D'où il est aisé de conclure que le demi-grand axe exprimé en rayons terrestres, a pour valeur $\frac{8371}{0,4354}$ ou 19226.

Les parallaxes des astres étant réciproques à leurs distances, celle du soleil sera égale à $\frac{76''.8371}{19226}$ ou à 33″ décimales dans sa distance moyenne.

Les rapports des distances des planètes au soleil étant connus par les lois de Képler, on pourrait, d'après ces résultats, trouver les valeurs de toutes ces distances exprimées en rayons terrestres.

102. Malheureusement, la parallaxe de Mars est si petite, que les erreurs des observations peuvent avoir sur elle une influence très-considérable, qui altère les valeurs des distances, à-peu-près, dans la même proportion. Si l'on commet, par exemple, dans la parallaxe horizontale, une erreur égale à 12″ décimales, ou un sixième de sa valeur totale, il en résultera pareillement

sur l'évaluation de la distance, une erreur d'un sixième (*). Cependant on ne peut répondre d'une si petite erreur sur une observation aussi délicate ; car 12'' décimales ne forment pas la moitié de l'épaisseur des fils que l'on tend dans l'intérieur des lunettes pour observer. On ne doit donc regarder les résultats précédens que comme une première approximation, qui peut faire juger que la parallaxe du soleil est extrêmement petite, et sa distance à la terre très-considérable.

On a trouvé un moyen beaucoup plus exact dans l'observation des passages de Vénus sur le soleil.

103. Nous avons vu que Vénus, lorsqu'elle passe entre la terre et le soleil, se projette sur le disque de cet astre avec l'apparence d'une tache noire ; et par l'effet de son mouvement propre, combiné avec celui du soleil, elle paraît décrire une corde de ce disque. Ces cordes obser-

(*) Ceci n'est vrai qu'approximativement. D'après ce qui a été dit dans le chap. XIX du premier livre, la relation des parallaxes horizontales et des distances est

$$D = \frac{R}{\sin \Pi}$$

ou en réduisant tout en arc

$$D = R \cdot \frac{63^{\circ}.6619}{\Pi}$$

Si l'on se trompe de $\frac{1}{6}$ en plus ou en moins sur la parallaxe P, la vraie distance sera

$$D = R \cdot \frac{63^{\circ}.6619}{\Pi} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{1}{6}}$$

Et comme $\frac{1}{1 \pm \frac{1}{6}} = 1 \mp \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \mp$ etc., on voit que l'erreur de la distance est aussi, à fort peu près, égale à $\frac{1}{6}$ de sa valeur totale, en négligeant $\frac{1}{36}$, et les puissances supérieures de cette fraction.

vées de différens points de la terre, sont très-sensiblement différentes. Cela vient de la parallaxe de Vénus, qui fait que les divers observateurs ne rapportent pas cette planète aux mêmes points du disque du soleil. Ces différences influent considérablement sur les durées des passages, que l'on peut observer avec beaucoup de précision, et elles donnent, avec une extrême exactitude, la différence des parallaxes de Vénus et du soleil.

Supposons, en effet, la terre en T, *fig.* 21, Vénus en V, et le soleil en S; un observateur placé au centre même de la terre, verrait Vénus sur le prolongement du rayon vecteur TV; cette planète lui paraîtrait répondre au point S, sur le disque du soleil, et dans ses positions successives; elle décrirait la ligne DS; mais d'autres observateurs placés en O' et en O'' sur la surface terrestre, verront Vénus en V' et en V''; elle paraîtra au premier décrire la corde $D'V'$, au second la corde $D''V''$. Ces effets tiennent évidemment à la différence qui existe entre les parallaxes de Vénus et du Soleil, et le calcul donne cette différence d'après la durée des passages, précisément par les mêmes formules qui servent à calculer les éclipses de soleil. (*)

Or, par la théorie des mouvemens elliptiques, on connaît, pour la même époque, les rapports des distances de Vénus et du soleil à la terre. On connaît donc aussi le rapport des parallaxes de ces astres, puisqu'elles sont

(*) On trouvera dans une note à la fin du Livre, un exemple numérique de cette importante application; les observations dont j'ai fait usage sont celles du dernier passage de Vénus, qui eut lieu le 5 juin 1769. Les formules que j'ai données pour les éclipses s'appliquent immédiatement à ces passages, sans qu'il soit besoin d'y faire aucune modifications, et même sans aucune construction nouvelle.

réciproques à leurs distances ; il devient donc extrêmement facile de calculer séparément leur valeur ; car deux quantités sont déterminées, lorsqu'on connaît leur rapport et leur différence.

104. On a trouvé de cette manière 26″,8570 pour la parallaxe du soleil ; c'est-à-dire environ un sixième de moins que par la parallaxe de Mars. Cette valeur a été conclue du passage de Vénus, observé en 1769 ; passage attendu avec la plus vive impatience par les astronomes, qui se répandirent sur toute la surface de la terre, et entreprirent exprès de longs voyages pour aller observer ce phénomène sur des points différens et dans les circonstances les plus favorables. Leur espérance ne fut pas vaine ; car la différence des durées observées à Otaïti, dans la mer du Sud, et à Cajanebourg dans la Finlande, surpassa quinze minutes. C'est un beau spectacle que cette abondance universelle et cette combinaison d'efforts de toutes les nations pour la découverte de la vérité.

105. L'auteur de la *Mécanique Céleste* a fait voir que l'on peut encore obtenir la parallaxe du soleil, d'une autre manière, sans l'observer immédiatement, et d'après la connaissance d'une inégalité du mouvement de la lune, qui se trouve liée à cette parallaxe. Pour concevoir cette liaison il faut se rappeler que les inégalités du mouvement lunaire ont des rapports marqués avec les positions de la terre et du soleil. Le calcul fait connaître ces rapports ; les observations déterminent l'étendue des inégalités : en combinant ces données, on peut en conclure la valeur des élémens dont les inégalités dépendent, car on a l'expression de leur dépendance et la mesure de leur action. Tout se réduit à trouver des inégalités dans lesquelles cette action soit, en quelque sorte, agrandie, ou dans lesquelles elle se reproduise sans cesse, de manière qu'on puisse la conclure avec exactitude

par un grand nombre d'observations. Il existe dans le mouvement de la lune une inégalité de ce genre qui dépend de la parallaxe du soleil, ou de sa distance à la terre ; et en la déterminant par l'observation, M. Laplace en a déduit la valeur de cette parallaxe égale à 26″,4205, c'est-à-dire à très-peu près la même que par les passages de Vénus. Il est probable que ce résultat de la théorie est encore plus exact que celui que l'on conclut de l'observation des passages.

Une autre inégalité de la lune donne de même l'aplatissement de la terre égal à $\frac{1}{310}$. Ces résultats sont d'autant plus précieux, qu'ils sont indépendans des petites irrégularités de la surface terrestre ; irrégularités qui deviennent insensibles à la distance où la lune se trouve placée. On peut, sous ce point de vue, les regarder comme plus exacts que les observations elles-mêmes. C'est l'auteur de la *Mécanique Céleste* qui a découvert ces rapports, et qui a trouvé le secret de déterminer ainsi très-exactement, par la seule théorie, deux élémens importans du système du monde, dont la recherche avait exigé tant d'observations, de travaux et de voyages.

106. La parallaxe 26″,4205 donne 24096 rayons terrestres pour la distance moyenne du soleil à la terre ; ce résultat suffit pour réduire toutes les dimensions des orbes planétaires en parties de la même mesure.

Et d'abord, comme les distances apogée et périgée du soleil sont représentées par 1,016814 et 0,983186 pour l'année 1750, à laquelle nous rapportons tous nos élémens, les parallaxes varieront réciproquement à ces distances, ce qui donnera :

Parallaxe du soleil apogée....	25″,9836.
moyenne...	26″,4205.
périgée.....	26″,8723.

En divisant la valeur du rayon réduite en secondes

ou 636619″,77 par ces parallaxes, on aura les distances correspondantes du soleil exprimées en rayons terrestres (*) On sait d'ailleurs que le rayon moyen de la terre contient 1432,4 lieues de 2280 toises, tome I, pag. 171. On pourra donc convertir ces résultats en lieues; ce qui rendra leurs valeurs plus sensibles. C'est ainsi que l'on a formé le tableau suivant :

	En Rayons terrestres.	En Lieues communes de 2280 toises.
Distance du soleil apogée...	24501	35095232
moyenne.....	24096	34515110
périgée.....	23691	33934988
excentricité....	405	580122

On pourra réduire de même en lieues toutes les dimensions des orbes planétaires; j'en ai placé le tableau à la fin de ce chapitre.

107. Ces résultats permettent encore de comparer le volume de la terre à celui du soleil; car la parallaxe moyenne 26″,4205 est l'angle sous lequel le demi-diamètre apparent de la terre serait vu du centre de cet astre dans sa moyenne distance à la terre. Le demi-diamètre apparent du soleil, observé de la terre, à la même distance, est égal à 2967″,1. Les rayons du soleil et de la terre sont donc entr'eux dans les rapports de 2967″,1 à 26″,4205; ou comme 112 est à l'unité, c'est-à-dire, que celui du soleil est 112 fois plus considérable.

On a vu précédemment que la plus grande distance de la lune à la terre est égale à 63,841 rayons terrestres, tom. II, pag. 362; par conséquent, si l'on supposait le centre du soleil placé au point qu'occupe maintenant le

(*) Voyez, à la fin du premier livre, la note sur le calcul des parallaxes.

centre de la terre, le volume de cet astre embrasserait l'orbe de la lune, et s'étendrait beaucoup au-delà.

108. En supposant que le soleil et la terre soient des corps sphériques, ce qui est vrai, au moins par approximation, on peut déduire de ces résultats la comparaison de leurs volumes; car ils sont comme les cubes des rayons. On trouve ainsi que le volume du soleil est environ 1300000 fois plus grand que celui de la terre.

En comparant de la même manière les distances des planètes avec les mesures de leurs diamètres apparens, on trouvera facilement les rapports de leurs dimensions et de leurs volumes aux dimensions et aux volumes de la terre. J'ai réuni ces résultats dans le tableau qui est à la fin de ce chapitre.

109. Pour avoir une idée sensible de ces rapports, supposons que l'on veuille construire des sphères qui aient entr'elles les proportions des différentes planètes; alors, en représentant le diamètre de la terre par un millimètre, les autres corps célestes seront représentés comme il suit :

Mercure, un peu moins d'un demi-millimètre;
Vénus, près d'un millimètre;
La Terre, un millimètre;
Mars, un peu plus d'un demi-millimètre;
Jupiter, onze millimètres;
Saturne, un peu moins de dix millimètres;
Uranus, quatre millimètres et demi.

Le Soleil, cent douze millimètres.

110. Ces rapports donneraient aussi les masses des planètes, si l'on pouvait supposer tous ces corps d'une égale densité; mais la théorie de l'attraction prouve que cette supposition n'est pas fondée. On évalue les masses des planètes d'après l'intensité de leur force attractive, comme nous le verrons plus bas.

Tableau des dimensions des Planètes, et de leurs distances au Soleil.

	DISTANCES au SOLEIL en millions de lieues.	DIAMÈTRES des PLANÈTES, Celui de la Terre étant 1.	VOLUMES des PLANÈTES, Celui de la Terre étant 1.
Mercure.	13	0,3914	0,0613
Vénus...	25	0,9730	0,9212
La Terre.	35	1,0000	1
Mars...	53	0,5556	0,1715
Junon...	81	Très-petit.	.....
Vesta...	92	Très-petit.	.....
Pallas...	96	Très-petit.	.....
Cérès...	96	Très-petit.	.....
Jupiter..	182	11,5616	1545,49
Saturne.	329	9,6094	887,34
Uranus..	662	4,2630	77,47
Le Soleil.	.....	109,93	1328466,30

CHAPITRE XIV.

Des Etoiles, de leur Distance, de leurs Mouvemens.

111. Nous voilà parvenus à connaître avec une très-grande exactitude la distance du soleil à la terre, et les véritables dimensions des orbites que les planètes et les comètes décrivent autour de cet astre. Nous en avons conclu les dimensions des orbes des satellites, et celle de tous les corps qui composent notre système planétaire. Toutes ces grandeurs ont eu pour mesure le rayon de la terre, c'est-à-dire une ligne qui, vue du centre du soleil, ne paraîtrait pas de la grosseur d'un cheveu. Essayons donc, s'il est possible, de mesurer encore ce qui est au-delà.

112. Il serait inutile de chercher si la parallaxe des étoiles peut devenir sensible en les observant de différens points de la terre. Trop de preuves ont déjà dû nous convaincre que l'éloignement de ces astres est immense et comme infini par rapport à nous (*). S'il est possible de le mesurer, c'est en employant une plus grande base et la plus étendue dont nous puissions faire usage.

113. Il n'y en a point de plus propre à remplir ces conditions, que le grand axe de l'orbe terrestre, qui a plus de 70 millions de lieues de longueur. En observant une même étoile des deux extrémités de cet axe, à six mois de distance, et corrigeant ses positions de toutes les

(*) Voyez, à la fin du premier livre, la note sur le calcul des parallaxes.

petites inégalités que nous avons calculées, on verra si la longitude et la latitude sont les mêmes à ces deux époques, ou si elles sont différentes, à raison des différentes positions de la terre aux instans des observations.

Il est visible, en effet, que l'étoile doit paraître plus élevée sur le plan de l'écliptique lorsque la terre est dans la partie de son orbite qui l'avoisine ; et, au contraire, elle doit paraître plus basse lorsque la terre est dans la partie opposée. Les rayons visuels, menés de la terre à l'étoile dans ces deux positions, diffèrent de la ligne droite menée de l'étoile au centre de l'orbe terrestre ; et l'angle qu'ils forment avec cette droite se nomme *la parallaxe annuelle*, parce que c'est l'angle variable sous lequel un observateur, placé dans l'étoile, verrait, à chaque instant, le rayon de l'orbe annuel de la terre.

De plus, la terre ne passe pas subitement d'un point de son orbite au point opposé, mais elle y arrive graduellement ; ainsi, en observant les positions de l'étoile aux époques intermédiaires, on devra, si la parallaxe annuelle est sensible, voir ses effets se développer par les mêmes gradations. Par exemple, si l'étoile est placée au pôle même de l'écliptique, les rayons visuels qui lui seront menés de la terre formeront une surface conique ayant son sommet à l'étoile et pour base l'orbe terrestre. Cette surface conique, prolongée au-delà de l'étoile, formera un autre cône opposé au premier par sa pointe ; et son intersection avec la sphère céleste sera une petite ellipse sur laquelle l'étoile paraîtra toujours diamétralement opposée à la terre et dans le prolongement des rayons visuels menés au sommet du cône ; résultat très-différent de celui de l'aberration, qui fait varier la position apparente de l'étoile perpendiculairement au rayon de l'orbe terrestre, et non pas dans le sens de ce rayon.

114. Il est donc extrêmement facile de reconnaître les résultats qui seraient dus à la parallaxe annuelle, et la marche de ces phénomènes les distingue très-bien de toutes les autres inégalités. On trouvera ici, dans les notes, toutes les formules nécessaires pour cet objet. Mais, quelqu'assiduité qu'on ait mise à multiplier les observations, quelques soins qu'on ait pris pour les rendre parfaitement exactes, on n'a rien pu y découvrir qui indiquât avec certitude, je ne dis pas seulement la quantité, mais l'existence même d'une parallaxe annuelle. Cependant la précision des observations modernes est telle, que si cette parallaxe eût été seulement de 3″ décimales, ou de 1″ de la division ancienne, il est extrêmement probable qu'elle n'aurait pas échappé aux tentatives multipliées des observateurs; sur-tout elle n'aurait pas dû échapper à Bradley, qui a fait un si grand nombre d'observations pour la découvrir, et qui, en la cherchant, trouva les seuls phénomènes de l'aberration et de la nutation. Admirables découvertes sans doute, mais qui, par leur mérite même, et par l'accord parfait qu'elles mettent entre les observations, rendent comme impossible le soupçon d'une parallaxe annuelle qui s'éleverait seulement à 3″ décimales. Les nombreuses observations de la polaire, faites récemment pour la [illegible] de la méridienne de France avec le cercle répétiteur, n'ont pas offert non plus le moindre effet qui indiquât une parallaxe annuelle. De tout cela on doit conclure que jusqu'à présent il y a de fortes raisons pour penser que la parallaxe de l'orbe annuel est au-dessous de 3″ décimales, du moins pour les étoiles sur lesquelles on a essayé jusqu'ici de la mesurer.

Ainsi, le diamètre de l'orbe terrestre vu de l'étoile la plus voisine, ne paraîtrait pas sous un angle de 3″; et pour un observateur placé à cette distance, notre soleil,

avec tout notre système planétaire, serait caché par l'épaisseur d'un fil d'araignée.

115. Si ces résultats ne nous font point connaître la distance des étoiles à la terre, ils donnent au moins une limite au-delà de laquelle cette distance doit nécessairement se trouver. Si l'on conçoit un triangle rectangle qui ait pour base le demi-grand axe de l'orbe terrestre, et qui ait à son sommet un angle de $3''$, la distance de ce sommet à la terre, ou la longueur du rayon visuel, sera exprimée par 212207, le rayon de l'orbe terrestre étant pris pour unité ; et comme ce rayon contient 24096 fois le demi-diamètre de la terre, il s'ensuit que si la parallaxe annuelle d'une étoile était seulement de $3''$ décimales, la distance de cette étoile à la terre serait égale à 5113339872 rayons terrestres, ou à plus de cinq trillions de lieues ; mais si la parallaxe annuelle est moindre que $3''$, les étoiles sont au-delà de la limite que nous venons d'assigner.

116. On a vu précédemment que la lumière employe $571''$ de temps décimal pour traverser le rayon de l'orbe terrestre. D'après cela, il est facile de calculer le tems qu'elle mettrait à venir des étoiles jusqu'à nous, si leur parallaxe était sensible et égale seulement à $3''$ décimales : car ce rayon exprimé en secondes, serait 212207×571, ou 121170197, environ $3^{ans},3$. La lumière emploie donc plus de trois années à se transmettre des étoiles jusqu'à nous. Les étoiles que nous voyons briller tout-à-coup dans le ciel existaient long-tems avant que nous eussions aperçu leur clarté ; et quelquefois nous les voyons encore, lorsqu'elles ont déjà disparu. Peut-être en est-il de si éloignées, qu'elles n'ont pas encore pu nous transmettre leur lumière ; peut-être d'autres ont-elles disparu depuis des milliers de siècles, quoique nous les voyions encore briller à la même place sur la voûte des cieux.

117. Il faut que ces astres éprouvent des changemens bien considérables, puisque ces changemens sont encore sensibles à la distance où nous sommes placés. Il en est qui perdent peu-à-peu leur lumière, comme l'étoile que l'on nomme δ de la Grande-Ourse. D'autres, comme ϵ de *la Baleine*, deviennent de plus en plus brillantes. Enfin, on en a vu qui, après avoir pris soudainement un nouvel éclat, se sont éteintes peu-à-peu. Telle fut l'étoile nouvelle qui parut en 1572 dans la constellation de Cassiopée. Elle devint tout-à-coup si brillante, qu'elle surpassa en clarté les plus belles étoiles, Vénus et Jupiter même, lorsqu'ils sont le plus près de la terre. On pouvait l'apercevoir en plein jour au méridien. Peu-à-peu on vit ce grand éclat s'affaiblir, et enfin l'étoile disparut seize mois après son apparition, sans avoir changé de place dans le ciel. Sa couleur, dans ces intervalles, éprouva de grandes variations. Elle parut d'abord d'un blanc éclatant comme Vénus, ensuite d'un jaune rougeâtre comme Mars et comme *Aldébaran*; enfin, d'un blanc plombé, comme Saturne (*). Une autre étoile, qui parut tout-à-coup, en 1604, dans la constellation du Serpentaire, éprouva des variations analogues, et disparut de même après quelques mois. Ces phénomènes semblent indiquer [illegible] qui éclatent tout-à-coup dans ces grands corps. Qui sait si notre soleil n'a pas éprouvé ou n'éprouvera pas un jour de semblables révolutions, qui ont peut-être déjà changé l'état du globe terrestre, et qui le changeront encore plus d'une fois?

118. D'autres étoiles, sans disparaître entièrement, offrent des variations non moins singulières. Leur lumière augmente et décroît tour-à-tour par des périodes réglées.

(*) Tycho-Progymnasmata.

On les nomme, pour cette raison, *étoiles changeantes*. Telles sont l'étoile *Algol*, qui a une période d'environ trois jours; *δ de Céphée*, qui en a une de cinq; *β de la Lyre*, de six; *μ d'Antinoüs*, de sept; *ο de la Baleine*, de 334, et d'autres encore.

On a donné plusieurs explications de ces changemens périodiques. On a supposé que les étoiles qui y sont sujettes sont, comme toutes les autres, des corps lumineux, de véritables soleils qui tournent autour d'un axe, mais dont la surface est parsemée de taches obscures qui se présentent à nous dans certains tems, par l'effet de la rotation. D'autres astronomes ont cherché à expliquer ces faits, en supposant à ces étoiles une forme extrêmement aplatie qui les rend moins lumineuses sous certains aspects. Enfin, on a supposé que de grands corps opaques circulant autour de ces étoiles, nous interceptent parfois leur lumière, et les éclipsent périodiquement. Le tems, en accumulant les observations, décidera peut-être laquelle de ces hypothèses est la véritable.

110. Un des moyens les plus sûrs d'y parvenir, est de comparer les étoiles entr'elles, en les désignant par des lettres ou par des nombres, et les disposant, à mesure qu'on les compare, dans l'ordre que leur éclat leur assigne. Si l'on trouve ensuite, par les observations, que cet ordre change, c'est une preuve qu'une des étoiles sur lesquelles la comparaison est établie, a changé pareillement; et quelques combinaisons de ce genre suffiront pour reconnaître quelle est celle qui a subi une variation. On ne peut comparer ainsi chaque étoile, qu'avec celles qui l'avoisinent, et qui peuvent être aperçues en même tems. Mais en comparant ensuite celles-ci à d'autres, on parvient, par une série de termes intermédiaires, à lier ensemble des extrêmes fort éloignés. Cette méthode actuellement en

usage, est bien préférable à celles des anciens astronomes qui classaient les étoiles d'après une comparaison très-vague, suivant ce qu'ils appelaient l'ordre de *leur grandeur*, qui n'était réellement que celui de leur éclat estimé d'une manière très-imparfaite.

120. Nos connaissances sur la grandeur réelle des étoiles et sur leurs distances respectives sont encore très-peu avancées. Ces recherches feront l'objet des travaux de l'astronomie future. Déjà, cependant, il paraît que ces astres ne sont pas disséminés dans le ciel d'une manière à-peu-près égale. Ils sont réunis en groupes, composés chacun de plusieurs milliards d'étoiles. On en peut juger par ces petites taches blanchâtres que l'on aperçoit dans le ciel, et que l'on nomme *des nébuleuses*. En les observant au télescope, on y découvre une multitude infinie de petites étoiles très-rapprochées les unes des autres, et dont la lumière confondue par l'effet de l'irradiation, n'offre aux yeux qu'une faible lueur à-peu-près uniforme. Cette grande trace blanche et lumineuse, qui traverse le ciel d'un pôle à l'autre, et que l'on nomme la Voie Lactée, est probablement une nébuleuse de ce genre, mais qui paraît plus grande, parce qu'elle est plus rapprochée de nous. En la regardant au télescope, on y découvre une quantité si prodigieuse d'étoiles, que l'imagination ne saurait suffire à les concevoir; cependant, d'après les distances angulaires de ces astres, il est sûr que l'espace qui les sépare est au moins cent mille fois plus grand que le rayon de l'orbe terrestre. Ainsi, l'on peut juger de l'immense étendue de ce groupe. A quelle distance ne faudrait-il pas nous reculer, pour le voir aussi petit que les autres nébuleuses que nous apercevons, et dont quelques-unes, même dans les meilleurs télescopes, ne peuvent encore être vues que comme des amas de lumière, en sorte que l'analogie seule

peut faire soupçonner leur composition ? Lorsque l'imagination pénètre dans ces immenses profondeurs, elle ne peut plus concevoir de bornes à l'univers, et la pensée se repose involontairement sur la petite place que nous y occupons.

NOTE

Sur la Parallaxe annuelle.

Déterminons par le calcul les lois exactes de ces variations : soient x' y' les deux coordonnées héliocentriques de la terre, rapportées à deux axes fixes et rectangulaires, menés par le centre du soleil dans le plan de l'écliptique, l'axe des X étant supposé passer par l'équinoxe du printems. Si l'on nomme v la longitude de la terre vue du soleil, et r sa distance à cet astre, ou le rayon de son orbite, qu'il suffit ici de supposer circulaire, on aura

$$x' = r \cos v \qquad y' = r \sin v.$$

Menons par le centre du soleil un troisième axe perpendiculaire au plan de l'écliptique, ce sera l'axe des z, et nous supposerons les z positifs, dirigés vers le pôle boréal de ce plan. Soient x' y' z' les coordonnées d'une étoile fixe rapportée à ces axes ; nommons l' et λ' sa longitude et sa latitude héliocentriques, et désignons par ρ' la projection de son rayon vecteur sur le plan de l'écliptique ; on aura évidemment

$$x' = \rho' \cos l', \qquad y' = \rho' \sin l', \qquad z' = \rho' \sin \lambda'.$$

Mais si l'on représente par r' la vraie distance de l'étoile au soleil, on aura aussi

$$\rho' = r' \cos \lambda' ;$$

par conséquent, en éliminant ρ, les valeurs de x', y', z', deviendront

$$x' = r' \cos \lambda' \cos l', \qquad y' = r' \cos \lambda' \sin l', \qquad z' = r' \sin \lambda'.$$

Supposons maintenant que l'on demande la longitude et la

latitude géocentriques de l'étoile ; en nommant la première l, la seconde λ, on aura

$$\text{tang } l = \frac{y' - y}{x' - x} ; \quad \sin \lambda = \frac{z'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}}.$$

Examinons d'abord la première de ces équations : en y mettant pour $x\ y\ x'\ y'$ leurs valeurs, elle devient

$$\text{tang } l = \frac{r' \cos \lambda' \sin l' - r \sin \nu}{r' \cos \lambda' \cos l' - r \cos \nu}$$

et peut se mettre sous la forme

$$\text{tang } l = \text{tang } l' \cdot \frac{1 - \frac{r}{r'} \cdot \frac{\sin \nu}{\cos \lambda' \sin l'}}{1 - \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos \nu}{\cos \lambda' \sin l'}}$$

$\frac{r}{r'}$ est le rayon de l'orbe terrestre divisé par la distance de l'étoile au soleil. Ce rapport est précisément le sinus de la parallaxe annuelle, quand elle est la plus grande possible, en représentant alors sa valeur par p, l'expression de tang l deviendra

$$\text{tang } l = \text{tang } l' \cdot \frac{1 - \frac{\sin p \sin \nu}{\cos \lambda' \sin l'}}{1 - \frac{\sin p \cos \nu}{\cos \lambda' \cos l'}}$$

Si la parallaxe p était tout-à-fait nulle, sin p serait nul aussi, et il viendrait $l = l'$, c'est-à-dire, que la longitude géocentrique de l'étoile égalerait sa longitude héliocentrique. Si p n'est pas nul, du moins nous sommes assurés que sa valeur est bien petite, puisqu'elle s'élève tout au plus à $3''$ décimales. Ainsi, dans tous les cas, sin p sera une fraction d'une petitesse extrême, et par conséquent nous pourrons en général nous borner à sa première puissance. Si nous développons par la division le dénominateur du second membre, en nous bornant à cette approximation, nous trouverons

$$\text{tang } l = \text{tang } l' \left\{ 1 + \frac{\sin p \cdot \sin (l' - \nu)}{\cos \lambda' \sin l' \cos l'} \right\},$$

ou en faisant tang l' dans le premier membre, et substituant aux tangentes leurs valeurs $\frac{\sin}{\cos}$,

$$\sin(l-l') = -\frac{\sin p \cdot \sin(\varphi - l') \cdot \cos l}{\cos\lambda' \cos l'}.$$

La différence $l - l'$ est donc toujours un très-petit angle de l'ordre de l'angle p. On peut donc, puisque nous nous bornons à la première puissance de p, substituer le rapport de ces petits arcs à celui de leurs sinus. Par la même raison on peut supposer $l = l'$ dans le second membre. Ces réductions donnent

$$(1) \qquad l - l' = -\frac{p \sin(\varphi - l')}{\cos\lambda'}.$$

Si l'on traite de même la valeur de $\sin\lambda$, elle deviendra

$$\sin\lambda = \frac{r' \sin\lambda'}{\sqrt{r'^2 - 2rr'\cos\lambda'\cos(\varphi - l') + r^2}}$$

ou bien

$$\sin\lambda = \frac{\sin\lambda'}{\sqrt{1 - 2\sin p \cos\lambda' \cdot \cos(\varphi - l') + \sin^2 p}}$$

en développant le second membre par la formule du binôme, et se bornant aux premières puissances de $\sin p$, on trouve

$$\sin\lambda = \sin\lambda' \left\{1 + \sin p \cos\lambda' \cos(\varphi - l')\right\}$$

ou bien

$$2\sin\tfrac{1}{2}\left\{\lambda - \lambda'\right\}\cos\tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda') = \sin p \sin\lambda' \cos\lambda' \cos(\varphi - l')$$

On voit par cette formule que la différence $\lambda - \lambda'$ des latitudes géocentriques et héliocentriques est de l'ordre de l'angle p. Ainsi, en substituant le rapport de ces petits arcs à celui de leurs sinus, et supposant $\lambda' = \lambda$ dans les termes qui sont déjà de l'ordre p, on aura simplement

$$(2) \qquad \lambda - \lambda' = p \sin\lambda' \cos(\varphi - l').$$

Telles sont les expressions de la parallaxe annuelle en longitude et en latitude. La première est nulle quand on a $l' - l = 0$, ou bien $l' - l = 180°$, c'est-à-dire lorsque l'astre est en conjonction ou en opposition avec le soleil. Alors, en effet, la parallaxe doit se

porter toute entière sur la latitude. Aussi l'expression de la parallaxe en latitude acquiert-elle alors sa plus grande valeur, qui est $\sin \lambda'$. Cette expression à son tour devient nulle quand $v - l' = 90°$, parce qu'alors $\cos (v - l') = 0$. C'est le cas où la terre vue du soleil est en quadrature avec l'astre; alors le rayon vecteur héliocentrique de l'astre devient perpendiculaire au rayon vecteur de la terre. Or, comme la perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener d'un point sur une droite donnée, il arrive que très-près de ce minimum les obliques voisines de la perpendiculaire varient très-peu, et seulement dans les quantités du second ordre, c'est-à-dire dans les secondes puissances de $\sin p$. Les distances de l'astre à la terre, dans ces deux positions, diffèrent donc extrêmement peu de la distance héliocentrique de l'astre; et comme le sinus de la latitude géocentrique λ est égal à la hauteur de l'astre sur l'écliptique, divisé par sa distance à la terre, il s'ensuit que la distance ne variant pas, et la hauteur étant constante, la latitude doit être constante aussi et égale à la latitude héliocentrique. Ce cas est celui qui donne la plus grande parallaxe de longitude; car $v - l'$ étant égal à $\pm 100°$, son sinus est égal à ± 1, ce qui est la plus grande valeur qu'il puisse avoir. La plus grande différence des longitudes géocentriques dans ces cas extrêmes, est donc égale au double d'une seule de ces variations, ou à $\frac{2p}{\cos \lambda'}$.

Les deux cas que nous venons d'examiner répondent aussi aux deux positions de la terre, dans lesquelles le diamètre de l'orbe terrestre coïncide du centre de l'astre sous le plus petit angle ou sous le plus grand. De sorte que les variations des parallaxes observées en ces points opposés de l'orbite sont les plus petites, ou les plus grandes, que l'on puisse observer sur deux rayons vecteurs opposés.

Pour démontrer cette proposition, menons du centre de l'astre les droites $R^I R^{II}$ aux deux extrémités d'un même diamètre de l'orbe terrestre, représenté par $2r$. Dans le triangle rectiligne, formé par ces trois droites, nommons V l'angle à l'astre formé par les côtés $R^I R^{II}$, on aura évidemment

$$\cos V = \frac{R^{I2} + R^{II2} - 4r^2}{2 R^I R^{II}}.$$

Or, x y étant les coordonnées de la terre dans sa première position sur l'orbite, ces coordonnées deviendront $-x$, $-y$ dans la position opposée. On aura donc

$$R'^2 = r^2 - 2(xx' + yy') + r'^2,$$
$$R''^2 = r^2 + 2(xx' + yy') + r'^2;$$

par conséquent

$$R'^2 + R''^2 = 2r^2 + 2r'^2,$$
$$R^2\, R'^2 = (r^2 + r'^2)^2 - 4r^2 r'^2 \cos^2\lambda' \cdot \cos^2(v - l');$$

ce qui donne

$$\cos^2 V = \frac{(r'^2 - r^2)^2}{(r^2 + r'^2)^2 - 4r^2 r'^2 \cos^2\lambda' \cos^2(v - l')}.$$

L'angle V étant toujours fort petit, sa plus grande valeur répondra à la plus petite valeur de cos V. Or, celle-ci aura lieu quand le dénominateur du second membre sera le plus grand possible, c'est-à-dire quand on aura $\cos\lambda' \cos(v - l') = 0$, ou simplement $\cos(v - l') = 0$, puisque λ' est supposé invariable. Cette condition donne $v - l' = \pm 100°$, comme nous l'avions annoncé.

Dans ce cas, la valeur de V est donnée par l'équation

$$\cos V = \frac{r'^2 - r^2}{r^2 + r'^2};$$

d'où l'on tire

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} V = \frac{\sin^2 p}{1 + \sin^2 p};$$

et par conséquent

$$\tfrac{1}{2} V = p \quad \text{ou} \quad V = 2p$$

en négligeant les quantités du second ordre.

D'après la discussion précédente, on voit que les variations produites par la parallaxe annuelle, lorsqu'elle est sensible, diffèrent beaucoup de celles que produit l'aberration de la lumière; de sorte que ces deux genres de variation ne peuvent pas être confondus l'un avec l'autre. On sentira encore mieux leur différence en comparant les formules qui les expriment. Mais pour le faire commodément, il faut rapporter celles de la parallaxe annuelle aux coordonnées géocentriques, comme nous avons fait pour les formules de l'aberration.

D'abord, il n'y a aucun changement à faire pour la longitude

et la latitude de l'astre ; comme elles ne diffèrent des coordonnées géocentriques que par la parallaxe, on peut les prendre indifféremment l'une pour l'autre dans l'expression de cette parallaxe, puisque nous nous bornons aux premières puissances de

Mais, au lieu de la longitude l' de la terre vue du soleil, il faut introduire la longitude $\odot$ du soleil vu de la terre. Cela est très-facile ; car en employant la division sexagésimale, on a toujours

$$\odot = 200^\circ + \nu ;$$

par conséquent

$$\nu = \odot - 200^\circ.$$

En substituant cette valeur de ν dans les expressions de la parallaxe en longitude et en latitude, elles deviendront

$$l - l' = \frac{p \sin (\odot - l')}{\cos \lambda'}, \quad \lambda - \lambda' = -p \sin \lambda' \cos (\odot - l')$$

Les valeurs l' et λ', dans les premiers membres, peuvent être considérées comme représentant le lieu réel de l'astre. Or, en adoptant les mêmes dénominations, et négligeant l'excentricité de l'orbe terrestre, les formules de l'aberration en longitude et en latitude, trouvées dans la page 161, sont

$$l - l' = -\frac{20'',246 \cos (\odot - l')}{\cos \lambda'}, \quad \lambda - \lambda' = -20'',246 \sin \lambda' \sin (\odot - l')$$

les seconds membres de ces équations sont semblables, quant aux facteurs constans ; mais quant aux termes variables, leur forme est justement inverse ; de sorte que la parallaxe annuelle sera la plus grande possible quand l'aberration aura sa plus petite valeur, et réciproquement. La marche des deux phénomènes entre ces extrêmes n'est pas moins différente. Pour qu'ils s'accordassent, il faudrait changer $\odot$ en $\odot + 100^\circ$ dans l'expression de l'aberration.

Ce rapprochement nous fournira tout de suite l'effet de la parallaxe en ascension droite et en déclinaison ; il suffira de changer $\odot$ en $\odot + 100^\circ$ dans les expressions de l'aberration décomposées de la même manière. On aura donc ainsi, d'après la page 161,

parall. ann. en ascens. droite
$$\begin{cases} a - a' = + \dfrac{p \sin a'}{\sin N \cos d'} \sin (\odot - N) \\ \text{tang } N = \dfrac{\text{tang } a'}{\cos \ast} \end{cases}$$

parall. en déclinaison
$$\begin{cases} d - d^{l} = \dfrac{p \cos a^{l} \sin d^{l}}{\cos N^{l}} \sin (\odot - N^{l}) \\ \text{tang } N^{l} = \dfrac{\sin a^{l} \cos \omega - \cot d^{l} \sin \omega}{\cos a^{l}} \end{cases}$$

ces formules il faut employer pour l^{l}, λ^{l}, a^{l} et d^{l}, les élémens héliocentriques. On obtiendra leurs valeurs en prenant pour l^{l} la longitude géocentrique observée dans les sysigies, à l'instant de l'opposition ou de la conjonction de l'astre, et en prenant pour λ^{l} la latitude géocentrique observée dans les quadratures à 100° en avant ou en arrière de la sysigie. Il est visible, en effet, que dans le premier de ces points on a $l = l^{l}$, et dans le second $\lambda = \lambda^{l}$, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut. Avec les valeurs de l^{l} et de λ^{l}, l'obliquité de l'écliptique ω étant connue, on calculera a^{l} et d^{l} par les formules de la page 58 du 2e. livre. Ce seront les valeurs de l'ascension droite et de la déclinaison héliocentrique telles qu'il faut les employer. Quant à a et d, ce sont l'ascension droite et la déclinaison géocentrique de l'astre, corrigés de la nutation et de l'aberration. Il est visible qu'il faut effectuer aussi ces corrections pour obtenir l et λ d'après les observations géocentriques.

Lorsqu'on voudra déterminer si une étoile désignée à une parallaxe sensible aux instrumens actuels, on l'observera le plus souvent qu'il sera possible pendant le cours entier d'une année, puis on calculera les valeurs de $l^{l}\lambda^{l}$, a^{l} et d^{l}, comme nous venons de le dire; et en prenant les différences $l - l^{l}$; $\lambda - \lambda^{l}$, $a - a^{l}$, $d - d^{l}$, entre ces élémens constans et ceux qui résultent de l'observation géocentrique, on verra s'ils paraissent éprouver quelque variation appréciable. Dans ce cas la parallaxe sera sensible; dans le cas contraire, elle ne le sera point.

L'effet de la parallaxe peut devenir plus sensible sur un de ces élémens que sur un autre, à cause des facteurs constans qui la multiplient, et qui augmentent ou diminuent son influence. Par exemple, la parallaxe de latitude étant exprimée en général par $-p \sin \lambda^{l} \cos (\odot - l^{l})$, on voit que pour la même étoile elle atteint sa plus grande valeur, quand $\odot - l^{l} = \pm 100°$, ce qui la rend égale à $-p \sin \lambda^{l}$; et ensuite parmi toutes les étoiles, elle atteint sa plus grande valeur quand $\lambda^{l} = 100°$, ce qui la rend égale à p. Mais elle ne peut point dépasser cette limite. Au con-

traire, la parallaxe en longitude ayant $\cos\lambda'$ au dénominateur, peut surpasser beaucoup p; et elle croît à mesure que la latitude λ' diminue. Il semble même qu'elle deviendrait infinie, lorsqu'on avait $\lambda' = 100°$, c'est-à-dire si l'étoile était placée au pôle même de l'écliptique. Mais cette forme qu'elle prend alors, tient à ce que ces expressions ne sont qu'approchées, et résultent de développemens dans lesquels on a supposé $l - l'$ fort petit. Or, cela n'aurait plus lieu pour une étoile qui serait située au pôle même de l'écliptique, ou assez près de ce pôle, pour que la parallaxe annuelle p devînt comparable à $\cos\lambda'$; car alors la longitude héliocentrique et la longitude géocentrique pourraient différer beaucoup l'une de l'autre, contre notre supposition. On voit par cette discussion qu'il est avantageux de choisir des étoiles éloignées de l'écliptique, afin d'agrandir le phénomène; et s'il n'est pas sensible même pour ces étoiles, on devra en conclure plus sûrement encore que leur parallaxe ne peut pas être appréciée. D'un autre côté, il faut choisir des étoiles qui s'élèvent beaucoup sur l'horizon du lieu où l'on observe, afin d'atténuer d'autant plus les effets des réfractions et les erreurs accidentelles qu'elles introduisent. Sous ce rapport, la Polaire et la Lyre sont pour nos climats des étoiles très-favorablement placées. Mais il paraît que la première, qui a été beaucoup observée, n'offre aucun signe de parallaxe appréciable; et quant à la seconde, quoiqu'on ait cru quelquefois y reconnaître une parallaxe de 2″ sexagésimale, cette annonce de quelques observateurs ne peut pas être encore regardée comme bien certaine.

Quand on aura cru reconnaître dans les valeurs de $l - l'$, $\lambda - \lambda'$, $a - a'$, $d - d'$, des variations assez sensibles pour qu'on ne puisse pas les attribuer aux erreurs des observations, on comparera ces différences entr'elles pour voir si elles sont dans les rapports que leurs valeurs exigent. Cette confirmation sera utile pour éviter quelque cause d'erreur accidentelle et cachée. Alors on regardera comme connue la variation de l'élément où la différence est le plus sensible; et en l'égalant à son expression analytique, on en tirera la valeur de p. Et comme chacune des variations atteindra son maximum dans deux points opposés de l'orbite, il faudra employer simultanément ces variations pour déterminer p, afin de rendre leur valeur totale plus sensible.

CHAPITRE XV.

De la Pesanteur universelle.

121. En considérant l'ensemble des mouvemens planétaires, nous y avons découvert des lois constantes qui les unissent par de grands rapports. De-là nous devons conclure que ces mouvemens ne sont pas indépendans les uns des autres, mais qu'ils sont l'effet d'une cause générale qui agit sur tous les corps célestes : essayons de nous élever jusqu'à ce grand principe, en suivant les lois de l'analogie.

122. Si nous considérons d'abord la lune, nous voyons qu'elle suit constamment la terre dans sa révolution annuelle : il y a donc une certaine force qui la retient ainsi autour de la terre, et l'empêche de l'abandonner. En cela cette force, quelle qu'elle soit, est analogue à la pesanteur.

En effet, la pesanteur tend à ramener en ligne droite vers la terre les corps que l'on a détachés de sa surface. Lorsque ces corps ont reçu une impulsion qui tendrait à les éloigner, elle les ramène encore, en leur faisant décrire une ligne courbe dont la concavité est tournée vers la surface terrestre : plus la force de projection est grande, plus l'espace que les corps décrivent avant leur chûte est considérable. Ils ne tombent que par l'effet combiné de la pesanteur et de la résistance de l'air, qui détruit peu-à-peu l'impulsion horizontale qu'on leur a donnée ; mais si cette résistance n'existait pas, un corps lancé avec une

force suffisante, du sommet d'une montagne, pourrait [illegible] sans tomber, le demi-tour et même le tour entier du globe : dans ce dernier cas, sa vîtesse de projection ne diminuerait pas, puisqu'il n'éprouverait aucune résistance; elle se retrouverait donc la même quand le corps serait revenu au point de départ, et par conséquent elle lui ferait décrire, à partir de ce point, une nouvelle révolution. Le corps ne retomberait donc jamais sur la terre, mais tournerait autour d'elle comme un satellite.

Or, c'est exactement ainsi que la lune se meut autour de la terre : il est donc naturel de penser que sa marche, à fort peu près circulaire, est due à une semblable combinaison; et cela est d'autant plus probable, qu'à quelque hauteur qu'on se soit élevé sur les montagnes ou dans des aërostats, on y a toujours observé les effets de la pesanteur terrestre, ce qui rend présumable qu'elle s'étend beaucoup au-delà, et même jusqu'à l'orbe de la lune.

Mais en même tems il peut se faire que la pesanteur, à cette distance, soit plus faible qu'à la surface de la terre; on a même lieu de le soupçonner, d'après les expériences du pendule faites sur de hautes montagnes, car il paraît que la pesanteur y est déjà un peu moindre qu'à la surface de la terre.

123. Ces considérations peuvent s'appliquer également à tous les autres satellites. La forme presque circulaire de leurs orbites semble indiquer qu'ils pèsent vers le centre de leurs planètes, comme la lune vers la terre, et qu'ils sont retenus par cette pesanteur.

124. Le mouvement des planètes présentant des phénomènes analogues, il est naturel de penser qu'elles pèsent aussi de la même manière vers le soleil, dont elles sont comme autant de satellites. On peut même présumer que les comètes sont soumises à quelque force semblable, soit

à cau[illegible] la régularité avec laquelle elles décrivent leurs orbi[illegible]t à cause des rapports qui lient leurs mouve[illegible] ceux des planètes, suivant les lois de Képler.

Nous voilà donc parvenus à entrevoir l'existence d'une cause générale qui paraît suffire au maintien des mouvemens célestes. Pour vérifier cette idée, il faut assimiler la lune, les planètes, les comètes et les satellites, à des corps pesans qui seraient lancés dans l'espace à une certaine distance du centre où les porte leur pesanteur. Il faut décomposer pour ainsi dire leurs mouvemens et évaluer séparément les effets de l'impulsion qui les fait circuler, et ceux de la force qui les retient dans leurs orbites. On connaîtra ainsi avec certitude l'action et l'intensité de cette force, telle qu'elle résulte des phénomènes observés.

C'est la mécanique qui apprend à décomposer de cette manière les mouvemens des corps, et à lire la nature d'une force dans les effets qu'elle produit. C'est l'analyse qui permet de faire cette décomposition pour chaque point de l'orbite, et qui donne le moyen de suivre exactement les variations des forces, en passant d'un point à un autre. L'union de ces méthodes est donc nécessaire pour découvrir la cause générale des mouvemens célestes; et comme elles ne sauraient faire partie d'un traité élémentaire, je ne puis qu'indiquer ici la marche que l'on suit dans leur application; mais je le ferai d'autant plus volontiers, que cette marche, extrêmement rigoureuse, est propre à inspirer la plus grande confiance dans les résultats auxquels elle conduit.

126. On suppose une planète circulant autour du soleil, et l'on forme les équations qui expriment les lois de son mouvement. Les forces qui la sollicitent entrent dans ces équations. Ce sont les inconnues qu'il faut déterminer. Cela posé, les observations établissent d'une manière in-

contestable les faits suivans, qui sont les lois de Képler.

1°. *Les aires décrites par les rayons vecteurs des planètes, dans leur mouvement autour du soleil, sont proportionnelles aux tems.*

Il en résulte par le calcul, que la force qui sollicite les planètes est dirigée vers le centre du soleil.

2°. *Les orbes des planètes et des comètes sont des sections coniques dont le soleil occupe un des foyers.*

Il s'ensuit que la force qui les anime est en raison inverse du carré de la distance du centre de ces astres à celui du soleil; réciproquement, dès que la force suit cette raison, la courbe est une section conique.

3°. *Les carrés des tems des révolutions des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites*; ou, ce qui revient au même, *les aires décrites en tems égal dans différentes orbites, sont proportionnelles aux racines carrées de leurs paramètres.*

On en déduit que la force qui sollicite les planètes et les comètes est la même pour tous ces astres; qu'elle ne varie de l'un à l'autre qu'à raison de leurs distances, en sorte que s'ils étaient placés en repos autour du soleil à des distances égales, ils tomberaient vers lui avec la même vîtesse; d'où l'on voit que la force qui les sollicite pénètre chacune de leurs molécules et est proportionnelle à leur masse.

Les faits observés par Képler conduisent donc directement à la connaissance de la force qui retient les planètes et les comètes dans leurs orbites. Chacun d'eux nous découvre une de ses propriétés. Cette force agissant sur les corps *comme pour les attirer* vers le soleil, nous la nommerons ATTRACTION SOLAIRE, sans vouloir exprimer par là sa nature, mais seulement indiquer ses effets.

127. Les mouvemens des satellites présentant des phénomènes analogues, et étant pareillement assujettis aux

lois [illegible] Képler, il en résulte que *chaque systéme de satellites est attiré vers sa planète par une force réciproque au carré des distances*, et par conséquent analogue à l'attraction solaire.

128. Comme l'ellipticité des orbites est une des données qui conduisent à ces résultats, il semble qu'on ne peut pas les étendre aux satellites dont l'orbe n'a pas encore été reconnu pour elliptique ; mais si l'on supposait l'ellipticité nulle, en sorte que cet indice manquât absolument, la proportionnalité des carrés des tems aux cubes des distances moyennes conduirait aux mêmes conséquences. La loi dont il s'agit est donc générale, et s'étend à tous les satellites.

129. On peut en particulier la démontrer pour la lune d'une manière frappante. Pour avoir la force qui retient cet astre dans son orbite, il suffit de diminuer la pesanteur terrestre en raison du carré de la distance.

130. Nous sommes ainsi conduits à reconnaître le soleil et les planètes qui ont des satellites, comme des centres d'une force attractive qui s'exerce sur tous les corps environnans. Il est naturel de penser que cette propriété s'étend à tous les corps célestes ; et en effet, la forme presque sphérique de ces corps semble indiquer que leurs molécules sont réunies autour de leur centre par une force qui les attire également à distances égales ; mais on peut démontrer directement cette vérité. C'est une loi générale, dans les phénomènes de la nature, que la réaction est toujours égale à l'action. Le fer attire l'aimant, comme il est attiré par lui. Les planètes pèsent sur le soleil ; cet astre pèse donc sur elles à son tour, suivant les mêmes lois.

131. La comparaison des phénomènes célestes démontre donc incontestablement ce grand principe de la nature : TOUTES LES MOLÉCULES DE LA MATIERE S'ATTIRENT MU-

TUELLEMENT, EN RAISON DIRECTE DES MASSES, ET RÉCIPROQUEMENT AU CARRÉ DES DISTANCES. La découverte de ce principe est due à Newton.

132. Il y a, en général, dans l'étude de la nature deux moyens de s'assurer de la vérité : le premier consiste à raisonner rigoureusement sur des données exactes ; le second consiste à revenir sur ses pas pour voir si les phénomènes observés pourraient se déduire, comme conséquences, des résultats auxquels on est parvenu. La loi de la pesanteur universelle nous a été donnée immédiatement par la première méthode ; la seconde ne lui est pas moins favorable, car en suivant les conséquences qui en dérivent, on en voit sortir tous les phénomènes.

133. D'abord, le mouvement elliptique des corps célestes se trouve complettement expliqué : lorsqu'une planète part de son périhélie, la direction de son mouvement toujours indiquée par la tangente de son orbite, est perpendiculaire au rayon vecteur. C'est à ce point de l'orbite que sa tendance vers le soleil est la plus grande; mais la vîtesse de circulation y est aussi la plus grande possible : le calcul démontre que cette seconde cause est plus puissante que la première ; en conséquence la planète s'éloigne du soleil, et son rayon vecteur s'accroît de plus en plus.

En même tems sa pesanteur tend à la rappeler vers le soleil, et contrarie son mouvement. Cette cause toujours agissante diminue peu-à-peu la vîtesse, jusqu'à ce que la planète arrive enfin à son aphélie. Alors la vîtesse de circulation est la plus petite possible, l'attraction solaire affaiblie par la distance est aussi considérablement diminuée ; mais le calcul fait voir que dans cet état elle l'emporte sur la tendance de la planète à s'éloigner du soleil. Celle-ci est donc rappelée vers le soleil en sens contraire ; et de là jusqu'au périhélie sa vîtesse augmente, parce que

l'action toujours croissante du soleil conspire avec la direction de son mouvement.

La planète revenue à ce point de l'orbite, s'y retrouve avec toute la vîtesse qu'elle avait à la révolution précédente, elle doit donc recommencer une nouvelle révolution, avec la même vîtesse, en passant par les mêmes périodes, et ainsi de suite indéfiniment.

134. Le mouvement elliptique n'est pas le seul qui s'accorde avec la loi de la pesanteur réciproque au carré des distances. L'analyse fait voir que l'orbite peut être aussi une parabole, une hyperbole, et en général une section conique. Ces courbes sont les seules que puisse faire décrire une force de cette nature. Dans chaque cas particulier le genre de l'orbite est déterminé par l'intensité de l'impulsion initiale; et, ce qui est extrêmement remarquable, la direction de cette impulsion n'influe point sur ce résultat; elle ne fait que modifier les dimensions de l'orbite.

Il est probable qu'il existe des corps célestes qui décrivent ainsi des paraboles ou des hyperboles autour du soleil, mais alors ces corps ne doivent être visibles qu'une seule fois; et lorsqu'ils se sont dérobés à nos regards, nous les perdons de vue pour toujours.

135. Pour représenter avec exactitude les mouvemens célestes, il ne suffit pas de considérer isolément les corps qui composent notre système planétaire. Il faut en même tems avoir égard aux attractions mutuelles que ces corps doivent exercer les uns sur les autres; alors le mouvement elliptique n'a plus lieu que d'une manière approchée, et c'est ce qui arrive dans la nature. Cet écart est donc une preuve de plus en faveur de la gravitation universelle.

136. C'est ainsi, par exemple, que le mouvement elliptique de la lune autour de la terre est troublé par l'action du soleil. Si cet astre attirait également la lune et la terre,

toutes deux obéiraient en même tems à son act[illegible] et pendant qu'elles seraient emportées sur l'écliptiq[illegible] un mouvement égal, la lune décrirait régulièrement[illegible] ellipse autour de la terre. Mais comme elle se tr[illegible] tantôt plus près, tantôt plus loin du soleil, elle éprouve des variations dans sa pesanteur, et de-là résultent les inégalités de ses mouvemens.

Par exemple, dans les conjonctions, la lune se trouve entre la terre et le soleil. Elle est donc alors plus près de cet astre. Il l'attire par conséquent davantage, et augmente un peu sa distance à la terre. Au contraire, dans les oppositions, c'est la terre qui est plus attirée par le soleil et qui s'éloigne de la lune, d'où résulte, par rapport à nous, un effet semblable. Dans les quadratures, l'action du soleil, décomposée suivant le rayon vecteur lunaire, tend à le diminuer; mais le calcul fait voir que cet effort est moindre que l'augmentation qui a lieu dans les sysigies, de sorte que par l'effet moyen de ces variations la lune se trouve soutenue à une plus grande distance de la terre, qu'elle ne le serait sans l'action du soleil.

Cette action étant variable dans les différens points de l'orbe de la lune, il doit en résulter dans le mouvement de cet astre des inégalités périodiques qui se reproduisent suivant les mêmes lois à chaque révolution; mais leur intensité doit être différente suivant les diverses distances du soleil à la terre: elle doit augmenter, par exemple, quand la terre est périhélie, et diminuer quand elle est aphélie; de-là résulte une autre sorte d'inégalités qui servent de corrections aux précédentes, et qui, dépendant de la position de la terre dans son orbite, s'achèvent et se reproduisent chaque année.

137. Le mouvement des nœuds de l'orbe lunaire et le changement de son inclinaison sur l'écliptique sont encore

des conséquences nécessaires de l'action du soleil. Lorsque la lune, en tournant autour de la terre, s'approche du plan de l'écliptique, le soleil l'attire vers ce plan et tend à l'y abaisser. Par l'effet de cette attraction, la lune perce l'écliptique un peu plutôt et y arrive plus directement; de là le mouvement rétrograde des nœuds et le changement d'inclinaison de l'orbite.

138. Des actions analogues s'exercent entre tous les corps planétaires et produisent leurs inégalités. Les mouvemens de leurs nœuds, de leurs périhélies, et les changemens d'inclinaison de leurs orbites, sont dus à ces attractions réciproques : la loi de la gravitation universelle suffit pour les expliquer et pour les mesurer.

S'il fallait considérer simultanément toutes ces causes de perturbations, la complication des calculs deviendrait énorme, et les difficultés seraient insurmontables; heureusement la constitution du système solaire permet de les diminuer. Les corps qui composent ce système sont isolés dans l'espace, à des distances considérables; chaque planète, avec ses satellites, forme comme une sorte de petit monde à part, où tout est déterminé par les attractions particulières des corps qui en font partie. Les autres astres placés à de grandes distances, agissent à-peu-près également sur tous ces corps, qui sont beaucoup plus rapprochés les uns des autres; et cette action commune ne trouble pas leurs mouvemens relatifs.

Ainsi, les lois des mouvemens planétaires s'appliquent d'elles-mêmes aux mouvemens des satellites; et ces astres, dans leurs révolutions, nous offrent une image rapide des dérangemens séculaires qui auront lieu dans le système des planètes, et que le tems doit développer.

Mais, comme nous venons de le voir en parlant du mouvement de la lune, il ne suffit pas toujours de con-

sidérer chaque système isolément, il faut encore, pour atteindre la dernière exactitude, avoir égard à l'action des corps qui, en raison de leur proximité ou de leur [illegible], peuvent exercer une influence sensible, et ne négliger que ceux dont l'action, calculée d'une manière rigoureuse, serait constamment au-dessous des erreurs des observations.

Par exemple, dans la recherche des mouvemens de la lune, il suffit d'avoir égard aux actions réciproques de la lune, de la terre et du soleil. Celles des autres astres peuvent être négligées, soit parce que leur masse est trop petite, soit parce qu'ils sont trop éloignés; c'est pour cela que la théorie de la lune a reçu le nom de *problème des trois corps.*

Dans la théorie de la terre, au contraire, il faut avoir égard aux actions réunies du soleil, de la Lune, de Vénus, de Mars, de Jupiter, et de Saturne. Uranus en est trop éloigné pour avoir une influence sensible, et les autres planètes sont assez petites pour que leur action puisse être négligée.

Les effets de ces actions mutuelles sont sur-tout remarquables dans les mouvemens de Jupiter et de Saturne. Ces deux planètes, les plus grosses de notre système, s'attirant avec beaucoup de force, causent mutuellement, dans leurs orbites, de grandes inégalités dont les périodes embrassent plusieurs siècles, et dont cependant l'analyse moderne a dévoilé les lois.

139. Il est facile de sentir que des perturbations de ce genre, où les masses des corps ont une influence si considérable, doivent être extrêmement propres pour déterminer ces masses; aussi est-ce par ce moyen qu'on est parvenu à les calculer, et l'on mesure celle de chaque corps céleste par les effets qu'il produit à raison de sa

distance. Les volumes sont d'ailleurs donnés, comme on l'a vu plus haut, par les diamètres apparens. En les comparant aux masses, on en conclut les densités des différentes planètes, et les lois de la pesanteur à leur surface (*).

Le tableau suivant, extrait de l'*Exposition du Systéme du Monde*, offre les valeurs les plus exactes des masses des planètes principales, celle du Soleil étant prise pour unité.

Mercure.	$\frac{1}{2025810}$
Vénus.	$\frac{1}{356632}$
La Terre	$\frac{1}{337086}$
Mars.	$\frac{1}{2546320}$
Jupiter.	$\frac{1}{1067,09}$
Saturne	$\frac{1}{3534,08}$
Uranus.	$\frac{1}{19504}$

On voit combien toutes ces masses sont petites comparativement à celle du soleil. La terre, qui nous paraît si vaste, n'est qu'un grain de poussière par rapport à ce grand corps, qui n'est lui-même qu'un point dans le vide des cieux.

Les perturbations qu'éprouvent les satellites de Jupiter ont permis de déterminer leurs masses de la même manière. Voici leurs valeurs, la masse de leur planète étant prise pour unité.

(*) *Mécanique Céleste*, liv. VI, chap. VI et XVI.

1er. satellite.....	0,00001733
2e.....	0,00002324
3e.....	0,00008850
4e.....	0,00004766

Quoique ces masses soient fort petites, l'influence qu'elles ont sur les inégalités des satellites donne lieu de penser qu'elles sont très-exactes.

Les comètes jusqu'à présent observées n'ayant point produit de perturbations sensibles sur les autres corps du système planétaire, on n'a pu encore déterminer la masse d'aucune d'entr'elles. Mais par cette raison même on doit regarder ces masses comme extrêmement petites.

140. Les perturbations éprouvées par les corps célestes peuvent être quelquefois assez fortes pour changer leurs orbites et les dénaturer entièrement. C'est probablement ce qui arrive aux comètes qui décrivent des paraboles et des hyperboles. Ces astres errent sans doute de système en système, cédant toujours à des attractions nouvelles, jusqu'à ce que leur existence soit détruite, ou que leur orbite soit invariablement fixée.

141. On croit que ce sont des causes semblables qui ont changé l'orbite de la comète de 1770. On présume, avec beaucoup de vraisemblance, que cette comète, en allant vers son périhélie, a pris un orbe elliptique par l'action de Jupiter dont elle s'est fort approchée à cette époque; mais qu'ensuite, après avoir décrit cette orbite pendant une révolution, elle a passé de nouveau près de Jupiter qui, par une attraction contraire, a pu déduire cette première perturbation, et rendre à la comète un orbe infiniment alongé. L'auteur de la *Mécanique Céleste* a discuté par le calcul la possibilité de ce phénomène, et il a donné, dans le quatrième volume de cet ouvrage, les considérations qui le rendent extrêmement probable.

142. Mais par cela seul que les autres mouvemens planétaires se font tous dans le même sens et dans des ellipses peu excentriques et peu inclinées les unes aux autres, on peut démontrer que l'état actuel de ce système est stable; qu'aucune planète actuellement existante n'a été primitivement comète, et que le système solaire ne fait qu'osciller autour d'un état moyen d'ellipticité et d'inclinaison dont il s'écarte peu (*).

143. Nous venons de voir dans la gravitation universelle la cause générale des mouvemens célestes : c'est la même cause qui détermine la forme arrondie des planètes, et qui, se combinant avec la force centrifuge du mouvement de rotation, renfle leur équateur et aplatit leurs pôles; c'est elle encore qui, par une conséquence de cet aplatissement, produit le balancement de ces corps autour de leur centre de gravité. Prenons la terre pour exemple : si elle était exactement sphérique, les particules de matière situées de part et d'autre de son centre seraient également attirées par le soleil, et il n'en résulterait autour de ce centre aucun mouvement; mais le renflement de l'équateur trouble cette égalité. Les particules qui le composent peuvent être considérées comme autant de petites lunes liées fixement les unes aux autres et au globe terrestre. Chacune d'elles doit éprouver des inégalités analogues à celle de la lune véritable; c'est-à-dire, que ses nœuds doivent rétrograder sur l'écliptique, par l'action du soleil. Or, ces particules étant adhérentes au globe terrestre, ne peuvent avoir de mouvement sans le partager avec lui; elles tendent donc à l'entraîner avec elles en rétrogradant; et quoique leur mouvement, transmis à une

(*) *Mécanique Céleste*, tome I, p. 304.

si grande masse, soit considérablement affaibli, cependant il n'est pas tout-à-fait insensible ; la masse entière y cède peu-à-peu, et l'équateur de la terre rétrograde lentement sur l'écliptique, ce qui produit la précession des équinoxes.

La lune agissant sur la terre comme le soleil, doit occasionner des mouvemens analogues ; et la petitesse de sa masse est même plus que compensée par sa proximité. Mais comme ses positions autour de la terre changent sans cesse, les effets qui en résultent sont également variables. Aussi l'action de la lune ne se borne pas, comme celle du soleil, à produire un mouvement dans les équinoxes ; elle fait varier l'obliquité de l'écliptique et produit la nutation de l'axe terrestre ; et ces inégalités qui lui sont propres, ont des périodes qui dépendent de ses mouvemens.

La valeur moyenne de la précession étant le résultat des actions réunies du soleil et de la lune, tandis que la nutation est produite par la lune seule, ces phénomènes sont très-propres à faire connaître le rapport des masses de ces astres ; aussi en a-t-on fait usage, sinon pour découvrir ce rapport, du moins pour vérifier la valeur que d'autres phénomènes semblent lui assigner. Il en est de même de l'aplatissement de la terre, sans lequel il n'y aurait ni précession ni nutation de l'axe terrestre.

144. Enfin, nous pouvons observer les effets de la gravitation universelle dans les phénomènes du flux et du reflux de la mer. Les molécules liquides qui se trouvent sur le sphéroïde terrestre, du côté du soleil, sont plus attirées par lui que le centre de la terre ; leur poids en est donc un peu diminué, comme l'est celui de la lune dans ses conjonctions. Il faut donc qu'une plus grande masse de liquide s'accumule de ce côté pour compenser

la diminution de la pesanteur. La même chose arrive, par une cause différente, aux molécules d'eau situées sur l'hémisphère opposé : elles sont moins attirées que le centre de la terre ; ce centre s'en éloigne, et leur poids diminue, comme celui de la lune, dans les oppositions. Ainsi, par la réunion de ces circonstances, l'océan doit s'élever sous l'astre qui l'attire, et former sur la surface terrestre deux protubérances opposées, situées sur la ligne droite qui joint le centre de la terre à celui du soleil. La masse totale des eaux restant toujours la même, il faut nécessairement qu'il se forme, par compensation, un abaissement dans les parties de la mer qui sont à 100° du soleil.

L'action de la lune doit produire des phénomènes analogues ; elle soulève aussi les eaux de l'océan, et les oscillations qu'elle y occasionne doivent suivre les périodes de ses mouvemens.

La hauteur totale des marées dépend donc de l'action combinée de ces deux astres : elle est la plus grande possible dans les sysigies, où leurs actions conspirent, et la plus petite dans les quadratures, où elles sont contraires.

La différence des périodes des marées lunaires et solaires a permis de reconnaître séparément les effets particuliers des deux astres ; ce qui a donné la mesure de leur action. Celle de la lune sur les marées est plus forte que celle du soleil, parce que la petitesse de ce satellite est plus que compensée par sa proximité. On a conclu de-là le rapport des masses de la lune et du soleil. Ce rapport s'accorde avec celui que l'on peut déduire des autres phénomènes sur lesquels la masse de la lune exerce une influence sensible (*). De l'ensemble de tous ces faits il

(*) *Mécanique Céleste*, tome III, page 160.

résulte que la masse de la lune est $\frac{1}{68,4}$ de celle de la terre. On sait, d'ailleurs, que le diamètre de la lune est exprimé par 0,273, celui de la terre étant 1 ; d'où il résulte que son volume $\frac{1}{49,149}$ du volume de la terre ; et comme sa masse n'est que $\frac{1}{68}$, il s'ensuit que sa densité est moindre que celle du globe terrestre.

D'après la théorie précédente, chaque marée devrait arriver, à l'instant du passage, au méridien de l'astre qui la produit. Cependant cela n'arrive pas dans nos ports : cet effet tient aux circonstances locales, c'est-à-dire à l'accumulation des eaux, au frottement du fond de la mer, et à la forme des rivages, qui gênent et retardent les oscillations ; aussi ce retard n'a plus lieu en pleine mer ; mais comme les circonstances qui le produisent dans chaque port sont à-peu-près constantes, le retard est aussi à-peu-près constant, et il est facile d'en tenir compte lorsqu'il est une fois observé. On trouve dans le livre de la *Mécanique Céleste* toutes les formules nécessaires pour cet objet.

145. Voilà le tableau abrégé des phénomènes qui se déduisent, comme conséquences, de la PESANTEUR UNIVERSELLE. Je n'ai pu qu'en indiquer ici l'enchaînement et la dépendance ; mais avec le secours du calcul on pénètre jusque dans leurs plus petits détails, on développe leurs rapports les plus cachés, et on parvient à les mesurer avec plus d'exactitude que par les observations mêmes. C'est surtout dans le *Traité de la Mécanique Céleste* qu'il faut chercher ces belles applications.

Pour nous, bornés aux simples élémens, nous devons nous arrêter ici. Mais arrivés à ce terme, jetons nos regards

en arrière, et mesurons la carrière que nous avons parcourue. Nous sommes partis des premières idées que donne à tous les hommes l'aspect de la terre et du ciel : nous étions alors entourés de tous les prestiges produits par les phénomènes physiques qui se passent dans l'atmosphère et dans les cieux. Peu-à-peu nous avons reconnu ces préjugés, dissipé ces prestiges, soulevé ces voiles : nous nous sommes ainsi formé des idées plus vraies de notre univers. Commençant à douter du témoignage de nos sens, nous avons mesuré, et nous avons acquis des moyens d'observation très-précis, dont nous avons apprécié la justesse. Munis de ces secours, nous les avons appliqués à la recherche des lois que suivent les astres dans leurs mouvemens, et la comparaison de ces lois nous a conduit à un petit nombre de phénomènes généraux qui renferment implicitement tous les autres. Enfin, nous avons vu que ces résultats eux-mêmes peuvent se composer en un seul, et se représenter par une loi unique, celle de la PESANTEUR UNIVERSELLE; parvenus à ce principe, nous nous voyons en quelque sorte élevés à la source commune de tous les mouvemens célestes; tous en dérivent de la manière la plus simple, et s'y trouvent en quelque sorte comme concentrés. Nous avons donc, pour ainsi dire, décomposé le système du monde, nous l'avons réduit à son élément unique, et nous l'avons ensuite recomposé. Sous ce rapport, l'astronomie est, de toutes les sciences, la plus complète, la plus sublime, et celle où l'esprit humain s'est le plus élevé. Mais ce qui lui donne sur-tout un prix inestimable, c'est sa parfaite certitude. Quel que soit le progrès des sciences, le principe de la pesanteur universelle est établi d'une manière inébranlable, parce qu'il repose sur des faits certains, et sa durée sera éternelle. Sans doute il est étonnant de voir l'esprit humain arriver

à des conclusions si étendues et si hardies ; mais on ne peut révoquer en doute la vérité déduite des faits par un raisonnement rigoureux. Et c'est ici le lieu d'appliquer ces belles paroles de Cicéron, qui semblent spécialement appropriées à cette circonstance : *Hæc mirabilia videri intelligo ; sed cùm certè superiora firma ac vera sint, his autem ea consentanea et consequentia ;* NEC DE EORUM QUIDEM VERITATE EST DUBITANDUM. CICER. *de Fin.*, lib. 3, ch 15.

Calcul numérique des passages de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil.

La première chose à faire dans cette recherche, c'est de déterminer toutes les circonstances de l'éclipse pour le centre de la terre. Si la parallaxe du soleil et celle de la planète étaient nulles, ces circonstances seraient les mêmes pour le centre et pour un point quelconque de la surface terrestre. La différence est donc de l'ordre des parallaxes, puisque celles-ci sont toutes deux fort petites. Les déterminations relatives au centre de la terre peuvent être regardées comme de premières données déjà très-approchées, auxquelles il suffit de faire des corrections fort petites pour les transporter aux différens lieux d'observation.

Or, pour ce premier cas très-simple, la question est exactement la même que dans toute autre éclipse, et les formules que nous avons trouvées dans le troisième livre sont immédiatement applicables. En conservant donc la même notation que nous avons alors employée, nommons λ la latitude géocentrique de la planète à l'instant de la conjonction, m et n ses mouvemens horaires géocentriques en longitude et en latitude, m' le mouvement géocentrique du soleil en longitude. Cela posé, à un instant quelconque t, compté depuis la conjonction, la latitude géocentrique de la planète sera $\lambda + nt$; sa différence de longitude géocentrique avec le soleil sera $(m - m')t$; par conséquent, si l'on représente

par Δ la distance des centres à ce même instant, on aura, comme dans toutes les autres éclipses, chapitre XVIII du troisième livre,

$$(m - m')^2 t^2 + (\lambda + n t)^2 = \Delta^2,$$

en faisant, pour plus de simplicité

$$\text{tang } \alpha = \frac{n}{m - m'},$$

comme dans le calcul des éclipses, cette équation devient

$$n^2 t^2 + 2 \lambda n \sin^2 \alpha . t = \left\{ \Delta^2 - \lambda^2 \right\} \sin^2 \alpha$$

et en la résolvant par rapport à t, elle donne

$$t = \frac{-\lambda \sin^2 \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\Delta^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha}}{n}.$$

Ici, comme dans toutes les formules du troisième livre, le mouvement horaire en latitude $+n$ est supposé élever la planète vers le pôle boréal de l'écliptique ; le mouvement horaire géocentrique $+m$ est supposé direct comme celui du soleil. Si le mouvement en latitude portait, au contraire, la planète vers le pôle austral de l'écliptique, n deviendrait négatif. De même il faudrait faire m négatif, si le mouvement de la planète était rétrograde. Ce dernier cas arrive toujours dans les passages de Vénus et de Mercure sur le soleil.

Si, dans l'équation précédente, on met pour Δ la somme de demi-diamètres apparens du soleil et de la planète vus du centre de la terre, les valeurs de t appartiendront au commencement et à la fin de l'éclipse, en supposant toutefois les mouvemens horaires uniformes depuis la conjonction jusqu'aux instans de ces phénomènes. Si l'on mettoit pour Δ la différence des demi-diamètres au lieu de leurs sommes, on auroit les instans des contacts intérieurs, toujours dans la supposition de l'uniformité.

Si l'on ne voulait point regarder les mouvemens horaires comme uniformes pendant cet intervalle, qui peut être de six ou sept heures sexagésimales, il n'y aurait qu'à regarder les époques ainsi obtenues comme de premières approximations, que l'on corrigerait de la manière qui a été expliquée dans le chapitre XVIII du troisième livre. On calculerait pour ces instans, par les tables, les lieux géocentriques du soleil et de la planète ; puis on supposerait que les instans véritables diffèrent des premiers d'une très-petite

quantité t, et l'on déterminerait t' par la condition que la distance des centres, calculée d'après ces nouveaux élémens, fût exactement égale à la somme des demi-diamètres de la planète et du soleil, si l'on voulait considérer les contacts extérieurs; ou à leur différence, si l'on voulait considérer les contacts intérieurs. L'instant du premier contact est toujours extrêmement incertain, et l'on peut même dire qu'il est impossible de l'observer avec précision. Il faut que le soleil soit déjà sensiblement échancré avant que nous apercevions l'existence de l'éclipse.

Je ferai l'application de cette méthode au passage de Vénus observé le 3 juin 1769 dans le nœud descendant; et comme il ne s'agit ici que de donner un exemple de la méthode, j'adopterai les élémens déduits des tables, tels que Duséjour les a employés. Nous aurons ainsi, en mesures sexagésimales,

mouv. hor. géoc. de Vénus sur le ☉ en longit. $m - m' = -237'',94$

mouv. hor. géoc. de Vénus en latitude.... $n = -35'',69$

latitude géoc. de Vénus en conjonction.... $\lambda = +623'',50$

demi-diamètre de Vénus..... $= 28'',60$

demi-diamètre du ☉..... $= 947'',20$

Les mouvemens horaires et la latitude sont affectés de l'aberration du soleil et de la planète, parce que ce sont les valeurs apparentes de ces élémens, tels qu'on les observe. Avec ces données, on trouve

$$\alpha = 8^{\circ}.31'.47'' \qquad \text{ou bien} \qquad \alpha = 188^{\circ}.31'.47''.$$

La dernière valeur est seule admissible, puisque la planète *descend* vers son nœud. Maintenant, si l'on suppose

pour les contacts extér..... $\Delta = 947'',20 + 28'',60 = 975'',80$

pour les contacts intér..... $\Delta = 947'',20 - 28'',60 = 918'',60$

on trouvera

premier contact. extér. $t = +0^{h},38437 - 3^{h},143404 = -2^{h},45', 32'',$

milieu de l'éclipse..... $t = +0^{h},38437 \qquad = +0^{h},28', 3'',$

dernier cont. extér.... $t = +0^{h},38437 + 3^{h},143404 = +3^{h},31', 39'', 98$

premier cont. intér.... $t = +0^{h},38437 - 2^{h},830036 = -2^{h},26', 44'', 40$

dernier cont. intér..... $t = +0^{h},38437 + 2^{h},830036 = +3^{h},12', 51'', 86$

en prenant les différences de ces résultats on en tire

cont. extér... demi-durée.. $3^h,143404 = 3^h,\ 8^l,\ 36^{ll},\ 25$
durée totale... $6^h,286808 = 6^h,\ 17^l,\ 12^{ll},\ 50$
cont. intér... demi-durée... $2^h,830036 = 2^h,\ 49^l,\ 48^{ll},\ 13$
durée totale... $5^h,660072 = 5^h,\ 39^l,\ 36^{ll},\ 26$

Différ. des cont. extér. et intér.... $3^h,143404 - 2^h,830036 = 18^l,48^{ll},12$, c'est le tems que le disque entier de Vénus emploie pour entrer sur le disque du soleil ou pour en sortir.

Ces résultats sont obtenus en supposant les mouvemens horaires uniformes. Si l'on veut atteindre une plus grande précision, il faudra calculer directement, par les tables, les élémens géocentriques des deux astres pour les diverses époques que nous venons de déterminer; puis on procédera à une seconde approximation, comme nous l'avons dit tout-à-l'heure, et comme nous l'avons expliqué avec plus de détail encore, pag. 499 et 500 du troisième livre. Les nouvelles valeurs que l'on obtiendra de cette manière auront toute l'exactitude qu'il sera possible d'atteindre en se servant des tables astronomiques.

De quelque manière que l'on ait opéré, on connaîtra chacun des instans des contacts que l'on considère; et puisque l'on connaît aussi les mouvemens horaires, on pourra calculer pour ces mêmes instans la longitude l' du soleil, son mouvement horaire m', la longitude géocentrique l de la planète, sa latitude géocentrique λ, et ses mouvemens horaires géocentriques m et n en longitude et en latitude. Dans ce second calcul, nous employons les mêmes lettres que tout-à-l'heure; mais leurs valeurs seront différentes. Maintenant si, pour le centre de la terre, le contact que nous considérons arrive à l'instant T', ce même contact, pour un point quelconque de la surface terrestre, arrivera à un instant $T'+t'$ très-peu différent du premier, car la différence t' sera de l'ordre des parallaxes. A cet instant, d'après les tables astronomiques, les coordonnées des deux astres vus du centre de la terre seront

$l'+m't'$ pour le soleil, et $l+mt'$; $\lambda+nt'$ pour la planète.

Si l'on représente par x', x, y, les effets des erreurs des tables sur ces diverses coordonnées, les valeurs corrigées seront

$$l'+m't'+x';\quad l+mt'+x;\quad \lambda+nt'+y.$$

Pour transporter ces valeurs à la surface terrestre, il suffit d'en retrancher les valeurs des parallaxes de longitude et de latitude calculées par les formules que nous avons rapportées pag. 62 du second livre, et 530 du troisième. Nous représenterons ces parallaxes par α', δ', relativement au soleil, et par α δ relativement à la planète, de sorte que les coordonnées apparentes seront

	Longit. apparente.	Latit. apparente.
pour le soleil.....	$l' + m' t' - \alpha' + x'$	$- \delta'$
pour la planète.....	$l + m t' - \alpha + x$	$\lambda + n t' - \delta + \gamma$

Il semble qu'il faudrait encore substituer ces parallaxes dans les mouvemens horaires m', m, n. En effet, cela devrait être ainsi à la rigueur, car les mouvemens horaires ne peuvent pas être les mêmes pour le centre et pour la surface de la terre. La différence doit être de l'ordre des parallaxes. Mais on remarquera que ces mouvemens horaires ne servent que pendant le très-petit espace de tems t', qui est aussi de l'ordre des parallaxes. Or, à cause de l'extrême petitesse des quantités de cet ordre, on peut, sans craindre aucune erreur sensible, se borner à leur première puissance. Ainsi, dans les termes déjà multipliés par t', il suffira d'employer les mouvemens horaires calculés pour le centre de la terre. Alors les coordonnées apparentes des deux astres, vus d'un point quelconque de la surface, se réduisent aux expressions que nous venons de rapporter. Dans ces expressions, les parallaxes α, δ, α', δ', varient avec le tems et avec la position de l'observateur sur la surface de la terre ; mais les erreurs des tables x', x, y, peuvent être supposées constantes pendant toute la durée du passage.

Il faut également prévoir que l'on pourra se tromper de quelque chose en employant les demi-diamètres apparens tirés des tables. Supposons donc qu'il en résulte une erreur d sur la distance apparente des centres, à l'instant du contact que l'on observe, en sorte que la véritable distance soit $\Delta + d$ au lieu de Δ que nous avions d'abord adopté dans notre premier calcul.

Alors cette distance $\Delta + d$ pourra encore être regardée comme

l'hypothénuse d'un triangle rectiligne rectangle dont les côtés seront

$$l-l'+(m-m')t'-(\alpha-\alpha')+x-x' \text{ et } \lambda+nt'-(\delta-\delta')+y,$$

ce qui donnera

$$\left\{l-l'+(m-m')t'-(\alpha-\alpha')+x-x'\right\}^2+\left\{\lambda+nt'-(\delta-\delta')+y\right\}^2=(\Delta+d)^2.$$

Cette équation déterminerait t', si les erreurs des tables et celles des diamètres apparens étaient connues. Généralement elle exprime une relation qui doit subsister entre ces diverses quantités. Il n'est point nécessaire de résoudre cette équation rigoureusement ; il suffit de se borner aux premières puissances des quantités qui dépendent des parallaxes ou de l'erreur des tables et des diamètres. De plus, il faut remarquer que l'on a

$$(l-l')^2+\lambda^2=\Delta^2,$$

puisque, par supposition, les quantités l, l' et λ, ont été déterminées par les tables, de manière à ce que cette condition eût lieu. A la vérité, cela suppose que les demi-diamètres apparens qui entrent dans Δ sont sensiblement les mêmes à la surface de la terre et à son centre ; c'est en effet ce qui a lieu pour Vénus, Mercure et le soleil, à cause de leur grand éloignement ; et l'on s'en convaincra facilement, si l'on veut recourir à la formule par laquelle nous avons calculé, dans le troisième livre, l'accroissement du diamètre apparent de la lune à diverses hauteurs sur l'horizon. Cette formule, appliquée à Vénus et au Soleil, ne donne que des corrections tout-à-fait insensibles aux observations les plus exactes. Avec ces restrictions, si l'on développe les carrés des polynomes que l'équation précédente renferme, en se bornant aux premières puissances des petites corrections, l'on aura

$$(l-l')\left\{(m-m')t'-(\alpha-\alpha')+(x-x')\right\}+\lambda\left\{nt'-(\delta-\delta')+y\right\}=\Delta.d,$$

d'où l'on tire

$$t'=\frac{(l-l')\left\{\alpha-\alpha'-(x-x')\right\}+\lambda\left\{\delta-\delta'-y\right\}+\Delta d}{(l-l')(m-m')+\lambda n}.$$

Cette valeur doit être ajoutée à T' ; ainsi $T'+t'$ est l'instant du contact apparent vu de la surface.

Jusqu'ici nous avons compté le tems à partir de la conjonction. Pour comparer les résultats du calcul à ceux de l'observation, il est plus commode et plus simple d'introduire dans nos formules le tems absolu. Pour cela, nommons T' le tems absolu que l'on comptait sous le premier méridien, à Paris, par exemple, au moment où la conjonction apparente, calculée par les tables, avait lieu pour le centre de la terre. Supposons que M soit l'angle horaire du méridien de Paris avec celui où l'observation s'est faite, cet angle horaire étant exprimé en tems de même nature que T', et compté à partir du méridien supérieur d'occident en orient, comme nous l'avons toujours fait dans nos calculs. Alors, dans le lieu de l'observation, le tems absolu sera $T'-M$ à l'instant de la conjonction vue du centre de la terre, et par conséquent le tems absolu du contact apparent dans ce même lieu sera

$$T-M+T'+t'.$$

Cette quantité est connue par les observations. En la nommant H', et mettant pour t' sa valeur, nous aurons

$$H'=T-M+T'+\frac{(l-l')\left\{\alpha-\alpha'-(x-x')\right\}+\lambda\left\{\delta-\delta'-\gamma\right\}+\lambda\Delta d}{(l-l')(m-m')+\lambda n}.$$

C'est une équation de condition entre les quantités observées et inconnues du problème.

Cette équation peut être mise sous une forme encore plus simple. Pour cela, il faut se reporter aux formules approchées des parallaxes de longitude et de latitude, que nous avons données dans le second Livre, pag. 62. Elles suffisent pour le cas actuel, puisque nous nous bornons à la première puissance des parallaxes. Or, en nommant L et Λ la longitude et la latitude du zénith, l' et λ' la longitude et la latitude de l'astre, Π sa parallaxe horizontale, nous avons trouvé alors

$$\alpha=\frac{\Pi\cos\Lambda\sin(L-l')}{\cos\lambda'}$$

$$\delta=\Pi\left\{\sin\Lambda\cos\lambda'-\cos\Lambda\sin\lambda'\cos(L-l')\right\}.$$

Pour appliquer ces corrections au soleil, il faut y faire λ' nul; en général, leurs valeurs ne seront pas les mêmes pour le soleil et pour la planète. Elles différeront par la valeur numérique de la

parallaxe Π et par celle du coefficient de Π, qui dépend de la latitude et de la longitude de chacun des deux astres. Mais ces élémens, quoique différens à la rigueur, le sont extrêmement peu dans les passages de Vénus et de Mercure, puisque ces planètes se projettent alors sur le disque du soleil. Cette circonstance, jointe à la petitesse absolue des parallaxes, permet de supposer ces coefficiens égaux entr'eux. En effet, soient $\Pi\ a$, $\Pi'\ a'$, les expressions des parallaxes de même dénomination relatives aux deux astres, il n'entrera dans l' que leur différence, c'est-à-dire $\Pi'\ a' - \Pi\ a$, qui peut se mettre sous la forme

$$(\Pi' - \Pi)\ a' + \Pi\ (a' - a)\ ;$$

dont le second terme devient négligeable à cause de la petitesse des facteurs Π et $a' - a$.

Si donc nous représentons par P *l'excès de la parallaxe horizontale de la planète sur la parallaxe du soleil*, notre équation de condition deviendra

$$[1]\quad H' = T - M + T' + \frac{(l - l')\left\{a'P - (x - x')\right\} + \lambda\left\{b'P - y\right\} + \Delta d}{(l - l')\ (m - m') + \lambda n}$$

en supposant

$$a' = \cos A \sin (L - l')\ ; \qquad b = \sin A.$$

Ce sont les valeurs des coefficiens de la parallaxe relativement au soleil, pour lequel λ' est nul. Les quantités A et L, qui entrent dans ces expressions, sont faciles à calculer par les formules

$$\sin A = -\sin \omega \cos D \sin M + \cos \omega \sin D$$

$$\operatorname{tang} L = \frac{\operatorname{tang} D \sin \omega + \sin M \cos \omega}{\cos M},$$

dans lesquelles D représente la déclinaison du zénith, ou la latitude géographique du lieu de l'observation, M l'ascension droite du zénith, ou l'angle horaire du point équinoxial réduit en degrés, et enfin ω l'obliquité de l'écliptique.

Si l'on regarde comme connue la longitude M du lieu de l'observation, relativement au premier méridien, l'équation (1) ne contiendra que quatre inconnues distinctes, savoir :

$$P,\ x - x',\ y \text{ et } d,$$

c'est-à-dire la différence des parallaxes, les erreurs des tables, et celles des demi-diamètres apparens de Vénus et du Soleil.

Mais la détermination exacte des longitudes est une chose si difficile, que l'on aura bien rarement des valeurs de M que l'on puisse employer en toute assurance ; et les erreurs que l'on pourrait commettre sur cet élément jeteraient toujours beaucoup d'incertitude sur la valeur P, qui, par elle-même, est extrêmement petite. Le mieux serait donc de s'en rendre indépendant. C'est ce qui arrivera, si l'on observe dans un même lieu le commencement et la fin du passage ; car, alors, la valeur de M sera certainement la même dans les deux cas. Pour développer cette combinaison d'une manière simple, nous ferons

$$A = \frac{(l-l)}{(l-l^{\prime})\,(m-m^{\prime}) + \lambda n}$$

$$B = \frac{\lambda}{(l-l^{\prime})\,(m-m^{\prime}) + \lambda n}.$$

A et B seront des coefficiens faciles à calculer pour chacune des phases que l'on voudra considérer ; et en distinguant par des accens les quantités qui changent d'une phase à une autre, nous aurons

1ère phase... $H^{\prime} = T - M + T^{\prime} + A^{\prime}\left\{a^{\prime} P - (x - x^{\prime})\right\} + B^{\prime}\left\{b^{\prime} P - y\right\} + \dfrac{B^{\prime}\,\Delta^{\prime}\,d^{\prime}}{\lambda^{\prime}}$

2e phase.... $H^{\prime\prime} = T - M + T^{\prime\prime} + A^{\prime\prime}\left\{a^{\prime\prime} P - (x - x^{\prime})\right\} + B^{\prime\prime}\left\{b^{\prime\prime} P - y\right\} + \dfrac{B^{\prime\prime}\,\Delta^{\prime\prime}\,d^{\prime\prime}}{\lambda^{\prime\prime}}$

Si nous retranchons ces deux équations l'une de l'autre, la longitude M du lieu de l'observation disparaîtra, et l'on aura

$$(2)\ldots\ H^{\prime\prime} - H^{\prime} = T^{\prime\prime} - T^{\prime} + \left\{A^{\prime\prime} a^{\prime\prime} + B^{\prime\prime} b^{\prime\prime} - A^{\prime} a^{\prime} - B^{\prime} b^{\prime}\right\} P - (A^{\prime\prime} - A^{\prime})\,(x - x^{\prime}) - (B^{\prime\prime} - B^{\prime})\,y + \frac{B^{\prime\prime}\,\Delta^{\prime\prime}\,d^{\prime\prime}}{\lambda^{\prime\prime}} - \frac{B^{\prime}\,\Delta^{\prime}\,d^{\prime}}{\lambda^{\prime}}$$

Pour pouvoir appliquer cette formule avec discernement, examinons les diverses inconnues qu'elle renferme, et voyons jusqu'à quel point elles sont indépendantes les unes des autres. D'abord, si nous examinons $d^{\prime}$ et $d^{\prime\prime}$, qui sont les erreurs de la distance apparente employée dans le calcul pour l'instant du contact, les valeurs en seront différentes, s'il s'agit d'un contact intérieur ou

extérieur ; car, en nommant s' et ν' les erreurs que l'on commet dans l'évaluation des demi-diamètres apparens du soleil et de Vénus, on aura

$$\text{pour les contacts} \begin{cases} \text{extérieurs...} & d = s' + \nu' \\ \text{intérieurs...} & d = s' - \nu'. \end{cases}$$

Ainsi, quel que soit le nombre et l'espèce des phases que l'on compare, les erreurs de la distance apparente des centres, représentées par d', d'', d''', n'introduiront jamais que les deux inconnues distinctes s' et ν'.

On peut remarquer aussi que la longitude M du lieu de l'observation entre encore implicitement dans les coefficiens des parallaxes $a'\ b'\ a''\ b''$; car, pour calculer ces coefficiens, il faut connaître l'ascension droite du zénith du lieu de l'observation à l'instant de la phase que l'on considère ; cette ascension droite est égale à l'angle horaire du soleil qui est observé, plus à l'ascension droite de cet astre, qu'il faut déduire des tables par le calcul. Cela exige donc que l'on connaisse la longitude du lieu relativement au méridien pour lequel les tables sont construites. Mais on éludera cette difficulté, en remarquant que les instans des mêmes contacts observés en différens lieux diffèrent très-peu les uns des autres et de l'instant calculé pour le centre de la terre ; car la différence est de l'ordre des parallaxes. Pendant ce court espace de tems, le mouvement du soleil n'est que de quelques secondes de degré, et une si petite quantité n'a qu'une influence insensible sur le calcul des parallaxes de longitude et de latitude. On pourra donc, dans les calculs de $a'\ a''\ b'\ b''$, prendre pour l'ascension droite du soleil celle que les tables indiquent pour l'instant du contact analogue vu du centre de la terre. Alors, l'ascension droite du zénith de chaque lieu sera égale à cette quantité constante augmentée de l'angle horaire du soleil à l'instant de l'observation ; de sorte que le calcul des coefficiens $a'\ a''\ b'\ b''$ devient indépendant de la connaissance de la longitude des lieux.

Je dois même faire remarquer que cette manière d'opérer devient nécessaire pour conserver le degré d'approximation que nous avons jusqu'ici employé ; car, puisque nous sommes bornés à la première puissance des parallaxes, nous devons, dans le calcul des coefficiens $a'\ a''\ b'\ b''$, supposer les parallaxes nulles,

puisque ces coefficiens sont déjà multipliés par la différence P des parallaxes.

En résumant ces considérations, on voit que l'équation précédente

$$(2)\ldots\ldots H''-H'=T''-T'+\left\{A''a''+B''b''-A'a'-B'b'\right\}P$$
$$-(A''-A')(x-x')-(B''-B')y+\frac{B''\Delta''d''}{\lambda''}a''-\frac{B'\Delta'd'}{\lambda'}$$

ne contiendra en tout que cinq inconnues distinctes, savoir : les erreurs des tables en longitude et latitude, celles des demi-diamètres, et la différence P des parallaxes des deux astres. Cinq durées entières ainsi observées suffiront donc pour déterminer toutes les inconnues.

Tel est l'énoncé le plus général de la méthode. Mais, dans l'application, le but principal qu'on se propose est de déterminer la différence P des parallaxes. Il faut donc faire concourir le plus grand nombre d'observations possible à la recherche de cet élément, en écartant avec le plus grand soin toutes les causes d'erreurs qui pourraient l'altérer. Pour cela, il faut tâcher de la rendre indépendante des autres inconnues du problème. Or, on y parviendra, en comparant deux à deux les intervalles des mêmes contacts observés en différens lieux; car, alors, les coefficiens qui multiplient les erreurs des tables et celles des demi-diamètres seront les mêmes dans les deux observations comparées, et par conséquent les termes dus à ces erreurs disparaîtront de la différence des deux équations.

Supposons donc que l'on se borne à des comparaisons de cette espèce. Alors les quantités T', T'', A', A'', B' B'' seront les mêmes dans toutes les équations que l'on pourra former, puisque ces quantités se rapporteront aux instans des mêmes phases calculées pour le centre de la terre; mais les coefficiens a' a'' b' b'' des parallaxes et les instans observés H' H'', seront différens. Ne considérons d'abord que deux lieux d'observation, et désignons par des accens inférieurs les quantités qui répondent à celui qui a vu le dernier le phénomène; alors la différence des deux équations (1) donnera

$$H''-H'-(H_{,}-H_{,})=\left\{A''a''+B''b''-A'a'-B'b'\right\}P$$
$$-\left\{A''a_{,}+B''b_{,}-A'a_{,}-B'b_{,}\right\}P$$

Cette équation ne contient plus d'autre inconnue que la différence P des parallaxes, et l'on en tire

$$P = \frac{H'' - H' - (H_{,} - H_{,})}{A''(a'' - a_{,,}) + B''(b'' - b_{,,}) - A'(a' - a_{,}) - B'(b' - b_{,})}.$$

Par ce moyen, on trouvera isolément la différence des parallaxes. Or, d'après la connaissance du mouvement de la planète dans son orbite, on peut calculer pour un instant quelconque le rapport des distances de la planète et du soleil à la terre. Ce rapport est justement inverse de celui de leurs parallaxes. De cette manière, on connaîtra le rapport des parallaxes d'après la théorie du mouvement des planètes; et leur différence d'après les observations du passage sur le disque du soleil. On pourra donc déterminer chacune des parallaxes séparément.

Pour donner un exemple numérique de l'usage de ces formules, je vais les appliquer aux observations réellement faites du passage de Vénus en 1769.

La première chose à faire, c'est de calculer la valeur des coefficiens A et B pour les diverses phases de l'éclipse, c'est-à-dire pour les contacts intérieurs et extérieurs. Or, on a en général

$$A = \frac{l - l'}{(l - l')(m - m') + \lambda n};$$

$$B = \frac{\lambda}{(l - l')(m - m') + \lambda n}.$$

Il ne faut qu'y mettre pour $m - m'$, n les mouvemens horaires relatifs, pour $l - l'$ la différence des longitudes, et pour λ la latitude de la planète à l'instant de la phase que l'on veut considerer. Par exemple, lors du premier contact intérieur, nous avons trouvé

$$t = -2^h,44567,$$

nous avions de plus

$$m - m' = -237'',94, \qquad n = -35'',69.$$

Avec ces données, on trouve d'abord

$$l - l' = (m - m')t = +581'',924 \qquad nt = +87'',277$$
$$\lambda = +623'',5 + nt = 710'',78.$$

Le nombre $623'',50$ est la latitude géocentrique de la planète à l'instant de la conjonction. De là on tire

$$A' = \frac{1}{m - m' + \frac{\lambda n}{l - l'}} = -\frac{1}{281,528}$$

$$B' = \frac{\lambda A}{l - l'} = -\frac{1}{230,491}.$$

Ces valeurs, de même que tous les autres termes de l'équation, sont calculées en prenant l'heure sexagésimale pour unité de tems ; mais dans les applications, il sera plus commode de réduire toutes les époques observées en secondes de tems : ce qui se réduit à multiplier tous les termes de l'équation (1) par 3600, nombre de secondes que contient l'heure sexagésimale. En adoptant cette convention, comme nous le ferons toujours par la suite, nous devons multiplier aussi par 3600 les valeurs précédentes de A' et de B, ce qui donne

Premier contact intérieur.... $A' = -12,7872$ $B' = -15,6188$.

En opérant de la même manière pour le contact intérieur de la fin de l'éclipse, et désignant par deux accens les quantités qui s'y rapportent, nous aurons d'abord

$$t'' = +3^h,214406 ; \quad l - l' = (m - m')\, t'' = -764'',836 ;$$
$$n\, t'' = -114'',71 ; \quad \lambda = +623'',50 - 114'',71 = +508'',79,$$

ce qui donne, en multipliant A'' et B'' par 3600, pour réduire le tems en secondes

$$A'' = -16,8067 \qquad B'' = +11,1803$$

Enfin, en désignant par trois accens le dernier contact extérieur lors de la sortie, on aura

$$t''' = +3^h,5277\dot{7}4 ; \quad l - l' = (m - m')\, t''' = -839'',398 ;$$
$$n\, t''' = -125'',893 ; \quad \lambda = +623'',50 - 125'',893 = +497'',61 ;$$

ce qui donne, en exprimant A''' et B''' comme tout-à-l'heure

$$A''' = -16,6067 \qquad B''' = +9,84474$$

Les coefficiens A et B se calculent, comme on voit, d'après des données tirées des tables. Il n'en est pas ainsi des coefficiens a et b, qui multiplient les parallaxes de longitude et de latitude : ceux-ci dépendent de la latitude du lieu et de l'heure de l'observation : il

faut donc recourir à ces dernières. J'ai réuni dans le tableau suivant celles dont nous ferons usage. Le temps est compté dans chaque lieu à partir du méridien supérieur, et d'orient en occident de 0 à 24 heures sexagésimales.

	LIEUX des OBSERVATIONS.	LATITUDE.	HEURE de l'observation en tems solaire au mér. du lieu.	NOMS des OBSERVATEURS.
em. contact intér.	Cajanebourg	64°.13′.30. *B*	9h.20′.46″	Planmann.
contact extér.	Cajanebourg		15h.32′.26″	
em. contact intér.	Taïti	—17°.28′.55. *A*	21h.44′. 4″	Green, Solander, Cook.
rn. contact extér.	Taïti		27h.32′. 8″	

Ces observations se rapportent aux deux contacts que nous avons désignés par un et par trois accens. La première chose à faire, c'est de calculer les longitudes et les ascensions droites du soleil aux instans de ces deux contacts vus du centre de la terre. Pour cela nous admettrons, avec Dionis Duséjour, qu'à l'instant de la conjonction la longitude du soleil était, suivant les tables, 73°. 21′. 37″ avec un mouvement horaire égal à 143″,50. D'après cela, on trouve qu'aux instans du premier et du dernier contact vus du centre de la terre, cette longitude était

premier contact..... $l' = 73°.21'.40''$

dernier contact..... $l''' = 73°.35'.57''$.

De là, avec l'obliquité de l'écliptique 23°. 28′. 1″, on trouve les valeurs correspondantes des ascensions droites du soleil que nous représenterons par $(a)'$ et $(a)'''$.

premier contact..... $(a)' = 71°.57'.16''$

dernier contact..... $(a)''' = 72°.12'.36''$

Ajoutant à ces ascensions droites les angles horaires du soleil observés dans les deux lieux et convertis en degrés de l'équateur,

on aura les ascensions droites $M^{I}M^{III}$, du zénith de ces lieux aux instans des observations ; leurs valeurs seront

Cajanebourg { premier contact... $M^{I} = 212°.\ 8'.46''$; dernier contact.... $M^{III} = 305°.19'.\ 6''$

Taïti..... { premier contact... $M^{I} = 37°.58'.16''$; dernier contact.... $M^{III} = 125°.14'.36''$.

Quant aux déclinaisons du zénith, ce sont les latitudes géographiques elles-mêmes. Mais, pour avoir égard à l'ellipticité de la terre, il faut compter ces latitudes à partir du zénith elliptique, c'est-à-dire en retrancher l'angle du rayon de l'ellipsoïde avec la verticale. Cet angle, calculé par la formule donnée page 168 du premier Livre, se trouve de $8'\ 45''$ pour Cajanebourg, et de $6'.23''$ pour Taïti. En retranchant ces quantités des valeurs données dans la page précédente pour les latitudes géographiques de ces deux lieux, on trouve

Cajanebourg... $D^{I} = D^{III} = 64°.\ 4'.45''$

Taïti..... $D^{I} = D^{III} = -17°.22'.32''$

Il faut mettre le signe — à la latitude de Taïti, parce qu'elle est australe. Avec ces données on peut calculer la longitude et la latitude du zénith des deux lieux relativement aux instans des observations ; et en les représentant par L et Λ, comme nous l'avons toujours fait, on trouve

	Premier contact.	Dernier contact.
Cajanebourg..	$L^{I} = 158°.38'.25''$; $\Lambda^{I} = 66°.35'.\ 0''$.	$L^{III} = 6°.59'.48''$; $\Lambda^{III} = 75°.15'.\ 0''$
Taïti.....	$L^{I} = 29°.\ 9'.24''$; $\Lambda^{I} = -30°.30'.53''$.	$L^{III} = 132°.44'.14''$; $\Lambda^{III} = -35°.45'.16''$

De là on tire

	Premier contact.	Dernier contact.
Cajanebourg..	$a^{I} = +0,396067$; $b^{I} = +0,917639$	$a^{III} = -0,233672$; $b^{III} = +0,967046$
Taïti.....	$a_{I} = -0,600672$; $b_{I} = -0,507759$	$a_{III} = +0,696617$; $b_{III} = -0,584308$

Avec ces résultats et les valeurs de A' et de A''', on formera le dénominateur de P, qui sera

$$A'''(a'''-a_{III})+B'''(b'''-b_{III})-A'(a'-a_I)-B'(b'-b_I)=+65,72926.$$

De plus, les époques des contacts observés étant réduites en secondes de tems, donnent

$$H'''-H'-(H_{III}-H_I)=1416.$$

En divisant cette dernière quantité par la précédente, on aura

$$P=\frac{1416}{65,72962}=21'',5428;$$

C'est l'excès de la parallaxe de Vénus sur celle du soleil exprimé en secondes de degré ; et l'on voit maintenant combien cette manière de l'obtenir est exacte ; car, à cause du dénominateur 65, 73, il faudrait une erreur de 65'', 73 en tems sur la différence observée des durées du passage, pour produire une erreur d'une seconde de degré sur la différence des parallaxes des deux astres.

Maintenant il faut savoir qu'en prenant pour unité le demi-grand axe de l'orbe terrestre, la distance du soleil à la terre, à l'époque de ces observations, était 1,01515, selon les tables ; et la distance de Vénus au soleil, exprimée en parties de la même mesure, était 0,72619. Nous avons prouvé d'ailleurs que ces rapports peuvent se déduire des observations du mouvement de la planète et du soleil, sans aucune hypothèse sur la valeur absolue des parallaxes, en sorte que l'usage que nous allons en faire n'implique aucun cercle vicieux. Or, à l'instant du passage, Vénus étant, à fort peu près, sur la même ligne droite qui joint la terre et le soleil, il s'ensuit que sa distance à la terre était égale à

$$1,01515-0,72619 \quad \text{ou} \quad 0,28896,$$

de sorte qu'en nommant p sa parallaxe et p' celle du soleil, comme ces parallaxes doivent être réciproques aux distances, on aura

$$\frac{p}{p'}=\frac{1,01515}{0,28896}.$$

Nous venons de trouver

$$p-p'=21'',5428.$$

Ces deux équations réunies déterminent séparément les deux parallaxes p et p' ; et l'on en tire

$$p = 30'',1149 \qquad p' = 8'',5721.$$

Comme la dernière est sur-tout celle qui nous intéresse, je ferai remarquer qu'elle est donnée de cette manière

$$p = 21''.5428 \cdot \frac{0,28896}{0,72619};$$

d'où l'on voit que les erreurs qui pourraient affecter la différence des parallaxes, s'affaiblissent dans le rapport de 2 ½ à 1 en passant dans la valeur de p' ; et en rapprochant ce résultat de ce que nous avons dit tout-à-l'heure relativement à P, on voit qu'il faudrait une erreur de $164''$ de tems sur les différences des durées observées, pour produire une erreur d'une seconde sur la parallaxe du soleil.

La parallaxe $8'',5721$ est relative à la distance où se trouvait le soleil à l'époque des observations. Pour la ramener à la distance moyenne que nous avons prise pour unité, il faut la multiplier par le rapport inverse de ces distances, c'est-à-dire par $\frac{1,01515}{1}$. Cette opération lui ajoute $0'',1296$; ainsi le résultat de ces calculs donne $8'',7017$ pour la parallaxe du soleil dans sa moyenne distance à la terre.

Cette parallaxe et celle de la planète étant connues, on peut les substituer dans l'équation générale (1), et alors les comparaisons des contacts correspondans donneront les différences de longitude des lieux où le phénomène a été observé. On peut aussi, en combinant ces comparaisons, déterminer les erreurs des tables et des demi-diamètres. Ce que nous avons dit suffira pour qu'on puisse effectuer ces déterminations, qui n'ont aucune difficulté ; d'ailleurs, le calcul est, comme on voit, le même que pour toute autre éclipse.

Tout ce que nous venons de dire relativement aux passages de Vénus sur le disque du soleil, s'applique également à ceux de Mercure, à cela près que ces derniers ne peuvent pas servir avec autant de précision pour déterminer la parallaxe du soleil, parce que Mercure étant beaucoup plus près de cet astre que Vénus, la différence des

durées des passages est beaucoup moindre entre les différens lieux.

Enfin, comme ces astres, dans leur passage sur le soleil, ont une très-petite latitude, ces observations peuvent servir utilement pour corriger le lieu du nœud de leur orbite; mais cette application, d'ailleurs facile, serait trop longue pour trouver place ici.

Fin du Traité Élémentaire d'Astronomie Physique.

ADDITIONS.

DE LA MESURE DES HAUTEURS

PAR LES OBSERVATIONS

DU BAROMETRE.

Comme la mesure des hauteurs par les observations du baromètre peut être d'une utilité très-fréquente, j'ai réuni dans ce chapitre, tous les détails que l'on pouvait desirer, tant sur la démonstration de la formule rigoureuse, que sur ses applications.

Concevons un tube vertical rempli d'air, qui communique depuis la surface de la terre jusqu'aux limites de l'atmosphère. De plus, afin de simplifier le problème, supposons d'abord que toute cette colonne soit composée d'air parfaitement sec, dont la température soit partout la même, et faisons abstraction du décroissement de la pesanteur à mesure qu'on s'élève ; de sorte que cette force puisse être considérée comme ayant une égale intensité à toutes les hauteurs. Dans ces suppositions, examinons l'état d'équilibre de la colonne. Il est évident que chaque molécule sera comprimée par le poids de toutes celles qui sont au-dessus ; et comme l'air, en vertu de son élasticité, se condense proportionnellement aux poids dont il est chargé ; on conçoit que la densité de cet air ira en décroissant de bas en haut par une

dégradation insensible. Pour découvrir la loi de cette dégradation, partageons la colonne en une infinité de couches fort minces, par exemple, d'un millimètre de hauteur ; de sorte que la densité soit sensiblement la même dans toute la hauteur d'une même couche, et varie seulement d'une couche à l'autre. Alors si l'on porte un baromètre successivement dans chacune de ces couches, à diverses distances du centre de la terre, il y aura un certain rapport entre ces distances, représentées par x_1, x_2, x_3, et les élévations du mercure dans le baromètre, représentées par H_1, H_2, H_3.... C'est ce rapport qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, je remarque que l'épaisseur de la première couche est exprimée par $x_2 - x_1$. L'abaissement du mercure, en s'élevant au-dessus de cette couche est $H_1 - H_2$. Par conséquent, à cette élévation une colonne d'air qui a pour hauteur $x_2 - x_1$, pèse autant qu'une colonne de mercure de même base, et ayant pour hauteur $H_1 - H_2$. Ainsi la densité de cette couche, comparée à celle du mercure est $\frac{H_1 - H_2}{x_2 - x_1}$; car les densités sont réciproques aux volumes à poids égal.

Mais ce rapport entre la densité de la couche et celle du mercure peut encore s'évaluer d'une autre manière. Car à température égale, la densité de chaque couche est proportionnelle à la pression qu'elle éprouve, c'est-à-dire, au poids des couches supérieures. Or, puisque toutes les couches sont supposées à la même température, la pression que chacune d'elles éprouve est proportionnelle à la hauteur du mercure dans le baromètre. Ainsi dans les suppositions que nous avons admises, la densité des différentes couches pourra être représentée par CH_1, CH_2, CH_3.... C étant un coefficient constant,

commun à toute la colonne. De cette manière on obtient pour la première couche, deux expressions de sa densité, savoir CH_1 et $\frac{H_1 - H_2}{x_2 - x_1}$; en les égalant l'une à l'autre, on aura

$$CH_1 = \frac{H_1 - H_2}{x_2 - x_1}$$

d'où l'on tire

$$H_2 = H_1\{1 - C(x_2 - x_1)\}.$$

La même relation subsistera dans le passage de la seconde couche à la troisième, de la troisième à la quatrième, et ainsi de suite, du moins dans les suppositions que nous avons admises; de sorte que l'on aura les équations

$$\begin{aligned} H_2 &= H_1\{1 - C(x_2 - x_1)\}, \\ H_3 &= H_2\{1 - C(x_3 - x_2)\}, \\ H_4 &= H_3\{1 - C(x_4 - x_3)\}, \\ H_5 &= H_4\{1 - C(x_5 - x_4)\}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ou en représentant par D l'épaisseur de la couche qui est supposée toujours la même.

$$\begin{aligned} H_2 &= H_1\{1 - CD\}, \\ H_3 &= H_2\{1 - CD\}, \\ H_4 &= H_3\{1 - CD\}, \\ H_5 &= H_3\{1 - CD\}, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera les valeurs suivantes,

$$H_2 = H_1\{1 - CD\},$$
$$H_3 = H_1\{1 - CD\}^2,$$
$$H_4 = H_1\{1 - CD\}^3,$$
$$H_5 = H_1\{1 - CD\}^4,$$

et l'on aura entre les différences de niveau, et les abaissemens du mercure, les séries correspondantes

$$x_2 - x_1 = D \qquad \frac{H_2}{H_1} = \{1 - CD\},$$
$$x_3 - x_1 = 2D \qquad \frac{H_3}{H_1} = \{1 - CD\}^2,$$
$$x_4 - x_1 = 3D \qquad \frac{H_4}{H_1} = \{1 - CD\}^3,$$
$$x_5 - x_1 = 4D \qquad \frac{H_5}{H_1} = \{1 - CD\}^4,$$

la quantité $1 - CD$ est nécessairement une fraction ; car C et D sont tous deux positifs ; et quel que soit C, on peut toujours prendre D assez petit pour que le produit CD soit une fonction. Alors les diverses puissances de $1 - CD$ seront de plus en plus petites. Ainsi par la suite des valeurs précédentes, on voit que, *quand les hauteurs au-dessus de la première station croissent en progression arithmétique, les élévations du mercure dans le baromètre décroissent en progression géométrique.*

Pour arriver à ce résultat, nous avons supposé que chaque couche d'air d'un millimètre de hauteur, était partout d'une égale densité. Cette supposition n'est pas vraie à la rigueur, mais elle approche d'autant plus de la vérité que l'épaisseur des couches est moindre. Or, au lieu de prendre un millimètre pour cette épaisseur,

nous pouvions prendre un centième de millimètre, ou telle autre dimension plus petite, ce qui aurait diminué l'erreur indéfiniment, et nous serions encore parvenus aux mêmes conséquences. Ainsi la loi que nous venons de découvrir est vraie en elle-même, et indépendamment de toute supposition sur l'épaisseur des couches. C'est ce que le calcul va confirmer.

Si l'on représente par n le rang d'un terme quelconque, dans les deux séries précédentes, et que l'on prenne la valeur de n; ce qui se fera dans la seconde série, au moyen des logarithmes, on trouve

$$n = \frac{x_{n+1} - x_1}{D}, \quad n = -\frac{\{\log H_1 - \log H_{n+1}\}}{\log(1 - CD)},$$

on tire

$$x_{n+1} - x_1 = -\frac{D\{\log H_1 - \log H_{n+1}\}}{\log(1 - CD)}.$$

$x_{n+1} - x_1$, est la différence de niveau dans les deux stations; pour plus de simplicité nous la désignerons par X. H_1 est la hauteur du mercure qui répond à la station la plus basse; nous la représenterons par H. Enfin H_{n+1} est la hauteur du mercure à la station la plus haute; nous la désignerons par h; car n'ayant plus à considérer que les extrémités de la colonne, les accens qui servaient à distinguer les différentes couches ne nous sont plus d'aucune utilité. Nous aurons alors

$$X = \frac{-D}{\log(1 - CD)}\{\log H - \log h\}.$$

La valeur de X semble dépendre de l'épaisseur D que nous avons supposée aux diverses couches d'air; mais

dans le fait elle n'en dépend pas. En effet si on développe le logarithme de $1 - CD$, on a

$$\log(1 - CD) = -\frac{1}{M}\left\{CD + \frac{C^2D^2}{2} + \frac{C^3D^3}{3} + \text{etc.}\right\}$$

M étant le module des tables ordinaires, ou 2,302585092994, par conséquent

$$-\frac{D}{\log(1 - CD)} = \frac{M}{C + \frac{C^2D}{2} + \frac{C^3D^2}{3} + \text{etc.}}$$

L'épaisseur D est supposée extrêmement petite ; pour atteindre la dernière rigueur, il faut la faire tout-à-fait nulle, ce qui donne

$$-\frac{D}{\log(1 - CD)} = \frac{M}{C};$$

alors ce coefficient devient indépendant de D, et l'on doit voir maintenant, qu'en différant jusqu'ici à supposer cette quantité nulle, nous n'avons fait que nous ménager la possibilité d'établir le raisonnement, et d'effectuer les calculs.

D'après ce résultat, on aura la formule

$$X = \frac{M}{C}\{\log H - \log h\},$$

c'est-à-dire, que la différence de niveau est proportionnelle à la différence des logarithmes des hauteurs du mercure dans le baromètre.

Il ne reste plus à connaître que le coefficient C. Or en représentant par δ la densité de l'air sous la pres-

sidé H, celle du mercure étant l'unité, on a d'après nos conventions précédentes,

$$\delta = CH,$$

H étant la hauteur du mercure dans le baromètre. On obtiendrait donc la valeur de C, si l'on avait, par des expériences très-exactes, le rapport des densités de l'air et du mercure sous une pression donnée de l'atmosphère.

Ce rapport n'est pas le même dans tous les pays; car dans tous les pays la pesanteur n'a pas la même intensité, comme on s'en est assuré par les expériences du pendule; et le rapport $\frac{\delta}{H}$ varie avec la pesanteur. En effet, δ est la densité de l'air sous une pression donnée, par exemple, sous la pression de $0^m,76$. Mais selon que la pesanteur sera plus forte ou plus faible, une colonne de mercure ayant toujours $0^m,76$ de hauteur pesera plus ou moins. Par conséquent l'air soumis à cette pression sera plus ou moins comprimé. Or, par les expériences du pendule à différentes latitudes, on trouve en nommant 1 la gravité sur le parallèle de 45° ou de 50 grades, la gravité sous une autre latitude ψ, est exprimée par $1 - 0{,}002837 \cos 2\psi$. La densité δ étant proportionnelle à la pesanteur variera dans le même rapport, c'est-à-dire, qu'en la nommant δ sur le parallèle de 50 grades, et sous la pression H, elle deviendra pour une autre latitude, et sous une colonne de mercure de même longueur,

$$\delta\{1 - 0{,}002837.\cos 2\psi\}.$$

Le coefficient C qui exprime le rapport de la densité à

la hauteur de la colonne barométrique, doit donc varier dans la même proportion, et par conséquent il deviendra

$$C\{1 - 0{,}002837 . \cos 2\psi\},$$

ce qui étant substitué dans la valeur de X, donne

$$X = \frac{M}{C.(1 - 0{,}002837 . \cos 2\psi)} \log\left(\frac{H}{h}\right);$$

de cette manière, il suffira de trouver le coefficient... $\frac{M}{C\{1 - 0{,}002837\}}$ par l'expérience, pour une latitude donnée. Car alors ψ étant connu, on connaîtra aussi $\frac{M}{C}$; et la formule deviendra applicable à toutes les latitudes possibles.

On peut la rendre plus commode en faisant disparaître le dénominateur, ce qui est facile; car la fraction $\frac{1}{1 - 0{,}002837 . \cos 2\psi}$ étant développée en série par la division, devient.. . . . . .
$1 + 0{,}002837 . \cos 2\psi + 0{,}00000804857 . \cos^4 2\psi$, pér[illegible]
ou simplement $1 + 0{,}002837 . \cos 2\psi$, en se[illegible] qu'[illegible]
au premier terme qui est le seul sensible. On aura alors

$$X = \frac{M}{C}\{1 + 0{,}002837 . \cos 2\psi\} \log\left\{\frac{H}{h}\right\}.$$

Jusqu'ici nous avons supposé que la valeur du coefficient C ou $\frac{\delta}{H}$ était la même dans toutes les couches de la colonne. Mais il n'en est pas ainsi dans la nature, et plusieurs causes tendent à faire varier ce rapport. La principale est l'inégalité de température des couches. Car

l'élasticité de l'air augmente par la chaleur ; de sorte qu'avec une densité moindre, il peut soutenir une colonne de mercure égale, ce qui fait varier le rapport $\frac{\delta}{H}$ ou C. Ce rapport varie encore suivant la quantité plus ou moins grande de vapeur aqueuse qui se trouve suspendue dans les différentes couches. Car cette vapeur pèse moins que l'air sec à force élastique égale ; de sorte que son introduction dans les différentes couches les rend par elles-mêmes susceptibles de soutenir, avec une densité moindre, une colonne de mercure d'égale hauteur. Enfin le décroissement de la pesanteur à mesure qu'on s'élève, est encore une autre cause de changement ; car en vertu de ce décroissement une colonne de mercure de longueur H pèse d'autant moins qu'on s'éloigne davantage du centre de la terre ; si elle pèse moins, elle comprime moins les couches d'air dans lesquelles on la transporte ; ainsi le rapport de leur densité à la longueur de la colonne de mercure, ou $\frac{\delta}{H}$ n'est plus le même pour ces couches que pour celles qui sont au-dessous. Cherchons à évaluer numériquement l'influence de ces diverses causes sur le coefficient C.

Commençons par le décroissement de la pesanteur en ligne verticale. Soient g_1, g_2, g_3 les diverses intensités de cette force dans les différentes couches. Les poids des colonnes de mercure H_1, H_2, H_3, qu'elles sollicitent leur seront proportionnels ; par conséquent, si toutes les autres circonstances étaient égales, les densités des couches d'air que ces colonnes compriment leur seraient proportionnelles aussi. Le rapport $\frac{\delta}{H}$ ou C doit donc varier d'une couche à l'autre proportionnellement à la pesanteur g.

Considérons maintenant l'action de la température. En vertu de cette cause, une masse d'air dont le volume serait 1 à zéro de température, devient à t degrés centésimaux, $1 + t.0{,}00375$, la pression barométrique restant la même. Or, les densités de cette masse sous une pression constante sont réciproques aux volumes qu'on lui fait occuper; par conséquent, si sa densité à zéro était 1, sa densité à t degrés sera $\frac{1}{1 + t.0{,}00375}$, la pression restant la même. Le rapport $\frac{\delta}{H}$ ou C doit donc varier dans les différentes couches proportionnellement à $\frac{1}{1 + t.0{,}00375}$.

Examinons enfin l'influence de la vapeur aqueuse. Suivant les expériences de Saussure et de Watt, le poids de cette vapeur est à celui de l'air comme 10 à 14, lorsque les forces élastiques et leurs températures sont les mêmes; c'est-à-dire, lorsque l'air et la vapeur, étant à une même température, soutiennent des colonnes de mercure égales. La substitution de cette vapeur dans les couches d'air les rend donc spécifiquement plus légères, sans diminuer leur ressort. Pour évaluer cet effet, soit H la pression barométrique que supporte une certaine couche d'air : nommons F la force élastique de la vapeur aqueuse qui s'y trouve, c'est-à-dire la partie de la pression barométrique que la vapeur soutient. Le poids total de la couche pourra être considéré comme composé de deux parties; savoir, d'une certaine quantité de vapeur dont la force élastique est F, et d'une certaine quantité d'air atmosphérique sec, dont le ressort est $H - F$. Soit p le poids total de la couche, si elle était entièrement composée d'air sec, sous la pression H. Le poids du même volume d'air sec, sous la pression $H - F$, sera $p \cdot \frac{(H-F)}{H}$.

Le poids du même volume sous la pression F serait $\frac{pF}{H}$; enfin si ce volume restant toujours sous la pression F, était composé tout entier de vapeur aqueuse, son poids serait $\frac{10}{14}$ du précédent, c'est-à-dire, $\frac{10}{14}\cdot\frac{pF}{H}$. Maintenant on sait par des expériences très-positives, que dans un mélange de vapeur et d'air, parvenu à un état d'équilibre stable, les deux fluides sont répandus uniformément dans tout l'espace qu'ils peuvent occuper. Ainsi le poids du mélange dans les proportions précédentes, sera égal à la somme des poids d'air et de vapeur qui occupent l'espace donné sous les pressions $H-F$ et F; c'est-à-dire, que ce poids sera $p.\frac{(H-F)}{H}+\frac{10}{14}\frac{pF}{H}$, ou simplement $p.\frac{\left\{H-\frac{3}{7}F\right\}}{H}$. Or avant l'introduction de la vapeur, le poids du même volume d'air sec, soumis à la même pression H, était représenté par p. Les densités étant proportionnelles aux poids, si δ représente la densité de la couche dans l'état sec, sa densité dans l'état humide deviendra $\delta.\frac{\left\{H-\frac{3}{7}F\right\}}{H}$ ou $\delta.\left\{1-\frac{3}{7}\frac{F}{H}\right\}$, la pression restant la même. On voit par là que l'introduction de la vapeur aqueuse dans les couches d'air fait varier le rapport $\frac{\delta}{H}$ ou C, proportionnellement à $1-\frac{3}{7}\frac{F}{H}$.

En résumant les trois genres de variations que le coefficient éprouve, on voit que son expression la plus générale doit avoir la forme suivante

$$C=\frac{Ag.\left\{1-\frac{3}{7}\frac{F}{H}\right\}}{1+t.0{,}00375},$$

A étant une quantité constante commune a toutes les couches. Il ne reste plus qu'à mettre dans cette expression pour g, H, F et t leurs valeurs relatives aux différentes couches.

Calculons d'abord le facteur g. On sait qu'en s'éloignant du centre de la terre, l'intensité de la pesanteur est réciproque au carré de la distance. Nous avons nommé x_1, x_2, x_3, ces distances pour les différentes couches, ainsi en appelant g_1, g_2, g_3 les intensités correspondantes de la pesanteur, on aura

$$g_1 = g_1, \quad g_2 = \frac{g_1 x_1^2}{x_2^2}, \quad g_3 = \frac{g_1 x_1^2}{x_3^2} \ldots \text{etc.}$$

Venons maintenant au terme dépendant de la vapeur aqueuse. La tension F de cette vapeur est toujours très petite, dans les températures où se font ordinairement les observations barométriques. En calculant leurs valeurs en parties du mètre, pour le point de la saturation extrême, d'après les formules que M. Laplace a données dans la Mécanique céleste, et qu'il a déduites des expériences de Dalton, on trouve

à 0° du thermomètre centésimal... $F = 0^m,005$...;

à 30° ..... $F = 0^m,031690$;

et entre ces deux limites qui sont à-peu-près celles des observations barométriques, l'accroissement de F peut être suffisamment bien représenté par la progression arithmétique,

$$F = 0^m,005122 + 0^m,000864\,9\,t,$$

t étant la température marquée par le thermomètre centésimal. Quoique cette formule ne soit pas tout-à-fait

exacte, elle suffit dans le cas actuel à cause du peu d'influence qu'elle a sur les hauteurs observées. Mais avant de l'appliquer à l'atmosphère, il faut encore y faire une modification. En effet, elle est relative au point de saturation extrême, qui n'a presque jamais lieu dans l'atmosphère, et par conséquent la valeur qu'elle donne pour F serait presque toujours beaucoup plus forte que celle qui a lieu réellement. Il est vrai que l'on ne peut rien déterminer de fixe relativement à la quantité de vapeur aqueuse suspendue dans l'atmosphère ; cette quantité est extrêmement variable dans les différens jours ; elle varie même d'une couche à une autre d'une manière fort irrégulière et quelquefois brusque, comme on le voit sur les montagnes où des couches très-peu chargées de vapeurs, succèdent à d'autres qui sont au *maximum* d'humidité. Cependant en mettant à part ces circonstances extraordinaires, tout porte à croire que l'on se rapprochera le plus souvent de la nature en évitant les cas extrêmes, et alors ce qui se présente de plus simple, c'est de prendre pour l'expression de F dans l'atmosphère la moitié de la valeur qui répond au point de l'humidité extrême ; c'est-à-dire,

$$F = 0^m,002501 + t.0^m,000\,4245.$$

En substituant cette valeur dans l'expression du coefficient C, il faut la multiplier par le facteur variable $\frac{2}{7H}$. Mais à cause de la petitesse de cette correction, et aussi à cause du peu de différence des valeurs de H dans l'étendue des colonnes d'air que l'on mesure d'ordinaire, on peut pour simplifier, se contenter de mettre pour H la valeur constante $0^m,76$ qui est la pression moyenne au niveau des

mers. Cette substitution aura même l'avantage d'affaiblir la correction de l'humidité, dans les couches supérieures de la colonne, ce qui s'accorde avec la nature; car l'humidité qui règne dans ces couches diminue généralement à mesure qu'on s'élève, et quelquefois les plus élevées sont d'une sécheresse excessive. En adoptant cette simplification, l'on aura

$$1 - \frac{2F}{7H} = 1 - \frac{2}{7.^m,76}\{0^m,00256 + t.0^m,00043245\}$$
$$= 1 - 0,0009628 - 0,0001626\,t.$$

on peut sans erreur sensible, mettre cette expression sous la forme suivante

$$\{1 - 0,0009628\}\{1 - 0,0001627\,t\},$$

ce qui donne

$$C = \frac{A\{1 - 0,0009628\}.g\{1 - 0,0001627\,t\}}{1 + t.0,00375};$$

de cette manière C prend un facteur constant commun à toutes les couches. L'autre facteur dépendant de t qui se trouve encore au numérateur, peut être réuni à celui qui provient de la température. En effet, à cause de la petitesse du coefficient 0,0001627, on peut sans erreur sensible, substituer $\frac{1}{1 + 0,0001627\,t}$ à $1 - 0,0001627\,t$. Alors on a au dénominateur le produit ..... $\{1 + 0,0001627t\}\{1 + t.0,00375\}$. En effectuant la multiplication, on peut négliger le produit de 0,0001627 par 0,00375. Il vient alors $\{1 + 0,00391\,27\,t\}$. Le coefficient de t, dans ce résultat, diffère si peu de 0,004 ou de $\frac{1}{250}$,

qu'on peut sans craindre aucune erreur lui substituer cette dernière valeur, ce qui simplifiera les calculs. On aura donc ainsi

$$C = \frac{A\{1 - 0{,}0009628\}.g}{\{1 + t.0{,}004\}}.$$

On voit que la considération de l'humidité de l'air ne fait qu'augmenter un peu le coefficient de la dilatation qui convient à l'air sec. J'aurais pu substituer une seule lettre au produit des deux facteurs constans qui se trouvent au numérateur, mais j'ai préféré de les laisser subsister, afin de mettre en évidence l'effet de l'humidité sur le coefficient.

Cherchons maintenant dans ce cas général le rapport des hauteurs du baromètre avec les élévations des couches. Pour y parvenir reprenons la source des raisonnemens qui nous ont servi dans le cas très-simple que nous avons traité d'abord. En considérant la première couche nous avons remarqué qu'à cette élévation une colonne d'air, dont l'épaisseur était $x_2 - x_1$, pesait autant qu'une colonne de mercure de même base, dont la hauteur était $H_1 - H_2$, et nous en avons conclu $\frac{H_1 - H_2}{x_2 - x_1}$ pour le rapport des densités du mercure et de l'air dans cette couche. Cette considération est encore applicable dans le cas actuel; seulement comme la pesanteur est supposée variable d'une couche à une autre, l'intensité de cette force sur la colonne de mercure H_2, qui s'observe dans la seconde couche, diffère de celle qui sollicite la colonne de mercure H_1. Pour exprimer le poids de la première couche d'air, en parties de la colonne de mercure H_1, il faut ramener la colonne H_2, à ce qu'elle serait si la même

pesanteur g_1 agissait sur elle ; c'est-à-dire, la multiplier par $\frac{g_2}{g_1}$ ou par le rapport des pesanteurs dans les deux couches. On aura ainsi $H_1 - \frac{H_2 g_2}{g_1}$ pour la diminution de la pression barométrique dans l'étendue de la première couche d'air, dont l'épaisseur sera toujours $x_2 - x_1$, comme précédemment. Le rapport des densités de l'air et du mercure, dans cette couche, sera donc égal à

$$\frac{H_1 - \frac{H_2 g_2}{g_1}}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad \frac{H_1 g_1 - H_2 g_2}{g_1 \{x_2 - x_1\}};$$

mais ce même rapport peut être encore exprimé par $C_1 H_1$, en représentant par C_1 la valeur du coefficient C dans la couche que nous considérons ; en égalant ces deux valeurs, et désignant toujours par D l'épaisseur de la couche, on aura

$$x_2 - x_1 = D, \quad \frac{H_1 g_1 - H_2 g_2}{g_1 \{x_2 - x_1\}} = C_1 H_1;$$

ou bien en tirant la valeur de $H_2 g_2$,

$$x_2 - x_1 = D, \quad H_2 g_2 = H_1 g_1 \{1 - C_1 (x_2 - x_1)\}.$$

Le passage de la seconde couche à la troisième, de la troisième à la quatrième, donnera des équations toutes semblables, il en sera de même de toutes les autres ; c'est-à-dire, que l'on aura

$$x_3 - x_2 = D, \quad H_3 g_3 = H_2 g_2 \{1 - C_2 (x_3 - x_2)\},$$
$$x_4 - x_3 = D, \quad H_4 g_4 = H_3 g_3 \{1 - C_3 (x_4 - x_3)\},$$
etc.

En effectuant successivement les éliminations, comme dans la page 4, jusqu'à la dernière couche dont le rang est représenté par $n+1$, on trouve

$$x_{n+1}-x_1=nD,$$

$$H_{n+1}g_{n+1}=H_1g_1\{1-C_1D\}\{1-C_2D\}\{1-C_3D\}....\{1-C_nD\}.$$

Le second membre de la seconde équation a autant de facteurs, qu'il y a de couches. Dans le premier cas que nous avions considéré, tous ces facteurs étaient égaux entre eux; au lieu qu'ici ils sont différens à cause de la variabilité de C. Cependant si l'on prend de même les logarithmes, on aura

$$\log\frac{H_1}{H_{n+1}}+\log\frac{g_1}{g_{n+1}}=-\log\{1-C_1D\}-\log\{1-C_2D\}.....$$
$$.....-\log\{1-C_nD\}.$$

Ici n ne se trouve pas explicitement dans le second membre; on ne peut donc pas l'éliminer comme dans la page 5. Mais en suivant la même marche de calcul, c'est-à-dire, prenant la valeur de $x_{n+1}-x$, on trouve

$$x_{n+1}-x=\frac{-nD\left\{\log\frac{H_1}{H_{n+1}}+\log\frac{g_1}{g_{n+1}}\right\}}{\log(1-C_1D)+\log(1-C_2D).....+\log(1-C_nD)}.$$

Maintenant développons les logarithmes, effectuons la division par D et supposons ensuite D nul, précisément comme dans le cas que nous avons traité d'abord, pag. 5; nous aurons

$$x_{n+1}-x=Mn.\frac{\left\{\log\frac{H_1}{H_{n+1}}+\log\frac{g_1}{g_{n+1}}\right\}}{C_1+C_2.....+C_n},$$

M étant le module des tables logarithmiques, ou 2,3025850. Cette formule est analogue à celle de la page 6, seulement au lieu d'avoir C au dénominateur, nous avons la somme de tous les coefficiens C_1, C_2, C_3, etc. c'est pour cela qu'il nous reste encore n au numérateur. Si l'on supposait tous ces coefficiens égaux entre eux, et à C, leur somme deviendrait nC; n disparaitrait, et l'on retomberait identiquement sur notre première formule. Pour abréger, nous représenterons par SC_1 la somme de tous les coefficiens C_1, C_2, C_3, prise dans toute la longueur de la colonne d'air; nous désignerons aussi comme précédemment par X la différence de niveau $x_{n+1} - x_1$ des deux couches extrêmes; nous substituerons h au lieu de H_{n+1} pour représenter la hauteur du baromètre dans la couche la plus élevée, et nous désignerons simplement par H celle de la couche inférieure; nous aurons ainsi

$$X = Mn \frac{\left\{ \log \frac{H}{h} + \log \frac{g_1}{g_{n+1}} \right\}}{S.C_1}.$$

Il nous faut aussi évaluer le rapport $\frac{g_1}{g_{n+1}}$ qui est celui des pesanteurs dans les deux stations extrêmes. Puisque l'intensité de la pesanteur est réciproque au carré de la distance au centre de la terre, on aura

$$\frac{g_1}{g_{n+1}} = \frac{x^2_{n+1}}{x_1^2};$$

or, puisque X est la différence de niveau des deux stations, on a $x_{n+1} = x_1 + X$. Par conséquent

$$\log \frac{g_1}{g_{n+1}} = 2 \log \left\{ 1 + \frac{X}{x_1} \right\};$$

x est la distance du centre de la terre à la station inférieure ; la différence de niveau X étant toujours extrêmement petite comparativement à cette distance, on peut se borner à prendre pour x, le rayon moyen de la surface terrestre, dont la valeur en mètres est 6366198; et en la représentant par a, on aura avec une exactitude toujours suffisante

$$\log \frac{g_1}{g_{n+1}} = 2 \log \left\{ 1 + \frac{X}{a} \right\},$$

par conséquent

$$X = \frac{Mn \left\{ \log \frac{H}{h} + 2 \log \left(1 + \frac{X}{a} \right) \right\}}{SC_1}.$$

Avant de chercher la valeur de SC_1, nous pouvons appliquer à chacun des coefficiens C_1, C_2, C_3, la correction relative à la variation de la pesanteur pour différentes latitudes ; cette correction dont nous avons donné le détail page 7, consistera à multiplier chacun d'eux par le facteur $1 - 0{,}002837 \cos 2\psi$, ψ étant la latitude ; et comme ce facteur est commun à tous les coefficiens, puisque tous les points de la colonne d'air étant situés sur la même verticale, peuvent être censés à la même latitude ; on voit que SC_1 deviendra ainsi..... ; $\{1 - 0{,}002837 \cos 2\psi\} SC_1$, et en faisant passer la correction au numérateur par le développement en série, comme nous l'avons fait dans la page 8, on aura

$$X = \frac{Mn \{1 + 0{,}002837 \cos \psi\} \left\{ \log \frac{H}{h} + 2 \log \left(1 + \frac{X}{a} \right) \right\}}{SC_1}.$$

Reste maintenant à évaluer SC_1 ; or, d'après l'expression

générale du coefficient C que nous avons déterminée plus haut, pag. 14, il est clair qu'on aura

$$SC_1 = A\,(1 - 0{,}0009628)\left\{\frac{g_1}{1+t_1.0{,}004} + \frac{g_2}{1+t_2.0{,}004} + \frac{g_3}{1+t_3.0{,}004} + \text{etc.}\right\}.$$

Pour effectuer cette sommation d'une manière rigoureuse, il faudrait connaître la loi du décroissement des températures dans l'atmosphère. Cette loi est sujète à beaucoup d'irrégularités. Mais généralement, à de petites hauteurs, comme sont celles où se font les observations barométriques, c'est une progression arithmétique très-lente. On s'écartera donc très-peu de la vérité, en supposant toutes les températures t_1, t_2, t_3 égales entre elles, et à la température moyenne entre celles des couches extrêmes; c'est-à-dire à $\frac{t_1 + t_{n+1}}{2}$. Cette supposition augmentera les températures des couches supérieures, mais elle affaiblira celles des couches inférieures, ce qui produira une sorte de compensation. Par ce moyen le facteur dépendant de la température devient commun à tous les termes de SC_1, et en écrivant T au lieu de t_1, et t au lieu de t_{n+1}, par analogie avec la notation que nous avons adoptée pour H et h, nous aurons

$$SC_1 = \frac{A(1 - 0{,}0009628)}{1+\left(\frac{T+t}{2}\right).0{,}004}\, g_1\left\{1 + \frac{g_2}{g_1} + \frac{g_3}{g_1} + \frac{g_4}{g_1} + \text{etc.}\right\}$$

or, la pesanteur étant réciproque au carré de la distance au centre de la terre, on aura

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{x_1^2}{x_2^2},\quad \frac{g_3}{g_1} = \frac{x_1^2}{x_3^2},\quad \frac{g_4}{g_1} = \frac{x_1^2}{x_4^2},\ \ldots\ \text{etc.}$$

et ainsi de suite; or puisque la différence de distance pour deux couches consécutives est D,

$$\frac{g_2}{g_1}=\frac{x_1^2}{(x_1+D)^2},\quad \frac{g_3}{g_1}=\frac{x_1^2}{(x_1+2D)^2},\quad \frac{g_4}{g_1}=\frac{x_1^2}{(x_1+3D)^2},\ \text{etc.}$$

en effectuant la division algébriquement, dans chacun de ces termes, on peut les réduire en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{D}{x_1}$. Nous nous bornerons à la première puissance de ce rapport, ce qui sera suffisant pour l'objet que nous avons en vue, et nous aurons

$$\frac{g_2}{g_1}=1-\frac{2D}{x_1},\quad \frac{g_3}{g_1}=1-\frac{4D}{x_1},\quad \frac{g_4}{g_1}=1-\frac{6D}{x_1},$$

et ainsi de suite; de sorte que la somme cherchée deviendra

$$1+\frac{g_2}{g_1}+\frac{g_3}{g_1}+\text{etc.}=n-\frac{2}{x_1}\{D+2D+3D+\ldots.nD\}.$$

La partie comprise entre les parenthèses forme une progression arithmétique, dont la raison est D et le nombre des termes est n. La somme sera donc $\frac{n.(n+1)D}{2}$; or, puisque D est l'épaisseur d'une des couches, et que n est leur nombre, nD est la différence de niveau des deux stations extrêmes, différence que nous avons représentée par X: on aura donc ainsi

$$1+\frac{g_2}{g_1}+\frac{g_3}{g_1}+\ldots.\text{etc.}=n\left\{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{X}{x_1}\right\}.$$

On voit ici reparaître le facteur n qui était resté au numérateur dans l'expression de la différence de niveau.

En substituant ce résultat dans SC_1, il suffira de prendre au lieu de x_1, le rayon moyen de la terre, que nous avons désigné par a. Nous avons déja fait usage de cette simplification ; de plus, comme le nombre des couches comprises dans la colonne, est d'autant plus considérable que leur épaisseur est moindre, nous devons négliger le terme $\frac{1}{n}$ par rapport à ceux qui n'ont pas n pour diviseur. Car puisqu'en définitif nous faisons D nul, il faut alors faire n infini ; on aura donc ainsi

$$SC_1 = \frac{A\,(1-0{,}0009628)\,g_1 n\left\{1-\frac{X}{a}\right\}}{1+\frac{2.(T+t)}{1000}}.$$

La transformation du coefficient de $T+t$ ne change rien à sa valeur, elle sera seulement plus commode pour le calcul. Cette valeur de SC_1 étant connue on peut la substituer dans l'expression générale de X ; n disparaît comme étant commun aux deux termes, et il reste

$$X = \frac{M\left\{1+0{,}002837\cos 2\psi\right\}\left\{1+2\frac{(T+t)}{1000}\right\}\left\{\log\frac{H}{h}+2\log\left(1+\frac{X}{a}\right)\right\}}{A g_1\left\{1-0{,}0009628\right\}\left\{1-\frac{X}{a}\right\}}$$

On peut faire passer, par la division, le facteur $1-\frac{X}{a}$ au numérateur ; car $\frac{1}{1-\frac{X}{a}} = 1+\frac{X}{a}+\frac{X^2}{a^2}+$ etc. ; ainsi, en se bornant à la première puissance de $\frac{X}{a}$, ce qui suffira toujours, on aura simplement

$$X = \frac{M}{g_1\{1-0{,}0009628\}}\left[(1+0{,}002837\cos 2\psi)\left\{1+2\frac{(T+t)}{1000}\right\}\right.$$
$$\left.\left\{\log\frac{H}{h}+2\log\left(1+\frac{X}{a}\right)\right\}\left\{1+\frac{X}{a}\right\}\right].$$

Cette équation contenant X dans ses deux membres, semble n'être pas encore complètement résolue ; mais on remarquera que les X qui se trouvent dans le second membre y sont divisés par a, qui est toujours extrêmement grand par rapport à X. On n'a donc pas besoin pour calculer ces termes de connaître X bien exactement, mais seulement à-peu-près. Ainsi on divisera le calcul en deux parties. On calculera d'abord la valeur de X en négligeant ces termes, puis on se servira de cette valeur pour les calculer, et en réunissant ces deux résultats, on aura la valeur complète de X.

Pour pouvoir appliquer la formule que nous venons d'obtenir, il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient [illegible] A ; or, en se reportant à la page 11, où [illegible]vons commencé à l'introduire, on voit qu'en nommant δ le rapport des densités de l'air sec et du mercure, sous la pression H et à la température t, dans un lieu où la latitude est ψ et la pesanteur g, on a généralement

$$\delta = \frac{A\{1-0{,}002837\cos 2\psi\}gH}{1+t.0{,}00375}.$$

Le moyen le plus simple de trouver A, c'est de peser très-exactement des volumes connus d'air et de mercure, sous une pression et une température déterminées, dans un lieu dont la latitude et la hauteur soient connues. Cette expérience a été faite à Paris, avec le plus grand soin, par Arago et moi. Nous avons trouvé qu'à la

température de la glace fondante et sous la pression de $0^m,76$, on avait $\delta = \frac{1}{10463,0}$, de là on tire

$$A = \frac{1}{10463.g\{1 - 0,002837 \cos 2\psi\}.0^m,76},$$

ψ étant la latitude de Paris ; par conséquent, si l'on désigne par M le module des tables logarithmiques ou 2,30258509, le coefficient de la formule barométrique ou $\frac{M}{Ag_1}$ deviendra

$$\frac{M}{Ag_1} = 10463\{1 - 0,002837 \cos 2\psi\}0^m,76.M.\frac{g}{g_1};$$

si l'on réduit cette valeur en nombres, en prenant... $\psi = 48°.50'.14''$, ce qui est la latitude de l'Observatoire, on trouve

$$\frac{M}{Ag_1} = 18316^m,82.\frac{g}{g_1},$$

et, par conséquent,

$$\frac{M}{Ag_1\{1 - 0,0009628\}} = 18334^m,46.\frac{g}{g_1}.$$

Soit r l'élévation de la station inférieure au-dessus du niveau de la mer, $a + r$ sera sa distance au centre de la terre. L'élévation du lieu où nous fîmes nos expériences sur la pesanteur de l'air et du mercure, peut être évaluée à 60 mètres au-dessus du niveau de la mer ; sa distance au centre de la terre exprimée en mètres, était donc $a + 60$. D'après cela le rapport des pesanteurs $\frac{g}{g_1}$ est égal à $\frac{(a+r)^2}{(a+60)^2}$, expression qui se réduit à

$\left\{1 - \frac{120'}{a}\right\}\left\{1 + \frac{2r}{a}\right\}$, en développant les deux carrés et se bornant aux premières puissances de $\frac{60}{a}$ et de $\frac{r}{a}$.

Le premier facteur $1 - \frac{120'}{a}$ peut être réduit en nombres, en prenant $a = 6366198$, comme nous l'avons adopté. Il diminue le coefficient barométrique de $0^m,35$, ce qui donne

$$\frac{M}{Ag_1} = 18334^m,11\left\{1 + \frac{2r}{a}\right\}.$$

On peut encore déterminer ce coefficient *à posteriori*, en comparant les observations du baromètre avec des différences de niveau mesurées trigonométriquement. Un grand nombre d'observations très-exactes, faites par M. Ramond, de cette manière, lui ont donné 18336 pour la valeur du coefficient, que nous trouvons égale à 18334 par les pesées de l'air et du mercure. Cet accord prouve d'une manière positive l'exactitude de la formule, et celle des données sur lesquelles elle est établie.

On pourrait même tirer de cet accord une confirmation du décroissement de la pesanteur en ligne verticale. En effet, si l'on n'avait pas égard à l'effet de ce décroissement, les observations barométriques de M. Ramond, donneraient pour coefficient 18393 au lieu de 18334, que nous trouvons par les pesées de l'air et du mercure. La différence ne peut pas être attribuée à l'évaluation que nous avons faite de l'humidité suspendue dans l'air; car cette évaluation est plutôt trop forte que trop faible, et d'ailleurs la différence dont il s'agit ne disparaîtrait pas, même en supposant les couches d'air à l'état extrême d'humidité, puisque cette supposition doublant

la correction que nous avons déja faite pour cet objet, ne ferait qu'ajouter 17,64 à 18334,11, ce qui donnerait 18351,75, valeur encore bien inférieure à 18393. Il faut donc reconnaître nécessairement que le décroissement de la pesanteur, quoique bien peu considérable dans les limites où se font les observations barométriques, y devient cependant sensible; et l'accord des résultats quand on a égard à ce décroissement, démontre sa réalité.

L'inégalité de température des couches extrêmes de la colonne d'air que l'on mesure, se communique au baromètre dont on fait usage, et exige une réduction dans les hauteurs observées. En effet le mercure comme tous les autres corps se condense par le froid et se dilate par la chaleur. Cette variation depuis zéro jusqu'à 100° du thermomètre centésimal est uniforme suivant les expériences de Gay-Lussac; et, de plus, elle est égale à $\frac{1}{5412}$ par chaque degré de ce thermomètre, selon les expériences de MM. Lavoisier et Laplace, [illegible] cela avec celles de la Société royale de Londres. Ainsi quand on observe le baromètre dans la station la plus froide, la colonne de mercure qui s'est condensée, y doit paraître un peu plus courte, que si on l'eût mesurée à la température de la station la plus chaude, qui est ordinairement la station inférieure. Pour ramener les choses aux mêmes termes, il faut augmenter la longueur de la colonne de mercure, à la station supérieure, en raison de la différence des températures du mercure, et proportionnellement à la condensation qui a dû en résulter; c'est-à-dire que si la longueur observée est h', il faudra prendre

$$h = h' \left\{ 1 + \frac{T - t}{5412} \right\}.$$

Ceci suppose que le mercure du baromètre a la même température que l'air environnant ; mais cela n'a pas toujours lieu, et les températures sont quelquefois très-différentes. Si, dans chaque station où cette circonstance se présente, on voulait attendre que le baromètre eût repris la température de l'air ambiant, on serait obligé d'attendre plusieurs heures avant de pouvoir observer ; car ces changemens ne se font complètement qu'avec une extrême lenteur. Pour éviter cet inconvénient, on mesure la température du mercure du baromètre au moyen d'un très-petit thermomètre enchâssé dans la monture même de l'instrument. La température indiquée par ce thermomètre dans les deux stations, est celle qu'il faut employer dans la réduction des baromètres à une même température. Supposons qu'il marque (T) degrés dans la station inférieure, (t) dans la station supérieure, et que la longueur de la colonne de mercure observée dans cette dernière station soit h', on prendra

$$h = h' \left\{ 1 + \frac{(T)-(t)}{5412} \right\}$$

En résumant les considérations précédentes, la formule définitive pour la mesure des hauteurs par les observations du baromètre, d'après nos expériences, sera

$$X = 18334 (1 + 0{,}002837 \cos 2\psi) \left[\left\{ 1 + \frac{2r}{a} \right\} \left\{ 1 + \frac{2(T+t)}{1000} \right\} \left\{ 1 + \frac{X}{a} \right\} \left\{ \log \frac{H}{h} + 2 \log \left(1 + \frac{X}{a} \right) \right\} \right]$$

dans laquelle ψ désigne la latitude du lieu, h et t la hauteur barométrique et la température dans la station supérieure, H et T les quantités analogues pour la

station inférieure, r la hauteur de cette même station au-dessus du niveau de la mer exprimée en mètres, et a le rayon moyen de la terre exprimé aussi en mètres, c'est-à-dire, égal à 6366198.

Au moyen de la formule précédente, on peut déterminer très-exactement les différences de niveau, d'après les observations barométriques; mais il faudra que ces observations soient faites avec beaucoup de soin et avec de très-bons instrumens, sans quoi on y pourrait trouver de grandes erreurs. On choisira autant que possible un tems calme et l'heure de midi. Un observateur se rendra à la station inférieure, un autre à la station supérieure, avec des baromètres et des thermomètres préalablement comparés. Là chacun d'eux fera, à des heures marquées l'observation de la hauteur du baromètre; il notera au même instant l'état du thermomètre attaché au baromètre pour avoir la température du mercure et celui d'un thermomètre libre très-sensible, exposé à l'ombre ainsi que le ba[illegible] destiné à donner la température de l'air. Ces[illegible]tions se répéteront de quart d'heure en quart d'heure, d'après des montres bien réglées l'une sur l'autre, jusqu'à ce qu'on en ait réuni un certain nombre, par exemple, 10 ou 12. Alors les deux observateurs se rejoindront, compareront de nouveau leurs baromètres et leurs thermomètres pour voir s'ils n'auraient éprouvé aucun accident. S'ils se trouvent exactement d'accord, on prendra la moyenne des observations faites à chaque station, et l'on calculera, avec ces moyennes, la différence de niveau. Si l'on a opéré avec toutes les précautions que nous avons prescrites, le résultat ne sera susceptible que de très-petites erreurs, dues aux irrégularités accidentelles de pression et de température des couches

atmosphériques : erreurs que l'on fera disparaître par leur compensation réciproque, en répétant les expériences à différens jours, et prenant une moyenne arithmétique entre tous les résultats. En réunissant ainsi cinq ou six séries d'observations correspondantes, faites avec de bons thermomètres, et avec un baromètre muni d'un nonius qui donne au moins les dixièmes de millimètre, on peut répondre de 2 ou 3 mètres sur les plus grandes hauteurs.

Si par une longue suite d'observations faites dans un même lieu on détermine la hauteur moyenne du baromètre, et la température moyenne de l'atmosphère, on peut, au moyen de la formule, trouver la hauteur de ce lieu au-dessus du niveau de la mer, ou de tout autre point déterminé. Pour cela, il faut aussi avoir dans le second point la hauteur moyenne du baromètre et du thermomètre, et calculer ensuite d'après la formule, comme on le ferait relativement à deux stations où l'on aurait des observations correspondantes. Ceci suppose que la température moyenne de la surface de la terre, reste toujours constante ainsi que la hauteur du baromètre dans chaque lieu ; il est possible que ces élémens éprouvent quelques variations ; mais l'invention du baromètre et du thermomètre est trop moderne pour que l'on ait quelques données à cet égard ; du moins on peut sans aucune erreur sensible regarder leurs valeurs comme constantes pendant l'intervalle de quelques années.

Pour effectuer ces calculs, il faut connaître la hauteur moyenne du baromètre au niveau de l'océan. Suivant les expériences de M. Shuckburg, qui sont regardées comme très-exactes, elle est de $0^m,7629$ ($28^p,2^l.2$) à la latitude de 50° sexag., la température moyenne de l'air et du baromètre étant 12,8 de la division centésimale. A Paris, au niveau des moyennes eaux de la Seine, sous

le Pont-Royal, la hauteur moyenne du baromètre est $0^m,76$, et la température moyenne est 12°; avec ces données, lorsqu'on aura une longue série de bonnes observations faites dans un même lieu, on pourra trouver la hauteur de ce lieu au-dessus du niveau de Paris ou de l'océan.

Des observations du baromètre, calculées de cette manière et combinées avec la longitude et la latitude, serviraient à déterminer la position des différens points de la surface terrestre. En effet, les deux coordonnées jusqu'à présent en usage déterminent seulement la projection des lieux sur la surface du globe, elles ne font point connaître leur élévation, et la hauteur du baromètre servirait à l'indiquer. Pour cela il faudrait faire, dans chaque lieu, une série d'observations du thermomètre et du baromètre pendant plusieurs années, afin d'en déduire la température moyenne, et la hauteur moyenne du mercure. Il faudrait de plus n'employer que des instrumens bien faits et comparables entre eux.

Un pareil travail, qui pourrait aisément s'étendre à toute l'Europe, donnerait pour cette belle partie de la terre un nivellement complet, et beaucoup plus étendu que ne le comportent les mesures trigonométriques. Il indiquerait parfaitement la direction des chaînes de montagnes, la pente des fleuves, et ferait partout sentir la forme du terrain beaucoup mieux que de simples descriptions. La géographie physique trop peu cultivée parmi nous, en retirerait sans aucun doute une grande utilité.

Pour engager les observateurs à entreprendre ce travail, j'ai joint ici une table qui, sans autre calcul qu'une simple soustraction de deux nombres, donnera l'élévation des lieux et les différences de niveau, d'après les hauteurs observées du baromètre et du thermomètre.

Cette table est fondée sur une modification de la formule que j'ai déja indiquée, et qui consiste à envelopper la correction relative au décroissement de la pesanteur dans le coefficient constant de la formule, ce qui le porte à 18393 au lieu de 18334, comme on va le voir.

Pour cela, je reprends la formule rigoureuse, en faisant, pour abréger,

$$N=18334\left\{1+\frac{2r}{a}\right\}\left\{1+0{,}002837\cos\psi\right\}\left\{1+\frac{2(T+t)}{2}\right\},$$

et j'ai

$$X=N.\left\{\log\frac{H}{h}+2\log\left[1+\frac{X}{a}\right]\right\}\left\{1+\frac{X}{a}\right\}.$$

Comme X est contenu dans les deux membres, je vais le dégager. A cet effet, je développe le logarithme de $1+\frac{X}{a}$, et en me bornant à la puissance, j'ai $\frac{X}{Ma}$; M étant le module des tables ordinaires, c'est-à-dire, 2,3025850; ensuite, j'effectue la multiplication par le facteur $1+\frac{X}{a}$, en me bornant toujours à la première puissance, et j'ai

$$X=N\log\frac{H}{h}+\frac{N}{a}\left\{\log\frac{H}{h}+\frac{2}{M}\right\}X,$$

d'où l'on tire

$$X=\frac{N.\log\frac{H}{h}}{1-\frac{N}{a}\left\{\log\frac{H}{h}+\frac{2}{M}\right\}}.$$

Le dénominateur du second membre est presque égal à

l'unité, car le coefficient $\frac{N}{a}$ qui multiplie le second terme qui le compose, est une fraction fort petite et peu différente de $\frac{1}{347}$; et l'autre facteur, $\log \frac{H}{h'} + \frac{2}{M}$, ne peut jamais surpasser l'unité dans les limites où l'on a occasion d'observer; en effet, la quantité $\frac{2}{M}$ est constante et égale à 0,8685830; l'autre terme, $\log \frac{H}{h}$, qui est variable, est bien plus petit encore, puisque même en supposant $H = 0^m,760$ et $h = 0^m,600$, ce qui répond à une différence de niveau de près de 2000 mètres, sa valeur numérique n'est que 0,1026623. On pourrait donc déja négliger ce terme à cause de son peu d'influence; mais il sera mieux de le conserver en lui attribuant la valeur moyenne que nous venons de calculer; car l'erreur qui pourra en résulter quand h sera moindre que $0^m,600$, sera toujours bien petite dans les plus grandes hauteurs où l'on peut atteindre; et celle qui aura lieu quand h sera plus considérable, se trouvera atténuée par la petitesse de $\log \frac{H}{h}$ au numérateur. Par ce moyen, le second terme du numérateur devient constant; car on peut bien, à cause de sa petitesse, le calculer avec la partie constante de N, et alors, sa valeur est $\frac{18334.0,9712453}{6366198}$, ou 0,0028061. Le dénominateur est donc $1 - 0,0028061$, et en le passant en facteur au numérateur par la division, il vient

$$X = N.\{1 + 0,0028061\} \log \frac{H}{h}.$$

Nous pouvons de même, dans la valeur de N, attribuer une valeur moyenne à r, qui exprime la hauteur de la station inférieure au-dessus du niveau de la mer; car la correction qui en résulte, ayant pour diviseur le rayon de la terre, est si petite, que l'on pourrait presque toujours la négliger, principalement dans les petites différences de niveau; mais par cette raison même, il sera mieux de lui attribuer une valeur moyenne qui approche déja de celles où son influence pourrait devenir sensible. Pour cela, nous supposerons $r = 1200^m$, ce qui est à-peu-près la hauteur moyenne, à laquelle les voyageurs qui parcourent les montagnes, peuvent avoir le plus souvent occasion d'observer dans nos climats. On aura ainsi.... $\frac{2r}{a} = \frac{2400}{6366198} = 0{,}000376\overline{99}$. La partie constante du coefficient, qui était d'abord 18334, deviendra donc, par ces transformations,

$$18334\left\{1 + 0{,}000376\overline{99}\right\}\left\{1 + 0{,}002806\overline{1}\right\} = 18393,$$

et, par conséquent, l'expression de la différence de niveau deviendra

$$X = 18393^m\left\{1 + 0{,}002837\cos 2\psi\right\}\left\{1 + \frac{2.(T+t)}{1000}\right\}\log\frac{H}{h}.$$

Cette formule a toute l'exactitude que l'on peut espérer d'atteindre par les observations du baromètre. Comparée avec l'expression rigoureuse de X, elle ne donnerait que quatre mètres d'erreur sur la hauteur du Chimboraço, qui est de 5879^m, d'après les observations de M. de Humboldt: à plus forte raison suffirait-elle dans tous les nivellemens barométriques qui peuvent intéresser les voyageurs. C'est cette formule simplifiée que j'ai réduite en tables.

Explication des tables barométriques.

Je remarque d'abord que le facteur $1+0{,}002837\cos 2\psi$, qui dépend de la latitude, sera toujours d'une petitesse extrême, car il est nul à 45° de latitude; et à l'équateur ou au pôle, où il atteint son *maximum*, son second terme est encore au-dessous de $\frac{3}{1000}$, de sorte que la correction qui en résulte, ne sera pas les $\frac{3}{1000}$ de la hauteur observée. On pourra donc se permettre de le négliger dans la plupart des observations; mais cependant pour que l'on puisse en tenir compte, j'ai formé une petite table de ses valeurs de 5° en 5° de latitude : cette table montre tout de suite ce qu'il faut ajouter ou ôter à la différence de niveau calculée avec les autres termes de la formule, pour avoir égard à cette correction. Ainsi on voit, par exemple, qu'à 45° de latitude, il ne faut rien ajouter ni ôter à la hauteur; à 40°, il faut ajouter à la hauteur calculée $\frac{1}{2030}$ de sa valeur; à 35°, c'est $\frac{1}{1030}$, et ainsi de suite : au contraire, depuis 45° jusqu'au pôle, il faut retrancher la fraction de la hauteur indiquée dans la table. Nous ferons tout-à-l'heure l'application de cette correction à des exemples numériques.

Il ne nous reste donc plus qu'à considérer les autres termes de l'expression de X, qui devient

$$X=18393^{m}\left\{1+\frac{2(T+t)}{1000}\right\}.\log\frac{H}{h}.$$

La difficulté que cette expression présente pour être réduite en table, vient de ce qu'elle contient trois élémens variables $T+t$, H, h, c'est-à-dire, la somme des thermomètres libres et les deux hauteurs du baromètre observées dans les deux stations, hauteurs qui sont

supposées corrigées de la dilatation du mercure. Mais on peut éluder cette difficulté par un artifice très-simple, qui peut servir dans beaucoup d'autres circonstances ; il consiste à décomposer $\log \frac{H}{h}$ en deux termes de même forme, savoir : $\log \frac{0^m,76}{h}$, $-\log \frac{0^m,76}{H}$. Il est visible, en effet, que la différence de ces deux termes est égale à $\log \frac{H}{h}$; mais maintenant, ces termes étant tous deux de même forme, peuvent être donnés par une même table. En les introduisant dans l'expression de X, on aura

$$X = 18393^m \left\{1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right\} \left\{\log \frac{0^m,76}{h} - \log \frac{0^m,76}{H}\right\}.$$

On voit qu'il suffit de construire une table de la quantité

$$18393^m \left\{1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right\} \log \frac{0^m,76}{h},$$

dans laquelle on donnera à $T+t$ et à h, toutes les valeurs que peuvent présenter les observations ordinaires. Alors, quand les valeurs de $T+t$, h et H seront données pour une observation particulière, on entrera d'abord dans la table avec $T+t$ et h, et on trouvera un nombre, puis avec $T+t$ et H, et on trouvera un autre nombre. La différence de ces deux nombres sera la différence de niveau X, rigoureusement. C'est ainsi qu'est construite la table que l'on trouve à la fin de ce chapitre. La première colonne verticale de chaque page contient les hauteurs du baromètre, de millimètre en millimètre, depuis

$0^m,765$ ($28^p.3^l.1$) jusqu'à $0^m,600$ ($22^p.2^l.$), ce qui répond à une différence de niveau d'environ 2000 mètres. Ces valeurs sont supposées ramenées à une même température, par exemple, à celle de la station inférieure; de sorte que si les longueurs des colonnes de mercure observées sont H et h et leurs températures (T) et (t), il faut entrer dans la table avec les nombres

$$T+t,\ H \text{ et } h\left\{1+\frac{(T)-(t)}{5412}\right\}.$$

Il serait encore presque aussi simple de réduire toujours les deux colonnes de mercure à la température de la glace fondante, ce qui rendrait les calculs uniformes.

La première colonne horisontale de notre table, intitulée : SOMME DES THERMOMÈTRES LIBRES, présente les valeurs de $T+t$, calculées de degré en degré du thermomètre centésimal, depuis $+12°$ jusqu'à $+42°$.

Quoique les dimensions de notre table soient bornées aux limites que nous venons d'assigner, son usage peut être étendu à tous les cas possibles, au moyen d'un artifice très-simple, que nous expliquerons tout-à-l'heure, en l'appliquant au calcul de la hauteur du Chimboraço. Pour le moment, nous considérerons le cas ordinaire, où l'on veut consulter la table avec des valeurs de $T+t$, H et h, qui y sont comprises.

Ayant la hauteur du baromètre dans la station supérieure, on y fera la petite correction de la dilatation du mercure, et on aura ainsi h; on cherchera dans la première colonne de la table le nombre qui en approche le plus; alors on suivra la ligne horisontale correspondante à ce nombre, jusqu'à ce qu'on arrive à la colonne qui répond à $T+t$; le nombre que l'on trouvera à la

rencontre de ces deux colonnes, sera le premier terme de la formule exprimé en mètres.

On répétera précisément la même opération avec la valeur de H relative à la station inférieure, en employant toujours la même valeur de $T+t$; on trouvera ainsi le second terme de la formule exprimé en mètres.

Si H est moindre que $0^m,76$, on retranchera le second terme du premier : la différence sera la valeur de X, ou la différence de niveau demandée.

Mais si H est plus grand que $0^m,76$, on l'ajoutera au premier terme.

Je suppose, par exemple, que l'on ait les données suivantes :

	Hauteur du barom.	Thermomèt. libre.	Thermomèt. du barom.	Latitude.
Station inférieure.	$0^m,75000$	$+18$	$+18$	50°
Station supérieure	$0^m,59889$	$+8$	$+8$	

La différence des températures du mercure est 10°; la correction du baromètre supérieur est donc . . . . . $\frac{5^m,9889}{5412} = 0^m,00111$, additive; on a donc

$T+t = 26°$, $H = 0^m,7500$, $h = 0^m,6000$.

Avec $T+t = 26$ et $h = 0^m,600$, la table donne $1986^m,4$

Avec $T+t = 26$ et $h = 0^m,750$, $111,3$

Différence . . . . . $1875^m,1$

Correction de latitude $-\frac{1}{2030}$ . . . $-0,9$

Différence de niveau . . . . . $1874^m,2$

Cette table donne aussi le moyen de déterminer la hauteur des lieux au-dessus du niveau de la mer, quand on connaît, par une longue suite d'observations, la température moyenne et la hauteur moyenne du baromètre. Il suffit de combiner ces données avec leurs analogues au niveau de la mer. Or, suivant les observations de M. Schuckburg, qui sont réputées très-exactes, la hauteur moyenne du baromètre au niveau de l'océan, par 50° de latitude, est $0^m,7629$ ($28^p.2^l.2$); la température moyenne y est de $12°,8$.

Comparons ces valeurs avec ce qui a lieu à Genève par $46°.12'$ de latitude. D'après les observations du célèbre Saussure, la température de la terre à Genève est égale à $12°$ du thermomètre centésimal. La hauteur moyenne du baromètre dans cette ville, suivant M. Cotte, est $0^m,7266$ ($26^p.10^l.1$). Ce résultat est conclu de 14 années d'observations.

Les températures des colonnes de mercure sont ici les mêmes que celle de l'air; leur différence est . . . . . $12°,8 - 12°,0 = 0°,8$; par conséquent

$$h = 0^m,7266 + \frac{0^m,7266 . 0,8}{5412} = 0^m,7267.$$

Avec $h = 0^m,7267$ et $T + t = 24,8$, la table donne (*) $375^m,6$

Avec $H = 0^m,7629$ et $T + t = 24,8$, $31,9$

H étant plus grand que 0,76, je prends la somme $407^m,5$

Correction pour la latitude moyenne $-\frac{1}{2030}$ . . . $-0,2$

Hauteur de Genève au-dessus de l'océan. . . . . $407^m,3$

(*) Comme la table n'est calculée que de degré en degré, et de millimètre en millimètre, il faut, pour avoir égard aux fractions plus

Ces deux exemples suffisent pour les cas où H, h et $T+t$ sont compris dans les limites de la table ; le calcul sera toujours le même. Passons au cas où quelqu'une de ces quantités sortirait de ces limites, et commençons par $T+t$.

Il n'arrivera presque jamais dans les observations que la somme des thermomètres libres soit moindre que 12°, ou plus grande que 42° : cependant si cela avait lieu, par un cas extraordinaire, voici comment il faudrait opérer.

Si $T+t$ est moindre que 12°, ajoutez-y la quantité de degrés nécessaire pour aller jusque-là. Soit t' ce nombre. Avec les colonnes barométriques observées H, h et $T+t+t'=12°$, entrez dans la table comme à l'ordinaire ; mais quand vous aurez trouvé les hauteurs

---

petites, prendre des parties proportionnelles. Par exemple, la valeur de h pour Genève étant $0^m,7267$, le nombre correspondant est compris entre ceux qui répondent à $0^m,727$ et $0^m,726$; cherchez dans chacune de ces lignes les nombres qui répondent à $T+t=24$; dans la première, c'est $371^m,6$ avec la différence $0^m,71$ pour 1° ; ce sera donc $0^m,57$ pour 0°,8 : ainsi, le nombre de cette ligne qui correspond à 24°,8 est $372^m,2$. De même, dans la ligne suivante, le nombre analogue est $383^m,1$, avec la différence $0^m,73$ pour 1°, ce qui fait $0^m,58$ pour 0°,8 : ainsi, le nombre de cette ligne qui répond à 24°,8 est $383^m,7$. Retranchez-en $372^m,2$, la différence $11^m,5$ est la variation de hauteur pour 1 millimètre de changement dans le baromètre à cette température : or, de $0^m,7267$ à $0^m,7270$, le changement est $0^m,0003$, c'est donc $3^m,45$ qu'il faut ajouter à la hauteur $372^m,2$, qui répond à $0^m,727$; on a ainsi $375^m,65$. Ces réductions se prennent à vue sur la table, et avec un peu d'habitude, elles sont beaucoup plus faciles à exécuter qu'à expliquer. C'est ainsi que dans l'usage des logarithmes, on trouve le logarithme d'un nombre qui n'est pas dans les tables, mais qui se trouve entre deux autres qui y sont compris.

partielles en mètres, retranchez de chacune d'elles le produit de t' par la valeur de la différence pour 1° que vous trouverez sur la même ligne horisontale. Vous aurez ainsi les mêmes nombres que la table vous aurait donnés, si elle s'était étendue au-dessous de 12°.

On emploierait un artifice analogue, si la somme des thermomètres libres surpassait 42°. Dans ce cas, on en retrancherait le nombre de degrés nécessaire pour la ramener à 42°, et on ajouterait à chacun des résultats partiels trouvés pour H et h, le produit de cet excès par la valeur de la différence pour 1°.

Ces procédés sont fondés sur ce que les nombres contenus dans une même ligne horisontale de la table, croissent d'une même quantité pour chaque degré. La raison de cette progression arithmétique est exprimée dans la dernière colonne, intitulée : *Différences pour* 1°.

Au reste, comme je l'ai déja dit, on n'aura presque jamais l'occasion d'employer ces réductions.

Il n'en sera pas de même de celles qui concernent H et h. Il pourrait arriver assez souvent que ces quantités sortissent des limites de la table; mais on peut toujours les y ramener par un artifice tellement simple, qu'il vaut mieux en faire usage que d'étendre le volume de la table inutilement.

D'abord, si H surpasse $0^m,765$, ce qui n'arrivera que bien rarement, la différence sera toujours bien petite, car les plus grandes hauteurs du baromètre que l'on observe à la surface de la terre, ne surpassent point $0^m,78$; dans ce cas, on diminuera les deux hauteurs H et h dans une même proportion, c'est-à-dire, que l'on retranchera de chacune d'elles $\frac{1}{100}$ de leur valeur ou $\frac{1}{10}$, s'il

est nécessaire. Alors H entrera dans la table, et l'on opérera comme à l'ordinaire avec ces valeurs transformées.

Ce procédé est fondé sur ce que la formule

$$X = 18393^{m}\left\{1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right\}\log\frac{H}{h},$$

ne contient que le rapport $\frac{H}{h}$ des deux colonnes barométriques, rapport qui ne change point quand on augmente ou qu'on diminue ses deux termes dans une même proportion. S'il ne suffit pas de retrancher $\frac{1}{100}$ de H pour le faire rentrer dans la table, on peut en retrancher $\frac{1}{10}$, et alors il y rentrera certainement. Je suppose qu'on ait, par exemple,

	$H =$	$h =$
	$0^{m},7800$	$0^{m},6950$
je retranche $\frac{1}{10}$	$0\ ,0780$	$0\ ,0695$
et j'ai les valeurs corrigées H	$0^{m},7020$	$h = 0^{m},6255$

qui entrent toutes deux dans la table. Avec ces valeurs et celle de $T+t$, cherchez les hauteurs partielles comme à l'ordinaire, et leur différence donnera la différence de niveau.

On aurait pu retrancher également toute autre fraction. Reprenons cet exemple :

	$H =$	$h =$
	$0^{m},7800$	$h = 0^{m},69500$
je retranche $\frac{1}{100}$	$0\ ,0078$	$0\ ,00695$
	$H = 0\ ,7722$	$h = 0\ ,68805$
comme H n'entre pas encore dans la table, je retranche de nouveau $\frac{1}{100}$.	$0^{m},00772$	$0^{m},00688$
et j'ai les valeurs corrigées	$H = 0^{m},76448$	$h = 0^{m},68117$

Ces valeurs donneraient la même différence de niveau que les deux premières que nous avions obtenues en retranchant $\frac{1}{10}$; on peut s'en convaincre, d'après la table, en calculant avec chacune d'elles séparément.

Examinons maintenant le cas où h serait plus faible que $0^m,600$, limite supérieure de notre table. Dans ce cas, on pourrait bien l'y ramener par un procédé analogue, en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{H}{h}$ par un même nombre; mais ce procédé pourrait avoir l'inconvénient de faire sortir H de la table, en le rendant plus grand que $0^m,765$. Pour éviter cet inconvénient, voici comme il faut opérer.

Reprenons la formule

$$X = 18393^m \left\{1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right\} \left\{\log \frac{0^m,76}{h} - \log \frac{0^m,76}{H}\right\};$$

faites

$$\log \frac{0^m,76}{h} = \log \frac{0^m,76\left(1+\frac{1}{4}\right)}{h\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \log \frac{0^m,76}{h\left(1+\frac{1}{4}\right)} + \log \frac{5}{4}$$
$$= \log \frac{0^m,76}{h\left(1+\frac{1}{4}\right)} + \log \frac{0^m,76}{0^m,608},$$

vous aurez alors

$$X = 18393^m \left\{1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right\} \left\{\log \frac{0^m,76}{h\left(1+\frac{1}{4}\right)} - \log \frac{0^m,76}{H} + \log \frac{0^m,76}{0^m,608}\right\}.$$

Les trois termes qui composent la valeur de X peuvent être pris dans la table. Soit $h = 0^m,48$, on aura . . . $h\left(1+\frac{1}{4}\right) = 0^m,60$, et h sera ramené dans la table. Ce procédé suffira donc lorsque la colonne barométrique,

dans la station supérieure, ne sera pas plus faible que $0^m,48$, ce qui répond à une hauteur de 3800^m au-dessus du niveau de la mer. Ces cas n'exigent que l'addition d'un terme de plus, et il arrivera bien rarement que l'on s'élève à de plus grandes hauteurs, du moins en Europe.

EXEMPLE. M. de Humboldt a fait les observations suivantes sur la montagne de Quindiù, dans le royaume de la Nouvelle-Grenade, au point de partage des eaux qui se rendent d'un côté dans l'océan Atlantique, de l'autre dans la mer Pacifique.

	Hauteur du barom.	Thermom. libre.	Thermom. du barom.	Latitude.
Station supérieure.	$0^m,509818$	$+18°,75$	$+20°$	5°
Au niveau de la mer Pacifique, on avait au même instant...	$0^m,762944$	$+25,30$	$+25,3$	

Ici on a $h = 0^m,509818 \left\{1 + \frac{5°,3}{5412}\right\} = 0^m,510318$

J'ajoute $\frac{1}{4}$ de h. . . . . $0,127579$

Valeur de h ramenée aux tables . . . . . $h = 0^m,6379$

Avec $h = 0^m,6379$ . . . . . la table donne $1522^m,46$

$H = 0,76294$ et $T+t = 44,05$ . . . . . $+33,50$

La const. $0,608$ . . . . . $1937,80$

Somme . . . . . $3493,76$

Correction de latitude $+\frac{1}{358}$ . . . . . $+9,76$

Hauteur sur l'océan . . . . . $3503^m,5$

Le même artifice servirait encore pour des points plus élevés, car si h ne rentrait pas encore dans la table quand on l'aurait multiplié par $\frac{5}{4}$, rien n'empêche de le multiplier encore une fois par $\frac{5}{4}$, pourvu qu'au lieu du terme $\log\frac{0^m,76}{0^m,608}$, on prenne le double. En effet, on a évidemment

$$\log\frac{0^m,76}{h}=\log\frac{0^m,76\,(1+\frac{1}{4})^2}{h\,(1+\frac{1}{4})^2}=\log\frac{0^m,76}{h\,(1+\frac{1}{4})^2}+2\log\tfrac{5}{4}$$
$$=\log\frac{0^m,76}{h\,(1+\frac{1}{4})^2}+2\log\frac{0^m,76}{0^m,608},$$

alors on aura

$$X=18393^m\left\{1+\frac{2\,(T+t)}{1000}\right\}\left\{\log\frac{0^m,76}{h\,(1+\frac{1}{4})^2}-\log\frac{0^m,76}{H}+2\log\frac{0^m,76}{0^m,608}\right\}.$$

Cette formule n'est pas plus difficile à calculer que la précédente. Elle suffirait jusqu'à la hauteur du Chimboraço; mais si l'on voulait dépasser toutes les hauteurs accessibles à l'homme, même celle de l'ascension de Gay-Lussac, il n'y aurait qu'à prendre

$$X=18393^m\left\{1+\frac{2\,(T+t)}{1000}\right\}\left\{\log\frac{0^m,76}{h\,(1+\frac{1}{4})^3}-\log\frac{0^m,76}{H}+3\log\frac{0^m,76}{0^m,608}\right\}.$$

formule qui sera tout aussi facile à calculer. En voici l'exemple appliqué à la mesure de la hauteur du Chimboraço, par M. de Humboldt.

	Hauteur du barom.	Thermom. libre.	Thermom. du barom.	Latitude.
Station supérieure.	$0^m,377275$	$-12,6$	$+10°$	$1°,45'$
Au niveau de la mer Pacifique	0 ,7620	$+25,3$	$+25,3$	

Ici on a

$$h=0,377275\left\{1+\frac{15,3}{5412}\right\}=0,377275+0,001067=0,378342$$

J'ajoute $\frac{1}{4}$ de h	0,094585
	0,472927
Le résultat n'étant pas compris dans la table, j'ajoute encore $\frac{1}{4}$ de sa valeur	0,118232
	0,591159
Le résultat est presque compris dans la table, j'ajoute encore $\frac{1}{4}$	0,147790
J'ai enfin . . . . . h	=0,73895

Avec $h=0,73895$	la table donne	$234^m,87$
$H=0,7620$ et $T+t=23,7$		+22 ,00
La const. 0,6080		1867 ,10
		1867 ,10
		1867 ,10
Somme.		$5858^m,11$
Correction de latitude $+\frac{1}{352}$		+16 ,68
Hauteur du Chimboraço sur la mer. .		$5874^m,79$

Enfin, il me reste à examiner le cas où les deux valeurs de H et de h seraient toutes deux plus petites que

$0^m,600$; ce cas est bien facile. On multipliera ces deux quantités par un même nombre jusqu'à ce que la station inférieure rentre dans la table, après quoi on opérera comme ci-dessus.

EXEMPLE. Je suppose que des voyageurs ont passé la nuit à 2400 mètres de hauteur, et qu'ils partent de ce point pour s'élever plus haut. Au moment du départ leur baromètre est à $0^m,5800$, et les hauteurs qu'ils observent en s'élevant sont toutes plus petites que ce nombre. On demande de les calculer par la table.

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait eu . .	$H = 0^m,5800$	$h = 0^m,4700$
A chacune de ces hauteurs j'ajoute $\frac{1}{10}$	$0\ ,0580$	$0\ ,0470$
	$H = 0^m,6380$	$h = 0^m,5170$

Maintenant H étant rentré dans la table, on peut effectuer le calcul comme dans les exemples précédens.

J'ai joint à la table un type figuré de ces divers exemples, afin qu'on l'ait sous les yeux dans les applications numériques, sans avoir besoin de recourir au texte.

De plus, je rapporterai ici quelques indications générales, que M. Ramond a déduites de ses nombreuses expériences; elles serviront à éclairer les observateurs sur le degré de précision qu'ils peuvent attendre des mesures barométriques, selon les divers états de l'atmosphère.

1°. On estimera, en général, les hauteurs trop faibles,

Quand l'observation se fera le matin ou le soir;

Quand le baromètre inférieur étant dans une plaine, le baromètre supérieur sera dans une vallée étroite et profonde;

Quand les vents souffleront fortement de la région australe ;

Quand le tems sera manifestement orageux ; et dans ce cas, on peut commettre de grandes erreurs ;

2°. On estimera au contraire les hauteurs trop fortes,

Quand on observera entre midi et deux ou trois heures, sur-tout pendant l'été et par un soleil ardent ;

Quand le baromètre supérieur étant au sommet d'une montagne, le baromètre inférieur sera dans une gorge étroite et dominée ;

Quand il régnera un vent fort de la région boréale, sur-tout si l'on est sur une montagne, et s'il en frappe la pente la plus escarpée.

Enfin, j'ajouterai encore une remarque importante. L'observation prouve que dans des circonstances égales, le mercure, dans un baromètre à syphon, est toujours plus élevé que dans un baromètre à cuvette. M. Laplace a montré que cette inégalité est un effet de l'action capillaire qui déprime la colonne de mercure dans le baromètre à cuvette, tandis qu'elle se compense dans les deux branches du baromètre à syphon.

Voici une table que M. Laplace a calculée pour corriger cet effet.

Table des dépressions du mercure dans le baromètre, dues à sa capillarité.

Diamètre intérieur des tubes, en millimètres.	Dépression en millimètres.
2	4,5599
3	2,9023
4	2,0388
5	1,5055
6	1,1482
7	0,8813
8	0,6851
9	0,5354
10	0,4201
11	0,3506
12	0,2602
13	0,2047
14	0,1597
15	0,1245
16	0,0970
17	0,0754
18	0,0586
19	0,0436
20	0,0352

Exemples numériques du calcul des hauteurs par la formule

$$X = 18393^{m}\left\{1 + 0{,}002837\cos 2\downarrow\right\}\left\{1 + \frac{2.(T+t)}{1000}\right\}\left\{\log.\frac{0^{m},76}{h} - \log.\frac{0,76}{H}\right\}.$$

$H =$ longueur de la colonne de mercure dans la station inférieure exprimée en fraction décimale du mètre ;

$h =$ longueur de la colonne de mercure dans la station supérieure corrigée de la dilatation du mercure ;

$T + t =$ somme des températures de l'air dans les deux stations, exprimée en degrés du thermomètre centésimal.

1er. *Cas.* Si h et H sont compris dans la table, consultez-la immédiatement. Exemple :

	Hauteur du barom.	Thermomèt. libre.	Thermomèt. du barom.	Latitude en d. sex.
Station inférieure.	$0^{m},75000$	+ 18°	+ 18°	50°
Station supérieure.	0 ,59889	+ 8	+ 8	

$T + t = 26^{b}$, $H = 0^{m},7500$, $h = 0^{m},59889\left\{1 + \frac{10}{5412}\right\} = 0^{m},600$

Avec $h = 0{,}600$, $H = 0{,}750$ et $T + t = 26$ { la table donne 1986m,4 ; . . . . . — 111 ,3

Différence . . . . . 1875 ,1
Correction de latitude $-\frac{1}{2030}$ . . . . — 0m,9
Différence de niveau . . . . . $1874^{m},2$

Le terme provenant de H est *soustractif* quand H est moindre que $0^{m},76$, et *additif* quand il surpasse $0^{m},76$.

2e. *Cas.* Si h n'est pas compris dans la table, surpasse $0^{m},480$. Exemple :

	Hauteur du barom.	Thermomèt. libre.	Thermomèt. du barom.	Latitude.
Station supérieure.	$0^{m},50982$	+ 18°,75	+ 20	5°
Station inférieure.	0 ,76294	+ 25 ,30	+ 25,3	

$T + t = 44°,05$, $H = 0^{m},76294$, $h = 0^{m},5098\left\{1 + \frac{5°,3}{5412}\right\} = 0^{m},5103$

J'ajoute $\frac{1}{4}$ de h . . . . . 0 ,1276

Valeur comprise dans la table . . . . . $h = 0$,6379

Avec $h = 0{,}6379$, $H = 0{,}7629$, Const. 0, 608 et $T + t = 44{,}05$ { la table donne 1522m,46 ; . . . . . +33 ,50 ; . . . . . 1937 ,80

3493m,76
Correction de latitude $\frac{1}{378}$ . . . . . + 9 ,76
Différence de niveau . . . . . $3503^{m},52$

3e. *Cas.* Si h est moindre que $0^m,48$ et plus grand que $0^m,384$. Exemple :

	Hauteur du barom.	Thermomèt. libre.	Thermomèt. du barom.	Latitude.
Station supérieure.	$0^m,38294$	$-1°,6$	$+10°$	$1°.45'$
Station inférieure.	$0,76200$	$+25,3$	$+25,3$	

$T+t=23°,7$, $H=0^m,7620$, $h=0^m,38294\left\{1+\frac{15,3}{5412}\right\}=0^m,384$

J'ajoute $\frac{1}{4}$ de h	$0,096$
	$0,480$
J'ajoute encore $\frac{1}{4}$ de cette valeur.	$0,120$
	$h=0,600$

Avec $h=0,6000$, $H=0,7620$, Const. $=0,6080$ et $T+t=23,7$:

la table donne	1977,7
. . . . .	+22,0
. . . . .	1867,1
Ajoutez encore ce terme	1867,1
Somme	5733,9
Correction de la latitude $+\frac{1}{352}$	16,2
Différence de niveau	$5750^m,2$

4e. *Cas.* Si H n'est pas compris dans la table, vous l'y ferez rentrer en multipliant ou divisant H et h par un même nombre, par exemple, en ajoutant ou ôtant à chacun d'eux $\frac{1}{10}$ de leurs valeurs.

Soit	$H=0^m,5740$	$h=0^m,4820$
ajoutez $\frac{1}{10}$	$0,0574$	$0,0482$
ce qui donne	$H=0,6314$	$h=0,5302$

puis calculez la hauteur avec ces nombres comme dans les exemples précédens.

Si, au contraire, *on* avait

	$H=0^m,7800$	$h=0^m,7270$
retranchez $\frac{1}{10}$	$0,0780$	$0,0727$
ce qui donne	$H=0,7020$	$h=0,6543$

puis achevez le reste du calcul avec ces hauteurs.

Si la somme des thermomètres libres $T+t$ sortait de la table, on se servirait des parties proportionnelles qui sont indiquées à la fin de chaque ligne.

Lorsque la différence de niveau est très-petite, l'inégalité des températures des deux colonnes de mercure peut masquer leur différence réelle ; et alors on ne sait laquelle des deux il faut prendre pour h et H. Mais, dans ce cas il n'y a qu'à réduire l'une quelconque des deux colonnes à la température de l'autre. Cette réduction faite, la plus courte sera h, la plus longue H.

Enfin quand on pourra négliger une erreur de 6 ou 8 mètres, comme dans les courses de botanique, il suffira de prendre pour h, H et $T+t$ des nombres entiers de millimètres et de degrés, en négligeant les fractions ; *alors le calcul de la différence de niveau n'exigera pas quinze secondes de tems.*

SOMME des Températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T + t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du baromètre.	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	Différences pour 1°.
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
765	53,6	53,7	53,8	53,9	54,0	54,1	54,2	54,4	55,5	54,6	54,7	54,8	54,9	55,0	55,1	0,10
764	42,9	43,0	43,1	43,2	43,2	43,3	43,4	43,5	43,6	43,7	43,8	43,8	43,9	44,0	44,1	0,08
763	32,2	32,3	32,4	32,4	32,5	32,5	32,6	32,7	32,7	32,8	32,9	32,9	33,0	33,0	33,1	0,06
762	21,5	21,5	21,6	21,6	21,7	21,7	21,7	21,8	21,8	21,9	21,9	22,0	22,0	22,0	22,1	0,04
761	10,8	10,8	10,8	10,8	10,8	10,9	10,9	10,9	10,9	10,9	11,0	11,0	11,0	11,0	11,1	0,02
760	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
759	10,8	10,8	10,8	10,8	10,9	10,9	10,9	10,9	10,9	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,1	0,02
758	21,6	21,6	21,7	21,7	21,7	21,8	21,8	21,8	21,9	21,9	22,0	22,0	22,0	22,1	22,1	0,04
757	32,4	32,4	32,4	32,5	32,6	32,6	32,7	32,8	32,8	32,9	33,0	33,0	33,0	33,1	33,1	0,06
756	43,2	43,3	43,4	43,5	43,6	43,6	43,7	43,7	43,8	43,9	44,0	44,1	44,2	44,3	44,3	0,08
755	54,0	54,1	54,2	54,3	54,4	54,5	54,5	54,6	54,7	54,8	54,9	55,0	55,0	55,1	55,2	0,10
754	64,8	65,0	65,1	65,2	65,4	65,5	65,6	65,7	65,8	65,9	66,0	66,1	66,2	66,1	66,4	0,12
753	75,7	75,8	76,0	76,1	76,3	76,4	76,6	76,7	76,9	77,0	77,2	77,3	77,5	77,7	77,8	0,14
752	86,6	86,7	86,9	87,1	87,2	87,4	87,6	87,7	87,9	88,1	88,2	88,4	88,6	88,7	88,9	0,16
751	97,4	97,6	97,8	98,0	98,2	98,4	98,4	98,8	99,0	99,2	99,3	99,5	99,7	99,9	100,1	0,18
750	108,3	108,6	108,8	109,0	109,2	109,4	109,6	109,8	110,0	110,2	110,5	110,7	110,9	111,1	111,3	0,21
749	119,3	119,5	119,7	120,0	120,2	120,4	120,7	120,9	121,1	121,4	121,6	121,8	122,1	122,3	122,5	0,23
748	130,2	130,4	130,7	130,9	131,2	131,4	131,7	132,0	132,2	132,5	132,7	133,0	133,2	133,5	133,7	0,25
747	141,1	141,4	141,7	142,0	142,2	142,5	142,8	143,0	143,3	143,6	143,9	144,2	144,4	144,7	145,0	0,28
746	152,1	152,4	152,7	153,0	153,3	153,6	153,9	154,2	154,5	154,8	155,1	155,4	155,6	155,9	156,2	0,30
745	163,1	163,4	163,7	164,0	164,3	164,6	165,0	165,3	165,6	165,9	166,2	166,6	166,9	167,2	167,5	0,32
744	174,0	174,4	174,7	175,1	175,4	175,7	176,1	176,4	176,7	177,0	177,4	177,8	178,1	178,5	178,8	0,34
743	185,1	185,4	185,8	186,1	186,5	186,8	187,2	187,6	187,9	188,2	188,6	189,0	189,3	189,7	190,1	0,37
742	196,1	196,5	196,8	197,2	197,6	198,0	198,4	198,7	199,1	199,5	199,9	200,3	200,7	201,0	201,4	0,39
741	207,1	207,5	207,9	208,3	208,7	209,1	209,5	209,9	210,3	210,7	211,1	211,5	211,9	212,3	212,7	0,41
740	218,1	218,6	219,0	219,4	219,9	220,3	220,7	221,1	221,5	222,0	222,4	222,8	223,2	223,7	224,1	0,43
739	229,2	229,7	230,1	230,6	231,0	231,4	231,9	232,3	232,7	233,1	233,6	234,0	234,4	234,8	235,3	0,45
738	240,3	240,8	241,2	241,7	242,2	242,6	243,1	243,6	244,0	244,5	245,0	245,4	245,9	246,4	246,8	0,47
737	251,4	251,9	252,4	252,9	253,3	253,8	254,3	254,8	255,3	255,8	256,3	256,8	257,3	257,8	258,2	0,50
736	262,5	263,0	263,5	264,0	264,5	265,0	265,5	266,1	266,6	267,1	267,6	268,1	268,6	269,1	269,6	0,52
735	273,6	274,1	274,7	275,2	275,8	276,3	276,8	277,3	277,9	278,4	278,9	279,4	280,0	280,5	281,1	0,54
734	284,7	285,3	285,9	286,4	287,0	287,5	288,1	288,6	289,2	289,7	290,3	290,8	291,4	292,0	292,5	0,56
733	295,9	296,5	297,0	297,6	298,2	298,8	299,3	299,9	300,5	301,1	301,7	302,2	302,8	303,4	304,0	0,58
732	307,1	307,7	308,3	308,9	309,5	310,0	310,6	311,2	311,8	312,4	313,0	313,6	314,2	314,8	315,4	0,60
731	318,3	318,9	319,5	320,1	320,7	321,3	322,0	322,6	323,2	323,8	324,4	325,1	325,7	326,3	326,9	0,62
730	329,5	330,0	330,7	331,3	331,9	332,6	333,3	333,9	334,6	335,2	335,8	336,5	337,1	337,8	338,4	0,64
729	340,8	341,4	342,1	342,7	343,3	344,0	344,6	345,3	345,9	346,6	347,3	348,0	348,6	349,3	349,9	0,66
728	352,0	352,6	353,2	353,9	354,6	355,3	356,0	356,7	357,4	358,1	358,7	359,4	360,1	360,8	361,5	0,68
727	363,2	363,9	364,6	365,3	366,0	366,7	367,4	368,1	368,8	369,5	370,2	370,9	371,6	372,3	373,0	0,71
726	374,4	375,1	375,9	376,6	377,3	378,0	378,7	379,5	380,2	380,9	381,7	382,4	383,1	383,9	384,6	0,73

SOMME des Températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T + t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du baromètre.	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	Différences pour 1°.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
765	55,2	55,3	55,4	55,5	55,6	55,7	55,8	55,9	56,0	56,1	56,2	56,3	56,4	56,5	56,6	56,7	0,10
764	44,2	44,3	44,4	44,4	44,5	44,6	44,6	44,7	44,8	44,9	45,0	45,0	45,1	45,2	45,3	45,4	0,08
763	33,2	33,2	33,3	33,4	33,4	33,5	33,5	33,6	33,6	33,7	33,7	33,8	33,8	33,9	34,0	34,0	0,06
762	22,1	22,2	22,2	22,2	22,3	22,3	22,3	22,4	22,4	22,4	22,5	22,5	22,6	22,6	22,6	22,7	0,04
761	11,1	11,1	11,1	11,1	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,3	11,3	11,3	11,3	11,3	0,02
760	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
759	11,1	11,1	11,1	11,1	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,3	11,3	11,3	11,3	11,3	0,02
758	22,2	22,2	22,2	22,3	22,3	22,4	22,4	22,4	22,4	22,4	22,5	22,5	22,6	22,6	22,6	22,7	0,04
757	33,2	33,3	33,3	33,4	33,4	33,5	33,5	33,6	33,6	33,7	33,7	33,8	33,8	33,9	34,0	34,0	0,06
756	44,4	44,5	44,6	44,7	44,8	44,8	44,8	44,8	44,8	44,9	45,0	45,0	45,1	45,2	45,3	45,4	0,08
755	55,3	55,4	55,5	55,5	55,6	55,7	56,8	55,9	56,0	56,1	56,2	56,3	56,4	56,5	56,6	56,7	0,10
754	66,5	66,6	66,8	66,9	67,0	67,2	67,4	67,4	67,5	67,6	67,7	67,9	67,9	68,1	68,2	68,3	0,12
753	77,9	78,1	78,2	78,4	78,5	78,6	78,7	78,8	78,9	79,1	79,2	79,3	79,3	79,7	79,8	79,9	0,14
752	89,1	89,2	89,4	89,6	89,8	89,9	90,1	90,2	90,4	90,5	90,7	90,9	91,0	91,2	91,4	91,6	0,16
751	100,3	100,5	100,8	101,0	101,1	101,2	101,4	101,6	101,8	102,0	102,2	102,4	102,6	102,8	103,0	103,2	0,18
750	111,5	111,7	111,9	112,1	112,4	112,6	112,8	113,0	113,3	113,5	113,7	115,9	114,1	114,4	114,6	114,8	0,21
749	122,7	123,0	123,2	123,4	123,7	123,9	124,2	124,5	124,8	125,0	125,2	125,4	125,7	126,0	126,2	126,4	0,23
748	134,0	134,2	134,5	134,7	135,0	135,3	135,6	135,9	136,2	136,5	136,7	137,0	137,2	137,5	137,8	138,0	0,25
747	145,2	145,5	145,8	146,1	146,3	146,6	147,1	147,4	147,7	148,0	148,3	148,5	148,8	149,1	149,4	149,7	0,28
746	156,5	156,8	157,1	157,4	157,7	158,0	158,5	158,8	159,2	159,5	159,8	160,1	160,3	160,7	161,0	161,3	0,30
745	167,8	168,1	168,5	168,8	169,1	169,4	170,0	170,3	170,7	171,0	171,3	171,6	171,9	172,3	172,6	172,9	0,32
744	179,1	179,5	179,8	180,1	180,5	180,8	181,4	181,8	182,1	182,4	182,8	183,1	183,5	183,8	184,2	184,5	0,34
743	190,4	190,8	191,2	191,5	191,9	192,2	192,8	193,2	193,6	193,9	194,3	194,7	195,0	195,4	195,8	196,1	0,37
742	201,8	202,2	202,6	202,9	203,3	203,7	204,2	204,7	205,1	205,4	205,9	206,2	206,6	207,0	207,4	207,8	0,39
741	213,2	213,6	214,0	214,4	214,8	215,2	215,7	216,2	216,5	216,9	217,3	217,8	218,1	218,5	219,0	219,4	0,41
740	224,5	224,9	225,4	225,8	226,2	226,6	227,1	227,6	228,0	228,4	228,9	229,2	229,6	230,1	230,6	231,0	0,43
739	237,7	236,1	236,5	237,0	237,4	237,8	238,7	239,2	239,6	240,0	240,6	241,0	241,4	241,8	242,3	242,8	0,45
738	247,3	247,8	248,2	248,7	249,2	249,7	250,2	250,8	251,2	251,7	252,2	252,6	253,1	253,5	254,1	254,5	0,47
737	258,7	259,2	259,7	260,2	260,7	261,2	261,8	262,4	262,8	263,3	263,9	264,3	264,8	265,3	265,8	266,3	0,50
736	270,2	270,7	271,2	271,7	272,2	272,7	273,4	274,0	274,4	275,0	275,5	276,0	276,5	277,0	277,6	278,0	0,52
735	281,6	282,1	282,7	283,2	283,7	284,3	285,0	285,6	286,1	286,6	287,2	287,7	288,2	288,7	289,3	289,8	0,54
734	293,1	293,6	294,2	294,7	295,3	295,8	296,5	297,1	297,7	298,2	298,8	299,3	299,9	300,4	301,0	301,6	0,56
733	304,5	305,1	305,7	306,3	306,9	307,4	308,1	308,7	309,3	309,9	310,5	311,0	311,6	312,1	312,8	313,3	0,58
732	316,0	316,6	317,2	317,8	318,4	319,0	319,7	320,3	320,9	321,5	322,1	322,7	323,3	323,9	324,5	325,1	0,60
731	327,6	328,2	328,8	329,4	330,0	330,7	331,2	331,9	332,5	333,2	333,8	334,5	335,0	335,6	336,3	336,8	0,62
730	339,1	339,7	340,4	341,0	341,6	342,3	342,8	343,5	344,1	344,8	345,4	346,0	346,7	347,3	348,0	348,6	0,64
729	350,6	351,3	351,6	352,6	353,3	353,9	354,5	355,3	355,9	356,6	357,2	357,8	358,6	359,2	359,9	360,5	0,66
728	362,2	362,9	363,5	364,2	364,9	365,6	366,3	367,0	367,7	368,4	369,0	369,7	370,4	371,1	371,8	372,4	0,68
727	373,7	374,4	375,2	375,9	376,6	377,3	378,0	378,8	379,4	380,2	380,9	381,5	382,3	382,9	383,7	384,4	0,71
726	385,3	386,1	386,8	387,5	388,3	389,0	389,8	390,5	391,2	392,0	392,7	393,4	394,1	394,8	395,6	396,3	0,73

SOMME des Températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T + t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du baromètre.	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	Différences pour 1°.
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
725	385,7	386,4	387,2	387,9	388,7	389,4	390,2	390,9	391,7	392,4	393,2	393,9	394,7	395,4	396,2	0,75
724	397,0	397,7	398,5	399,3	400,1	400,8	401,6	402,4	403,1	403,9	404,7	405,5	406,2	407,0	407,8	0,77
723	408,2	409,0	409,8	410,6	411,4	412,2	413,0	413,8	414,6	415,4	416,2	417,0	417,8	418,6	419,4	0,79
722	419,6	420,4	421,2	422,0	422,8	423,7	424,5	425,3	426,1	426,9	427,7	428,6	429,4	430,2	431,0	0,82
721	430,9	431,8	432,6	433,4	434,3	435,1	435,9	436,8	437,6	438,5	439,3	440,2	441,0	441,8	442,7	0,84
720	442,3	443,1	444,0	444,8	445,7	446,5	447,4	448,2	449,1	450,0	450,8	451,7	452,6	453,4	454,3	0,86
719	453,6	454,5	455,4	456,3	457,2	458,1	458,9	459,8	460,7	461,6	462,5	463,4	464,3	465,1	466,0	0,88
718	465,0	465,9	466,8	467,7	468,7	469,6	470,5	471,4	472,3	473,2	474,1	475,0	475,9	476,8	477,7	0,90
717	476,4	477,3	478,3	479,2	480,1	481,1	482,0	482,9	483,8	484,8	485,7	486,6	487,6	488,5	489,4	0,93
716	487,8	488,8	489,7	490,7	491,6	492,6	493,5	494,5	495,4	496,4	497,4	498,3	499,3	500,2	501,2	0,95
715	499,3	500,2	501,2	502,2	503,2	504,1	505,1	506,1	507,1	508,0	509,0	510,0	511,0	511,9	512,9	0,97
714	510,7	511,7	512,7	513,7	514,7	515,7	516,7	517,7	518,7	519,7	520,7	521,7	522,7	523,7	524,7	1,00
713	522,2	523,2	524,3	525,3	526,3	527,3	528,3	529,3	530,3	531,3	532,4	533,4	534,4	535,4	536,4	1,02
712	533,7	534,7	535,7	536,8	537,8	538,9	539,9	540,9	542,0	543,0	544,1	545,1	546,2	547,2	548,2	1,04
711	545,1	546,2	547,3	548,3	549,4	550,5	551,5	552,6	553,7	554,7	555,8	556,9	557,9	559,0	560,0	1,06
710	556,7	557,8	558,9	560,0	561,0	562,1	563,2	564,3	565,3	566,4	567,5	568,6	569,7	570,8	571,9	1,09
709	568,3	569,4	570,5	571,6	572,7	573,8	574,8	575,9	577,1	578,2	579,3	580,4	581,5	582,6	583,7	1,11
708	579,7	580,9	582,0	583,1	584,2	585,4	586,5	587,7	588,8	590,0	591,0	592,2	593,3	594,4	595,6	1,13
707	591,3	592,4	593,6	594,7	595,9	597,0	598,2	599,4	600,5	601,7	602,9	604,0	605,1	606,3	607,5	1,16
706	602,9	604,1	605,2	606,4	607,6	608,8	609,9	611,1	612,3	613,5	614,6	615,8	617,0	618,2	619,4	1,18
705	614,4	615,5	616,8	618,0	619,2	620,4	621,6	622,8	624,0	625,2	626,4	627,6	628,8	630,0	631,2	1,20
704	626,1	627,3	628,6	629,8	631,0	632,2	633,4	634,6	635,9	637,1	638,3	639,5	640,7	642,0	643,2	1,22
703	637,7	638,9	640,2	641,4	642,7	644,0	645,2	646,4	647,7	648,9	650,2	651,4	652,6	653,9	655,1	1,25
702	649,3	650,6	651,9	653,1	654,4	655,7	656,9	658,2	659,5	660,8	662,0	663,3	664,6	665,8	667,1	1,27
701	661,0	662,3	663,6	664,9	666,2	667,5	668,7	670,0	671,3	672,6	673,9	675,2	676,5	677,8	679,1	1,29
700	672,7	674,0	675,3	676,6	677,9	679,2	680,5	681,9	683,2	684,5	685,8	687,1	688,4	689,8	691,1	1,31
699	684,5	685,8	687,1	688,4	689,8	691,1	692,5	693,8	695,2	696,5	697,8	699,1	700,5	701,9	703,2	1,33
698	696,2	697,6	698,9	700,3	701,6	703,0	704,4	705,7	707,1	708,4	709,8	711,2	712,5	713,9	715,3	1,35
697	708,0	709,4	710,7	712,1	713,5	714,9	716,3	717,7	719,1	720,4	721,8	723,2	724,6	726,0	727,4	1,38
696	719,8	721,2	722,5	724,0	725,3	726,8	728,2	729,6	731,0	732,4	733,8	735,2	736,6	738,0	739,5	1,40
695	731,6	733,0	734,4	735,8	737,2	738,7	740,1	741,5	743,0	744,4	745,8	747,3	748,7	750,1	751,6	1,42
694	743,3	744,7	746,2	747,6	749,1	750,5	752,0	753,4	754,9	756,3	757,8	759,3	760,7	762,2	763,6	1,44
693	755,1	756,5	758,0	759,5	760,9	762,4	763,9	765,5	766,9	768,3	769,8	771,3	772,8	774,2	775,7	1,47
692	766,9	768,3	769,8	771,3	772,8	774,3	775,8	777,3	778,8	780,3	781,8	783,3	784,8	786,3	787,8	1,49
691	778,6	780,1	781,6	783,2	784,6	786,2	787,7	789,2	790,8	792,2	793,8	795,4	796,9	798,3	799,9	1,51
690	790,4	791,9	793,4	795,0	796,5	798,1	799,6	801,1	802,7	804,2	805,8	807,4	808,9	810,4	812,0	1,53
689	802,2	803,9	805,4	807,0	808,5	810,2	811,7	813,2	814,8	816,4	818,0	819,6	821,1	822,7	824,3	1,56
688	814,3	815,8	817,4	819,0	820,6	822,2	823,8	825,3	827,0	828,5	830,1	831,8	833,3	834,9	836,5	1,58
687	826,2	827,8	829,4	831,0	832,6	834,3	835,8	837,4	839,1	840,7	842,3	844,0	845,6	847,2	848,8	1,61
686	838,1	839,7	841,4	843,0	844,6	846,3	847,9	849,5	851,2	852,8	854,5	856,2	857,8	859,4	861,0	1,63

SOMME des Températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T + t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du Baromètre.	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	Différences pour 1°.
	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m
725	396,9	397,7	398,4	399,2	399,9	400,7	401,5	402,3	403,0	403,8	404,5	405,2	406,0	406,7	407,5	408,2	0,75
724	408,6	409,3	410,1	410,9	411,7	412,4	413,2	414,0	414,8	415,5	416,3	417,0	417,9	418,6	419,4	420,1	0,77
723	420,2	421,0	421,8	422,6	423,4	424,2	425,0	425,8	426,6	427,5	428,1	428,9	429,7	430,5	431,3	432,0	0,79
722	431,8	432,7	433,5	434,3	435,1	435,9	436,7	437,5	438,3	439,1	440,0	440,7	441,6	442,3	443,2	444,0	0,82
721	443,5	444,4	445,2	446,1	446,9	447,7	448,5	449,3	450,1	450,9	451,8	452,6	453,4	454,2	455,1	455,9	0,84
720	455,2	456,0	456,9	457,7	458,6	459,3	460,2	461,0	461,9	462,7	463,6	464,4	465,3	466,1	467,0	467,8	0,86
719	466,9	467,8	468,7	469,6	470,5	471,3	472,1	473,0	473,9	474,7	475,6	476,4	477,4	478,2	479,1	479,9	0,88
718	478,6	479,5	480,4	481,3	482,2	483,2	484,0	484,9	485,8	486,7	487,6	488,5	489,4	490,3	491,2	492,1	0,90
717	490,4	491,3	492,2	493,1	494,1	495,0	496,0	496,9	497,8	498,7	499,6	500,5	501,5	502,4	503,3	504,2	0,93
716	502,1	503,1	504,0	505,0	505,9	506,9	507,9	508,8	509,8	510,7	511,6	512,6	513,5	514,5	515,4	516,3	0,95
715	513,9	514,9	515,8	516,8	517,8	518,8	519,8	520,8	521,8	522,7	523,7	524,6	525,6	526,6	527,6	528,5	0,97
714	525,7	526,7	527,7	528,6	529,6	530,6	531,7	532,7	533,7	534,7	535,7	536,6	537,7	538,7	539,7	540,6	1,00
713	537,5	538,5	539,5	540,5	541,5	542,6	543,6	544,7	545,7	546,7	547,7	548,7	549,7	550,7	551,8	552,7	1,02
712	549,3	550,3	551,4	552,4	553,4	554,5	555,6	556,6	557,7	558,7	559,7	560,7	561,7	562,8	563,9	564,8	1,04
711	561,1	562,2	563,2	564,3	565,4	566,4	567,5	568,6	569,6	570,7	571,7	572,7	573,8	574,9	576,0	577,0	1,06
710	572,9	574,0	575,1	576,2	577,3	578,4	579,4	580,5	581,6	582,7	583,7	584,8	585,9	587,0	588,1	589,1	1,09
709	584,8	585,9	587,0	588,2	589,3	590,4	591,5	592,6	593,7	594,8	595,9	597,0	598,1	599,2	600,4	601,4	1,11
708	596,7	597,8	599,0	600,1	601,2	602,4	603,6	604,7	605,8	607,0	608,1	609,2	610,3	611,5	612,6	613,7	1,13
707	608,6	609,8	610,9	612,1	613,2	614,4	615,6	616,8	618,0	619,1	620,2	621,4	622,6	623,7	624,9	626,0	1,16
706	620,5	621,7	622,9	624,1	625,2	626,4	627,7	628,9	630,1	631,3	632,4	633,6	634,8	636,0	637,1	638,3	1,18
705	632,4	633,6	634,8	636,0	637,2	638,4	639,8	641,0	642,2	643,4	644,6	645,9	647,0	648,2	649,4	650,6	1,20
704	644,4	645,6	646,9	648,1	649,3	650,5	651,9	653,1	654,3	655,5	656,8	658,1	659,2	660,4	661,7	662,8	1,22
703	656,4	657,6	658,9	660,1	661,4	662,6	663,9	665,2	666,4	667,7	669,0	670,3	671,4	672,7	673,9	675,1	1,25
702	668,4	669,7	670,9	672,2	673,4	674,7	676,0	677,3	678,6	679,8	681,1	682,5	683,7	684,9	686,2	687,4	1,27
701	680,4	681,7	682,9	684,3	685,5	686,8	688,1	689,4	690,7	692,0	693,3	694,7	695,9	697,2	698,4	699,7	1,29
700	692,4	693,7	695,0	696,3	697,7	699,0	700,2	701,5	702,8	704,1	705,5	706,9	708,1	709,4	710,7	712,0	1,31
699	704,5	705,8	707,2	708,5	709,9	711,2	712,5	713,8	715,1	716,4	717,9	719,3	720,5	721,8	723,1	724,5	1,33
698	716,6	718,0	719,3	720,7	722,1	723,5	724,7	726,1	727,4	728,8	730,2	731,6	732,9	734,2	735,6	736,9	1,35
697	728,7	730,1	731,5	732,9	734,3	735,7	737,0	738,3	739,7	741,1	742,6	744,0	745,3	746,7	748,0	749,4	1,38
696	740,8	742,3	743,6	745,1	746,5	747,9	749,3	750,6	752,0	753,4	754,9	756,3	757,7	759,1	760,5	761,9	1,40
695	753,0	754,4	755,8	757,3	758,7	760,2	761,5	762,9	764,4	765,8	767,3	768,7	770,1	771,5	772,9	774,4	1,42
694	765,1	766,5	768,0	769,4	770,9	772,4	773,8	775,2	776,7	778,1	779,6	781,1	782,4	783,9	785,3	786,8	1,44
693	777,2	778,7	780,1	781,6	783,1	784,6	786,0	787,5	789,1	790,4	792,0	793,4	794,8	796,3	797,8	799,3	1,47
692	789,3	790,8	792,3	793,8	795,3	796,8	798,3	799,7	801,3	802,7	804,3	805,8	807,2	808,8	810,2	812,8	1,49
691	801,4	803,0	804,4	806,0	807,5	809,1	810,5	812,0	813,7	815,1	816,7	818,1	819,6	821,2	822,7	824,2	1,51
690	813,5	815,1	816,6	818,2	819,7	821,3	822,8	824,3	825,9	827,4	829,0	830,5	832,0	833,6	835,1	836,7	1,54
689	825,8	827,4	829,0	830,6	832,1	833,7	835,2	836,8	838,4	839,9	841,5	843,1	844,6	846,2	847,7	849,3	1,56
688	838,1	839,7	841,3	842,9	844,5	846,1	847,7	849,2	850,8	852,4	854,0	855,6	857,2	858,8	860,3	862,0	1,58
687	850,4	852,0	853,6	855,3	856,8	858,5	860,1	861,7	863,3	864,9	866,6	868,2	869,7	871,4	873,0	874,6	1,61
686	862,7	864,3	866,0	867,6	869,2	870,9	872,5	874,1	875,8	877,4	879,1	880,7	882,3	884,0	885,6	887,3	1,63

SOMME des températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T + t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du Baromètre.	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	Différences pour 1°.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
685	850,1	851,7	853,4	855,1	856,7	858,4	860,0	861,7	863,4	865,0	866,7	868,4	870,0	871,7	873,3	1,65
684	862,0	863,7	865,3	867,1	868,7	870,4	872,1	873,8	875,5	877,1	878,8	880,5	882,2	883,9	885,6	1,68
683	873,9	875,6	877,3	879,1	880,7	882,5	884,2	885,9	887,6	889,3	891,0	892,7	894,4	896,2	897,8	1,70
682	885,8	887,6	889,3	891,1	892,7	894,5	896,2	898,0	899,7	901,4	903,2	904,9	906,7	908,4	910,1	1,73
681	897,8	899,5	901,3	903,1	904,8	906,6	908,3	910,1	911,9	913,6	915,3	917,1	918,9	920,7	922,3	1,75
680	909,7	911,5	913,3	915,1	916,8	918,6	920,4	922,2	924,0	925,7	927,5	929,3	931,1	932,9	934,6	1,78
679	921,8	923,7	225,5	927,3	929,0	930,8	932,7	934,5	936,3	938,0	939,9	941,7	943,5	945,3	947,1	1,80
678	934,0	935,8	937,6	939,5	941,2	943,1	944,9	946,8	948,6	950,4	952,2	954,1	955,9	957,7	959,5	1,83
677	946,1	948,0	949,8	951,7	953,5	955,3	957,2	959,0	960,9	962,7	964,6	966,4	968,3	970,2	972,0	1,85
676	958,2	960,1	962,0	963,9	965,7	967,6	969,4	971,3	973,2	975,1	976,9	978,8	980,7	982,6	984,4	1,87
675	970,4	972,3	974,2	976,1	977,9	979,8	981,7	983,6	985,5	987,4	989,3	991,2	993,1	995,0	996,9	1,89
674	982,5	984,4	986,3	988,2	990,1	992,0	994,0	995,9	997,8	999,7	1001,7	1003,6	1005,5	1007,4	1009,3	1,92
673	994,6	996,6	998,5	1000,4	1002,3	1004,3	1006,2	1008,2	1010,1	1012,1	1014,0	1016,0	1017,9	1019,8	1021,8	1,95
672	1006,7	1008,7	1010,7	1012,6	1014,6	1016,5	1018,5	1020,4	1022,4	1024,4	1026,4	1028,3	1030,3	1032,3	1034,2	1,97
671	1018,9	1020,9	1022,8	1024,8	1026,8	1028,8	1030,7	1032,7	1034,7	1036,8	1038,7	1040,7	1042,7	1044,7	1046,7	1,99
670	1031,0	1033,0	1035,0	1037,0	1039,0	1041,0	1043,0	1045,0	1047,0	1049,1	1051,1	1053,1	1055,1	1057,1	1059,1	2,01
669	1043,3	1045,3	1047,4	1049,4	1051,4	1053,4	1055,5	1057,5	1059,5	1061,6	1063,6	1065,7	1067,7	1069,7	1071,7	2,03
668	1055,6	1057,6	1059,7	1061,7	1063,8	1065,8	1067,9	1069,9	1072,0	1074,1	1076,2	1078,2	1080,3	1082,3	1084,4	2,05
667	1067,9	1070,0	1072,1	1074,1	1076,2	1078,3	1080,4	1082,4	1084,5	1086,7	1088,7	1090,8	1092,9	1095,0	1097,0	2,08
666	1080,2	1082,3	1084,4	1086,5	1088,6	1090,7	1092,8	1094,9	1097,0	1099,2	1101,3	1103,4	1105,5	1107,6	1109,7	2,10
665	1092,5	1094,6	1096,8	1098,9	1101,0	1103,1	1105,3	1107,4	1109,5	1111,7	1113,8	1116,0	1118,1	1120,2	1122,3	2,12
664	1104,8	1106,9	1109,1	1111,2	1113,4	1115,5	1117,7	1119,8	1122,0	1124,2	1126,3	1128,5	1130,6	1132,8	1134,9	2,16
663	1117,1	1119,2	1121,5	1123,6	1125,8	1128,0	1130,2	1132,3	1134,5	1136,7	1138,9	1141,1	1143,2	1145,4	1147,6	2,18
662	1129,4	1131,6	1133,8	1136,0	1138,2	1140,4	1142,6	1144,8	1147,0	1149,3	1151,4	1153,7	1155,8	1158,1	1160,2	2,20
661	1141,7	1143,8	1146,2	1148,3	1150,6	1152,8	1155,1	1157,2	1159,5	1161,8	1164,0	1166,2	1168,4	1170,7	1172,9	2,22
660	1154,0	1156,2	1158,5	1160,7	1163,0	1165,2	1167,5	1169,7	1172,0	1174,3	1176,5	1178,8	1181,0	1183,3	1185,5	2,25
659	1166,5	1168,7	1171,0	1173,3	1175,6	1177,8	1180,1	1182,4	1184,7	1187,0	1189,2	1191,6	1193,8	1196,1	1198,4	2,27
658	1179,0	1181,2	1183,6	1185,8	1188,2	1190,4	1192,8	1195,0	1197,4	1199,7	1202,0	1204,3	1206,6	1208,9	1211,2	2,30
657	1191,4	1193,8	1196,1	1198,4	1200,7	1203,0	1205,1	1207,7	1210,0	1212,4	1214,7	1217,1	1219,3	1221,7	1224,0	2,32
656	1203,9	1206,3	1208,6	1210,9	1213,3	1215,6	1218,0	1220,3	1222,7	1225,1	1227,4	1229,9	1232,1	1234,5	1236,8	2,34
655	1216,4	1218,8	1221,0	1223,3	1225,9	1228,3	1230,7	1233,0	1235,4	1237,8	1240,2	1242,6	1244,9	1247,3	1249,7	2,37
654	1228,9	1231,3	1233,7	1236,1	1238,5	1240,9	1243,3	1245,7	1248,1	1250,5	1252,9	1255,3	1257,7	1260,1	1262,5	2,39
653	1241,4	1243,8	1246,2	1248,6	1251,1	1253,5	1255,9	1258,3	1260,8	1263,2	1265,6	1268,1	1270,5	1272,9	1275,3	2,42
652	1253,8	1256,4	1258,7	1261,2	1263,6	1266,1	1268,5	1271,0	1273,4	1275,9	1278,3	1280,8	1283,2	1285,7	1288,1	2,45
651	1266,3	1268,9	1271,3	1273,7	1276,2	1278,7	1281,2	1283,6	1286,1	1288,6	1291,1	1293,6	1296,0	1298,5	1301,0	2,47
650	1278,9	1281,4	1283,8	1286,3	1288,8	1291,3	1293,8	1296,3	1298,8	1301,3	1303,8	1306,3	1308,8	1311,3	1313,8	2,50
649	1291,6	1294,1	1296,5	1299,1	1301,6	1304,1	1306,6	1309,2	1311,7	1314,2	1316,7	1319,3	1321,8	1324,3	1326,8	2,52
648	1304,5	1306,8	1309,3	1311,8	1314,4	1316,9	1319,5	1322,0	1324,6	1327,1	1329,7	1332,2	1334,8	1337,3	1339,9	2,55
647	1316,9	1319,5	1322,0	1324,6	1327,1	1329,7	1332,3	1334,9	1337,4	1340,0	1342,6	1345,2	1347,7	1350,3	1352,9	2,57
646	1329,6	1332,2	1334,8	1337,3	1339,9	1342,5	1345,1	1347,7	1350,3	1352,9	1355,5	1358,1	1360,7	1363,3	1365,9	2,60
645	1342,5	1344,9	1347,5	1350,1	1352,7	1355,4	1358,0	1360,6	1363,2	1365,9	1368,6	1371,1	1373,7	1376,4	1379,0	2,62

SOMME des Températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T + t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du Baromètre.	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	Différences pour 1°.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
685	875,0	876,7	878,5	880,0	881,6	883,5	885,0	886,6	888,3	889,9	891,6	893,3	894,9	896,6	898,2	899,9	1,65
684	887,2	889,0	890,6	892,4	894,0	895,7	897,4	899,1	900,7	902,4	904,1	905,7	907,5	909,1	910,8	912,5	1,68
683	899,5	901,3	903,0	904,7	906,4	908,1	909,8	911,5	913,2	914,9	916,6	918,4	920,1	921,7	923,4	925,2	1,70
682	911,8	913,6	915,3	917,1	918,7	920,5	922,2	924,0	925,7	927,4	929,2	930,8	932,6	934,3	936,1	937,8	1,73
681	924,1	925,9	927,7	929,4	931,1	932,9	934,7	936,4	938,1	939,9	941,7	943,3	945,2	946,9	948,7	950,5	1,75
680	936,4	938,2	940,0	941,8	943,5	945,3	947,1	948,9	950,6	952,4	954,2	956,0	957,8	959,5	961,3	963,1	1,78
679	948,9	950,7	952,5	954,3	956,1	957,9	959,9	961,3	963,3	965,1	966,9	968,7	970,6	972,5	974,1	975,9	1,80
678	961,4	963,2	965,0	966,9	968,6	970,5	972,3	974,2	975,9	977,8	979,6	981,5	983,3	985,1	986,9	988,8	1,83
677	973,8	975,7	977,6	979,4	981,2	983,1	984,9	986,8	988,6	990,5	992,3	994,2	996,1	997,8	999,7	1001,6	1,85
676	986,3	988,2	990,1	992,0	993,8	995,7	997,5	999,5	1001,3	1003,2	1005,0	1006,9	1008,8	1010,6	1012,5	1014,4	1,87
675	998,8	1000,7	1002,6	1004,5	1006,4	1008,3	1010,2	1012,1	1014,0	1015,9	1017,8	1019,7	1021,6	1023,4	1025,4	1027,3	1,89
674	1011,3	1013,2	1015,1	1017,0	1018,9	1020,8	1022,8	1024,7	1026,6	1028,5	1030,5	1032,4	1034,3	1036,2	1038,2	1040,1	1,92
673	1023,8	1025,7	1027,6	1029,6	1031,5	1033,4	1035,4	1037,4	1039,3	1041,2	1043,2	1045,1	1047,1	1049,0	1051,0	1052,9	1,95
672	1036,2	1038,2	1040,2	1042,1	1044,1	1046,0	1048,0	1050,0	1052,0	1053,9	1055,9	1057,8	1059,8	1061,7	1063,8	1065,7	1,97
671	1048,7	1050,7	1052,7	1054,7	1056,6	1058,6	1060,6	1062,7	1064,6	1066,6	1068,6	1070,6	1072,6	1074,5	1076,6	1078,6	1,99
670	1061,2	1063,2	1065,2	1067,2	1069,2	1071,2	1073,2	1075,3	1077,3	1079,3	1081,3	1083,3	1085,3	1087,3	1089,4	1091,4	2,01
669	1073,9	1075,9	1077,9	1079,9	1082,0	1084,0	1086,0	1088,1	1090,2	1092,2	1094,2	1096,2	1098,3	1100,3	1102,4	1104,4	2,03
668	1086,5	1088,6	1090,6	1092,7	1094,7	1096,8	1098,8	1101,0	1103,0	1105,0	1107,1	1109,2	1111,2	1113,3	1115,4	1117,4	2,05
667	1099,2	1101,2	1103,3	1105,4	1107,5	1109,6	1111,6	1113,8	1115,9	1117,9	1120,0	1122,1	1124,2	1126,2	1128,4	1130,5	2,08
666	1111,8	1113,9	1116,0	1118,1	1120,2	1122,4	1124,4	1126,6	1128,7	1130,8	1132,9	1135,0	1137,1	1139,2	1141,4	1143,5	2,10
665	1124,5	1126,6	1128,8	1130,9	1133,0	1135,2	1137,3	1139,4	1141,6	1143,7	1145,8	1147,9	1150,1	1152,2	1154,4	1156,5	2,13
664	1137,2	1139,3	1141,5	1143,6	1145,8	1147,9	1150,1	1152,3	1154,4	1156,5	1158,7	1160,8	1163,0	1165,2	1167,3	1169,5	2,16
663	1149,8	1152,0	1154,2	1156,3	1158,5	1160,7	1162,9	1165,1	1167,3	1169,4	1171,6	1173,8	1175,9	1178,2	1180,3	1182,5	2,18
662	1162,5	1164,6	1166,9	1169,0	1171,3	1173,5	1175,7	1177,9	1180,1	1182,3	1184,5	1186,7	1188,9	1191,1	1193,3	1195,6	2,20
661	1175,1	1177,3	1179,6	1181,8	1184,0	1186,3	1188,5	1190,7	1193,0	1195,1	1197,4	1199,7	1101,8	1204,1	1206,3	1208,6	2,23
660	1187,8	1190,0	1192,3	1194,5	1196,8	1199,1	1201,3	1203,6	1205,8	1208,0	1210,3	1212,6	1214,8	1217,1	1219,3	1221,6	2,27
659	1200,7	1202,9	1205,2	1207,4	1209,8	1212,1	1214,3	1216,6	1218,9	1221,1	1223,4	1225,7	1228,0	1230,3	1232,5	1234,8	2,27
658	1213,4	1215,8	1218,1	1220,4	1222,7	1225,0	1227,3	1229,6	1231,9	1234,2	1236,5	1238,8	1241,1	1243,4	1245,7	1248,0	2,30
657	1226,4	1228,8	1231,0	1233,3	1235,7	1238,0	1240,3	1242,7	1245,0	1247,2	1249,6	1252,0	1254,3	1256,6	1258,9	1261,3	2,33
656	1239,2	1241,5	1243,9	1246,2	1248,6	1251,0	1253,5	1255,7	1258,0	1260,3	1262,7	1265,1	1267,4	1269,8	1272,1	1274,6	2,36
655	1252,1	1254,4	1256,8	1259,2	1261,6	1264,0	1266,3	1268,7	1271,1	1273,4	1275,8	1278,2	1280,6	1283,0	1285,3	1287,7	2,39
654	1264,9	1267,3	1269,7	1272,1	1274,5	1276,9	1279,3	1281,7	1284,1	1286,5	1288,9	1291,3	1293,7	1296,1	1298,5	1300,9	2,42
653	1277,8	1280,2	1282,6	1285,0	1287,5	1289,9	1292,3	1294,7	1297,2	1299,6	1302,0	1304,4	1306,9	1309,3	1311,7	1314,1	2,44
652	1290,6	1293,0	1295,5	1297,9	1300,4	1302,9	1305,3	1307,8	1310,2	1312,6	1315,1	1317,6	1320,0	1322,5	1324,9	1327,4	2,47
651	1303,5	1305,9	1308,4	1310,9	1313,4	1315,8	1318,3	1320,8	1323,3	1325,7	1328,2	1330,7	1333,2	1335,6	1338,1	1340,6	2,50
650	1316,3	1318,8	1321,3	1323,8	1326,3	1328,8	1331,3	1333,8	1336,3	1338,8	1341,3	1343,8	1346,3	1348,8	1351,3	1353,8	2,53
649	1329,4	1331,9	1334,4	1336,9	1339,5	1342,0	1344,5	1347,0	1349,6	1352,1	1354,6	1357,1	1359,6	1362,2	1364,7	1367,2	2,55
648	1342,4	1345,0	1347,5	1350,1	1352,6	1355,2	1357,7	1360,3	1362,8	1365,4	1367,9	1370,4	1373,0	1375,5	1378,1	1380,6	2,58
647	1355,5	1358,0	1360,6	1363,2	1365,8	1368,3	1370,9	1373,5	1376,1	1378,6	1381,2	1383,8	1386,3	1388,9	1391,5	1394,1	2,61
646	1368,5	1371,1	1373,7	1376,3	1378,9	1381,5	1384,1	1386,7	1389,3	1391,9	1394,5	1397,1	1399,7	1402,2	1404,9	1407,5	2,64
645	1381,6	1384,2	1386,8	1389,5	1392,1	1394,7	1397,3	1400,0	1402,6	1405,2	1407,8	1410,4	1413,0	1415,6	1418,3	1420,9	2,6

SOMME des Températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T + t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du Baromètre.	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	Différences pour 1°.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
644	1355,0	1357,6	1360,2	1362,9	1365,5	1368,2	1370,8	1373,5	1376,1	1378,8	1381,4	1384,0	1386,7	1389,4	1392,0	2,65
643	1367,7	1370,3	1373,0	1375,6	1378,3	1381,0	1383,6	1386,3	1389,0	1391,7	1394,3	1397,0	1399,7	1402,4	1405,0	2,67
642	1380,3	1383,0	1385,7	1388,4	1391,0	1393,8	1396,4	1399,2	1401,8	1404,6	1407,2	1409,9	1412,6	1415,4	1418,0	2,70
641	1393,0	1395,7	1398,5	1401,1	1403,8	1406,6	1409,3	1412,0	1414,7	1417,3	1420,2	1422,9	1425,6	1428,4	1431,1	2,72
640	1405,7	1408,4	1411,2	1413,9	1416,6	1419,4	1422,1	1424,9	1427,6	1430,4	1433,1	1435,8	1438,6	1441,4	1444,1	2,75
639	1418,6	1421,3	1424,1	1426,9	1429,6	1432,4	1435,1	1438,0	1440,7	1443,5	1446,2	1449,0	1451,8	1454,6	1457,3	2,77
638	1431,4	1434,2	1437,1	1439,8	1442,6	1445,4	1448,2	1451,0	1453,8	1456,6	1459,4	1462,1	1465,0	1467,8	1470,6	2,80
637	1444,3	1447,1	1450,0	1452,8	1455,6	1458,4	1461,2	1464,1	1466,9	1469,7	1472,5	1475,3	1478,2	1481,0	1483,8	2,82
636	1457,2	1460,0	1462,9	1465,7	1468,6	1471,4	1474,3	1477,1	1480,0	1482,8	1485,7	1488,5	1491,4	1494,2	1497,1	2,85
635	1470,1	1473,0	1475,9	1478,7	1481,6	1484,5	1487,5	1490,2	1493,1	1496,0	1498,8	1501,7	1504,6	1507,5	1510,3	2,87
634	1482,9	1485,9	1488,8	1491,7	1494,5	1497,5	1500,3	1503,3	1507,1	1509,1	1511,9	1514,8	1517,7	1520,7	1523,5	2,90
633	1495,8	1498,8	1501,7	1504,6	1507,5	1510,5	1513,4	1516,3	1519,3	1522,2	1525,1	1528,0	1530,9	1533,9	1536,8	2,92
632	1508,7	1511,7	1514,6	1517,6	1520,5	1523,5	1526,4	1529,4	1532,3	1535,3	1538,2	1541,2	1544,1	1547,1	1550,0	2,95
631	1521,5	1524,6	1527,6	1530,5	1533,5	1536,5	1539,5	1542,4	1545,4	1548,4	1551,4	1554,3	1557,3	1560,3	1563,3	2,97
630	1534,4	1537,5	1540,6	1543,5	1546,5	1549,5	1552,5	1555,5	1558,5	1561,5	1564,5	1567,5	1570,5	1573,5	1576,5	3,00
629	1547,5	1550,6	1553,6	1556,7	1559,7	1562,7	1565,7	1668,8	1571,8	1574,8	1577,8	1580,9	1583,9	1586,9	1589,9	3,02
628	1560,6	1563,7	1566,8	1569,8	1572,9	1575,9	1579,0	1682,0	1585,1	1588,1	1591,2	1594,2	1597,3	1600,3	1603,4	3,05
627	1573,7	1576,8	1579,9	1583,0	1586,1	1589,1	1592,2	1695,3	1598,4	1601,4	1604,5	1607,6	1610,7	1613,7	1616,8	3,07
626	1586,8	1589,9	1593,1	1596,1	1599,3	1602,3	1605,5	1608,5	1611,7	1614,7	1617,9	1620,9	1624,1	1627,1	1630,3	3,10
625	1599,9	1603,1	1606,2	1609,3	1612,3	1615,6	1618,7	1621,8	1625,0	1628,1	1631,2	1634,3	1637,5	1640,6	1643,7	3,12
624	1613,0	1616,2	1619,3	1622,5	1625,6	1628,8	1631,9	1635,1	1638,2	1641,4	1644,5	1647,7	1650,8	1654,0	1657,1	3,15
623	1626,1	1629,3	1632,5	1635,6	1638,8	1642,0	1645,2	1648,3	1651,5	1654,7	1657,9	1661,0	1664,2	1667,4	1670,6	3,17
622	1639,2	1642,4	1645,6	1648,8	1652,0	1655,2	1658,4	1661,6	1664,8	1668,0	1671,2	1674,4	1677,6	1680,8	1684,0	3,20
621	1652,3	1655,5	1658,8	1661,9	1665,2	1668,4	1671,7	1674,8	1678,1	1681,3	1684,6	1687,7	1691,0	1694,2	1697,5	3,22
620	1665,4	1668,6	1671,9	1675,1	1678,4	1681,6	1684,9	1688,1	1691,4	1694,6	1697,9	1701,1	1704,4	1707,6	1710,9	3,25
619	1678,7	1681,9	1685,2	1688,5	1691,8	1695,0	1698,4	1701,6	1704,9	1708,1	1711,5	1714,7	1718,0	1721,2	1724,6	3,27
618	1692,0	1695,2	1698,6	1701,8	1705,2	1708,5	1711,8	1715,1	1718,4	1721,7	1725,0	1728,3	1731,6	1734,9	1738,2	3,30
617	1705,3	1708,6	1711	[illegible]	[illegible]	1721,9	1725,3	1728,5	1731,9	1735,2	1738,6	1741,9	1745,2	1748,5	1751	3,32
616	1718,6	1721,9	1725,3	1728,6	1732,0	1735,3	1738,7	1742,0	1745,4	1748,7	1752,1	1755,3	1758,8	1762,2	1765,5	3,35
615	1731,9	1735,2	1738,6	1742,0	1745,4	1748,8	1752,2	1755,5	1755,9	1762,3	1765,7	1769,1	1772,5	1775,8	1779,2	3,37
614	1745,1	1748,5	1751,9	1755,3	1758,7	1762,2	1765,6	1769,0	1772,4	1775,8	1779,3	1782,6	1786,1	1789,4	1792,9	3,40
613	1758,4	1761,8	1765,3	1768,7	1772,1	1775,6	1779,1	1782,5	1785,9	1789,4	1792,8	1796,2	1799,7	1803,1	1806,5	3,42
612	1771,7	1775,2	1778,6	1782,1	1785,5	1789,0	1792,5	1795,9	1799,4	1802,9	1806,4	1809,8	1813,3	1816,7	1820,2	3,45
611	1785,0	1788,5	1792,0	1795,4	1798,9	1802,5	1806,0	1809,4	1812,9	1816,5	1819,9	1823,4	1826,9	1830,4	1833,8	3,48
610	1798,3	1801,8	1805,3	1808,8	1812,3	1815,9	1819,4	1822,9	1826,4	1830,0	1833,5	1837,0	1840,5	1844,0	1847,5	3,51
609	1811,8	1815,4	1818,9	1822,4	1825,9	1829,6	1833,1	1836,6	1840,1	1843,8	1847,3	1850,8	1854,3	1857,9	1861,4	3,54
608	1825,3	1828,9	1832,5	1836,0	1839,6	1843,2	1846,8	1850,3	1853,9	1857,5	1861,1	1864,6	1868,2	1871,7	1875,3	3,56
607	1838,9	1842,5	1846,0	1849,6	1853,2	1856,9	1860,4	1864,0	1867,6	1871,3	1874,8	1878,4	1882,0	1885,6	1889,2	3,59
606	1852,4	1856,0	1859,6	1863,2	1866,9	1870,5	1874,1	1877,7	1881,4	1885,0	1888,6	1892,2	1895,9	1899,5	1903,1	3,61
605	1865,4	1869,6	1873,2	1876,9	1880,5	1884,2	1887,8	1891,5	1895,1	1898,8	1902,4	1906,1	1909,7	1913,4	1917,0	3,64
604	1878,7	1882,4	1886,8	1890,5	1894,1	1897,8	1901,5	1905,2	1908,8	1912,5	1916,2	1919,9	1923,5	1927,2	1931,8	3,66
603	1892,0	1896,7	1900,4	1904,1	1907,8	1911,5	1915,2	1918,9	1922,6	1926,3	1930,0	1933,7	1937,4	1941,1	1944,7	3,69
602	1906,5	1910,2	1913,9	1917,6	1921,4	1925,1	1928,8	1932,6	1936,3	1940,0	1943,7	1947,5	1951,2	1955,0	1958,6	3,72
601	1920,0	1923,8	1927,5	1931,3	1935,1	1938,8	1942,5	1946,3	1950,1	1953,8	1957,5	1961,3	1965,1	1968,8	1972,5	3,75
600	1933,5	1937,3	1941,1	1944,9	1948,7	1952,4	1956,2	1960,0	1963,8	1967,5	1971,3	1975,1	1978,9	1982,7	1986,4	3,78

SOMME des Températures de l'air aux deux extrémités de la colonne,

OU *Valeurs de* T+t *en degrés du thermomètre centésimal.*

Hauteur du Baromètre.	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	Différences pour 1°.
m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m	m/m
644	1394,7	1397,3	1399,9	1402,6	1405,2	1407,9	1410,5	1413,2	1415,8	1418,5	1421,0	1423,7	1426,3	1429,0	1431,7	1434,3	2,65
643	1397,7	1400,4	1403,0	1405,7	1408,4	1411,1	1413,7	1416,4	1419,1	1421,8	1424,5	1427,2	1429,9	1432,5	1435,2	1437,9	2,67
642	1400,8	1403,4	1406,1	1408,8	1411,5	1414,2	1416,9	1419,6	1422,3	1425,0	1427,6	1430,4	1433,0	1435,7	1438,5	1441,2	2,70
641	1403,8	1406,5	1409,2	1411,9	1414,7	1417,4	1420,1	1422,9	1425,6	1428,3	1431,0	1433,7	1436,4	1439,0	1441,9	1444,6	2,72
640	1406,9	1409,6	1412,3	1415,1	1417,8	1420,6	1423,5	1426,1	1428,8	1431,6	1434,2	1437,0	1439,7	1442,4	1445,3	1448,0	2,75
639	1410,0	1412,9	1415,6	1418,4	1421,2	1424,0	1426,7	1429,5	1432,3	1435,8	1437,7	1440,5	1443,3	1446,0	1448,9	1451,6	2,77
638	1413,4	1416,2	1418,9	1421,8	1424,5	1427,4	1430,1	1432,9	1435,7	1438,6	1441,2	1444,1	1446,8	1449,6	1452,5	1455,3	2,80
637	1416,7	1419,5	1422,2	1425,1	1427,9	1430,7	1433,5	1436,4	1439,2	1442,0	1444,8	1447,6	1450,4	1453,2	1456,1	1458,9	2,82
636	1419,9	1422,8	1425,5	1428,4	1431,2	1434,1	1436,9	1439,8	1442,6	1445,5	1448,3	1451,2	1454,0	1456,8	1459,7	1462,6	2,85
635	1423,2	1426,1	1428,8	1431,8	1434,6	1437,5	1440,4	1443,3	1446,1	1449,0	1451,9	1454,7	1457,6	1460,5	1463,4	1466,2	2,87
634	1426,5	1429,5	1432,2	1435,1	1438,0	1440,9	1443,8	1446,7	1449,6	1452,5	1455,3	1458,2	1461,1	1464,0	1467,0	1469,8	2,90
633	1430,7	1433,6	1436,5	1439,4	1442,3	1445,2	1448,1	1451,0	1453,9	1456,8	1459,7	1462,6	1465,5	1468,4	1471,3	1474,2	2,92
632	1435,0	1437,9	1440,8	1443,7	1446,6	1449,5	1452,4	1455,3	1458,2	1461,1	1464,0	1466,9	1469,8	1472,7	1475,6	1478,5	2,95
631	1439,3	1442,2	1445,1	1448,0	1450,9	1453,8	1456,7	1459,6	1462,5	1465,4	1468,3	1471,2	1474,1	1477,0	1479,9	1482,8	2,97
630	1443,6	1446,5	1449,4	1452,3	1455,2	1458,1	1461,0	1463,9	1466,8	1469,7	1472,6	1475,5	1478,4	1481,3	1484,2	1487,1	3,00
629	1448,0	1450,9	1453,8	1456,7	1459,6	1462,5	1465,4	1468,3	1471,2	1474,1	1477,0	1479,9	1482,8	1485,7	1488,6	1491,5	3,02
628	1452,4	1455,3	1458,2	1461,1	1464,0	1466,9	1469,8	1472,7	1475,6	1478,5	1481,4	1484,3	1487,2	1490,1	1493,0	1495,9	3,05
627	1456,8	1459,7	1462,6	1465,5	1468,4	1471,3	1474,2	1477,1	1480,0	1482,9	1485,8	1488,7	1491,6	1494,5	1497,4	1500,3	3,07
626	1461,2	1464,1	1467,0	1469,9	1472,8	1475,7	1478,6	1481,5	1484,4	1487,3	1490,2	1493,1	1496,0	1498,9	1501,8	1504,7	3,10
625	1465,6	1468,5	1471,4	1474,3	1477,2	1480,1	1483,0	1485,9	1488,8	1491,7	1494,6	1497,5	1500,4	1503,3	1506,2	1509,1	3,12
624	1470,0	1472,9	1475,8	1478,7	1481,6	1484,5	1487,4	1490,3	1493,2	1496,1	1499,0	1501,9	1504,8	1507,7	1510,6	1513,5	3,15
623	1474,4	1477,3	1480,2	1483,1	1486,0	1488,9	1491,8	1494,7	1497,6	1500,5	1503,4	1506,3	1509,2	1512,1	1515,0	1517,9	3,17
622	1478,8	1481,7	1484,6	1487,5	1490,4	1493,3	1496,2	1499,1	1502,0	1504,9	1507,8	1510,7	1513,6	1516,5	1519,4	1522,3	3,20
621	1483,2	1486,1	1489,0	1491,9	1494,8	1497,7	1500,6	1503,5	1506,4	1509,3	1512,2	1515,1	1518,0	1520,9	1523,8	1526,7	3,22
620	1487,6	1490,5	1493,4	1496,3	1499,2	1502,1	1505,0	1507,9	1510,8	1513,7	1516,6	1519,5	1522,4	1525,3	1528,2	1531,1	3,25
619	1492,0	1494,9	1497,8	1500,7	1503,6	1506,5	1509,4	1512,3	1515,2	1518,1	1521,0	1523,9	1526,8	1529,7	1532,6	1535,5	3,27
618	1496,4	1499,3	1502,2	1505,1	1508,0	1510,9	1513,8	1516,7	1519,6	1522,5	1525,4	1528,3	1531,2	1534,1	1537,0	1539,9	3,30
617	1500,8	1503,7	1506,6	1509,5	1512,4	1515,3	1518,2	1521,1	1524,0	1526,9	1529,8	1532,7	1535,6	1538,5	1541,4	1544,3	3,32
616	1505,2	1508,1	1511,0	1513,9	1516,8	1519,7	1522,6	1525,5	1528,4	1531,3	1534,2	1537,1	1540,0	1542,9	1545,8	1548,7	3,35
615	1509,6	1512,5	1515,4	1518,3	1521,2	1524,1	1527,0	1529,9	1532,8	1535,7	1538,6	1541,5	1544,4	1547,3	1550,2	1553,1	3,37
614	1514,0	1516,9	1519,8	1522,7	1525,6	1528,5	1531,4	1534,3	1537,2	1540,1	1543,0	1545,9	1548,8	1551,7	1554,6	1557,5	3,40
613	1518,4	1521,3	1524,2	1527,1	1530,0	1532,9	1535,8	1538,7	1541,6	1544,5	1547,4	1550,3	1553,2	1556,1	1559,0	1561,9	3,42
612	1522,8	1525,7	1528,6	1531,5	1534,4	1537,3	1540,2	1543,1	1546,0	1548,9	1551,8	1554,7	1557,6	1560,5	1563,4	1566,3	3,45
611	1527,2	1530,1	1533,0	1535,9	1538,8	1541,7	1544,6	1547,5	1550,4	1553,3	1556,2	1559,1	1562,0	1564,9	1567,8	1570,7	3,47
610	1531,6	1534,5	1537,4	1540,3	1543,2	1546,1	1549,0	1551,9	1554,8	1557,7	1560,6	1563,5	1566,4	1569,3	1572,2	1575,1	3,50
609	1536,0	1538,9	1541,8	1544,7	1547,6	1550,5	1553,4	1556,3	1559,2	1562,1	1565,0	1567,9	1570,8	1573,7	1576,6	1579,5	3,52
608	1540,4	1543,3	1546,2	1549,1	1552,0	1554,9	1557,8	1560,7	1563,6	1566,5	1569,4	1572,3	1575,2	1578,1	1581,0	1583,9	3,55
607	1544,8	1547,7	1550,6	1553,5	1556,4	1559,3	1562,2	1565,1	1568,0	1570,9	1573,8	1576,7	1579,6	1582,5	1585,4	1588,3	3,57
606	1549,2	1552,1	1555,0	1557,9	1560,8	1563,7	1566,6	1569,5	1572,4	1575,3	1578,2	1581,1	1584,0	1586,9	1589,8	1592,7	3,60
605	1553,6	1556,5	1559,4	1562,3	1565,2	1568,1	1571,0	1573,9	1576,8	1579,7	1582,6	1585,5	1588,4	1591,3	1594,2	1597,1	3,62
604	1558,0	1560,9	1563,8	1566,7	1569,6	1572,5	1575,4	1578,3	1581,2	1584,1	1587,0	1589,9	1592,8	1595,7	1598,6	1601,5	3,65
603	1562,4	1565,3	1568,2	1571,1	1574,0	1576,9	1579,8	1582,7	1585,6	1588,5	1591,4	1594,3	1597,2	1600,1	1603,0	1605,9	3,67
602	1566,8	1569,7	1572,6	1575,5	1578,4	1581,3	1584,2	1587,1	1590,0	1592,9	1595,8	1598,7	1601,6	1604,5	1607,4	1610,3	3,70
601	1571,2	1574,1	1577,0	1579,9	1582,8	1585,7	1588,6	1591,5	1594,4	1597,3	1600,2	1603,1	1606,0	1608,9	1611,8	1614,7	3,72
600	1575,6	1578,5	1581,4	1584,3	1587,2	1590,1	1593,0	1595,9	1598,8	1601,7	1604,6	1607,5	1610,4	1613,3	1616,2	1619,1	3,75
599	1580,0	1582,9	1585,8	1588,7	1591,6	1594,5	1597,4	1600,3	1603,2	1606,1	1609,0	1611,9	1614,8	1617,7	1620,6	1623,5	3,77
598	1584,4	1587,3	1590,2	1593,1	1596,0	1598,9	1601,8	1604,7	1607,6	1610,5	1613,4	1616,3	1619,2	1622,1	1625,0	1627,9	3,80
597	1588,8	1591,7	1594,6	1597,5	1600,4	1603,3	1606,2	1609,1	1612,0	1614,9	1617,8	1620,7	1623,6	1626,5	1629,4	1632,3	3,82
596	1593,2	1596,1	1599,0	1601,9	1604,8	1607,7	1610,6	1613,5	1616,4	1619,3	1622,2	1625,1	1628,0	1630,9	1633,8	1636,7	3,85
595	1597,6	1600,5	1603,4	1606,3	1609,2	1612,1	1615,0	1617,9	1620,8	1623,7	1626,6	1629,5	1632,4	1635,3	1638,2	1641,1	3,87
594	1602,0	1604,9	1607,8	1610,7	1613,6	1616,5	1619,4	1622,3	1625,2	1628,1	1631,0	1633,9	1636,8	1639,7	1642,6	1645,5	3,90
593	1606,4	1609,3	1612,2	1615,1	1618,0	1620,9	1623,8	1626,7	1629,6	1632,5	1635,4	1638,3	1641,2	1644,1	1647,0	1649,9	3,92
592	1610,8	1613,7	1616,6	1619,5	1622,4	1625,3	1628,2	1631,1	1634,0	1636,9	1639,8	1642,7	1645,6	1648,5	1651,4	1654,3	3,95
591	1615,2	1618,1	1621,0	1623,9	1626,8	1629,7	1632,6	1635,5	1638,4	1641,3	1644,2	1647,1	1650,0	1652,9	1655,8	1658,7	3,97
590	1619,6	1622,5	1625,4	1628,3	1631,2	1634,1	1637,0	1639,9	1642,8	1645,7	1648,6	1651,5	1654,4	1657,3	1660,2	1663,1	4,00
589	1624,0	1626,9	1629,8	1632,7	1635,6	1638,5	1641,4	1644,3	1647,2	1650,1	1653,0	1655,9	1658,8	1661,7	1664,6	1667,5	4,02
588	1628,4	1631,3	1634,2	1637,1	1640,0	1642,9	1645,8	1648,7	1651,6	1654,5	1657,4	1660,3	1663,2	1666,1	1669,0	1671,9	4,05
587	1632,8	1635,7	1638,6	1641,5	1644,4	1647,3	1650,2	1653,1	1656,0	1658,9	1661,8	1664,7	1667,6	1670,5	1673,4	1676,3	4,07
586	1637,2	1640,1	1643,0	1645,9	1648,8	1651,7	1654,6	1657,5	1660,4	1663,3	1666,2	1669,1	1672,0	1674,9	1677,8	1680,7	4,10
585	1641,6	1644,5	1647,4	1650,3	1653,2	1656,1	1659,0	1661,9	1664,8	1667,7	1670,6	1673,5	1676,4	1679,3	1682,2	1685,1	4,12
584	1646,0	1648,9	1651,8	1654,7	1657,6	1660,5	1663,4	1666,3	1669,2	1672,1	1675,0	1677,9	1680,8	1683,7	1686,6	1689,5	4,15
583	1650,4	1653,3	1656,2	1659,1	1662,0	1664,9	1667,8	1670,7	1673,6	1676,5	1679,4	1682,3	1685,2	1688,1	1691,0	1693,9	4,17
582	1654,8	1657,7	1660,6	1663,5	1666,4	1669,3	1672,2	1675,1	1678,0	1680,9	1683,8	1686,7	1689,6	1692,5	1695,4	1698,3	4,20
581	1659,2	1662,1	1665,0	1667,9	1670,8	1673,7	1676,6	1679,5	1682,4	1685,3	1688,2	1691,1	1694,0	1696,9	1699,8	1702,7	4,22
580	1663,6	1666,5	1669,4	1672,3	1675,2	1678,1	1681,0	1683,9	1686,8	1689,7	1692,6	1695,5	1698,4	1701,3	1704,2	1707,1	4,25
579	1668,0	1670,9	1673,8	1676,7	1679,6	1682,5	1685,4	1688,3	1691,2	1694,1	1697,0	1699,9	1702,8	1705,7	1708,6	1711,5	4,27
578	1672,4	1675,3	1678,2	1681,1	1684,0	1686,9	1689,8	1692,7	1695,6	1698,5	1701,4	1704,3	1707,2	1710,1	1713,0	1715,9	4,30
577	1676,8	1679,7	1682,6	1685,5	1688,4	1691,3	1694,2	1697,1	1700,0	1702,9	1705,8	1708,7	1711,6	1714,5	1717,4	1720,3	4,32
576	1681,2	1684,1	1687,0	1689,9	1692,8	1695,7	1698,6	1701,5	1704,4	1707,3	1710,2	1713,1	1716,0	1718,9	1721,8	1724,7	4,35
575	1685,6	1688,5	1691,4	1694,3	1697,2	1700,1	1703,0	1705,9	1708,8	1711,7	1714,6	1717,5	1720,4	1723,3	1726,2	1729,1	4,37
574	1690,0	1692,9	1695,8	1698,7	1701,6	1704,5	1707,4	1710,3	1713,2	1716,1	1719,0	1721,9	1724,8	1727,7	1730,6	1733,5	4,40
573	1694,4	1697,3	1700,2	1703,1	1706,0	1708,9	1711,8	1714,7	1717,6	1720,5	1723,4	1726,3	1729,2	1732,1	1735,0	1737,9	4,42
572	1698,8	1701,7	1704,6	1707,5	1710,4	1713,3	1716,2	1719,1	1722,0	1724,9	1727,8	1730,7	1733,6	1736,5	1739,4	1742,3	4,45
571	1703,2	1706,1	1709,0	1711,9	1714,8	1717,7	1720,6	1723,5	1726,4	1729,3	1732,2	1735,1	1738,0	1740,9	1743,8	1746,7	4,47
570	1707,6	1710,5	1713,4	1716,3	1719,2	1722,1	1725,0	1727,9	1730,8	1733,7	1736,6	1739,5	1742,4	1745,3	1748,2	1751,1	4,50
569	1712,0	1714,9	1717,8	1720,7	1723,6	1726,5	1729,4	1732,3	1735,2	1738,1	1741,0	1743,9	1746,8	1749,7	1752,6	1755,5	4,52
568	1716,4	1719,3	1722,2	1725,1	1728,0	1730,9	1733,8	1736,7	1739,6	1742,5	1745,4	1748,3	1751,2	1754,1	1757,0	1759,9	4,55
567	1720,8	1723,7	1726,6	1729,5	1732,4	1735,3	1738,2	1741,1	1744,0	1746,9	1749,8	1752,7	1755,6	1758,5	1761,4	1764,3	4,57
566	1725,2	1728,1	1731,0	1733,9	1736,8	1739,7	1742,6	1745,5	1748,4	1751,3	1754,2	1757,1	1760,0	1762,9	1765,8	1768,7	4,60
565	1729,6	1732,5	1735,4	1738,3	1741,2	1744,1	1747,0	1749,9	1752,8	1755,7	1758,6	1761,5	1764,4	1767,3	1770,2	1773,1	4,62
564	1734,0	1736,9	1739,8	1742,7	1745,6	1748,5	1751,4	1754,3	1757,2	1760,1	1763,0	1765,9	1768,8	1771,7	1774,6	1777,5	4,65
563	1738,4	1741,3	1744,2	1747,1	1750,0	1752,9	1755,8	1758,7	1761,6	1764,5	1767,4	1770,3	1773,2	1776,1	1779,0	1781,9	4,67
562	1742,8	1745,7	1748,6	1751,5	1754,4	1757,3	1760,2	1763,1	1766,0	1768,9	1771,8	1774,7	1777,6	1780,5	1783,4	1786,3	4,70
561	1747,2	1750,1	1753,0	1755,9	1758,8	1761,7	1764,6	1767,5	1770,4	1773,3	1776,2	1779,1	1782,0	1784,9	1787,8	1790,7	4,72
560	1751,6	1754,5	1757,4	1760,3	1763,2	1766,1	1769,0	1771,9	1774,8	1777,7	1780,6	1783,5	1786,4	1789,3	1792,2	1795,1	4,75
559	1756,0	1758,9	1761,8	1764,7	1767,6	1770,5	1773,4	1776,3	1779,2	1782,1	1785,0	1787,9	1790,8	1793,7	1796,6	1799,5	4,77
558	1760,4	1763,3	1766,2	1769,1	1772,0	1774,9	1777,8	1780,7	1783,6	1786,5	1789,4	1792,3	1795,2	1798,1	1801,0	1803,9	4,80
557	1764,8	1767,7	1770,6	1773,5	1776,4	1779,3	1782,2	1785,1	1788,0	1790,9	1793,8	1796,7	1799,6	1802,5	1805,4	1808,3	4,82
556	1769,2	1772,1	1775,0	1777,9	1780,8	1783,7	1786,6	1789,5	1792,4	1795,3	1798,2	1801,1	1804,0	1806,9	1809,8	1812,7	4,85
555	1773,6	1776,5	1779,4	1782,3	1785,2	1788,1	1791,0	1793,9	1796,8	1799,7	1802,6	1805,5	1808,4	1811,3	1814,2	1817,1	4,87
554	1778,0	1780,9	1783,8	1786,7	1789,6	1792,5	1795,4	1798,3	1801,2	1804,1	1807,0	1809,9	1812,8	1815,7	1818,6	1821,5	4,90
553	1782,4	1785,3	1788,2	1791,1	1794,0	1796,9	1799,8	1802,7	1805,6	1808,5	1811,4	1814,3	1817,2	1820,1	1823,0	1825,9	4,92
552	1786,8	1789,7	1792,6	1795,5	1798,4	1801,3	1804,2	1807,1	1810,0	1812,9	1815,8	1818,7	1821,6	1824,5	1827,4	1830,3	4,95
551	1791,2	1794,1	1797,0	1799,9	1802,8	1805,7	1808,6	1811,5	1814,4	1817,3	1820,2	1823,1	1826,0	1828,9	1831,8	1834,7	4,97
550	1795,6	1798,5	1801,4	1804,3	1807,2	1810,1	1813,0	1815,9	1818,8	1821,7	1824,6	1827,5	1830,4	1833,3	1836,2	1839,1	5,00
549	1800,0	1802,9	1805,8	1808,7	1811,6	1814,5	1817,4	1820,3	1823,2	1826,1	1829,0	1831,9	1834,8	1837,7	1840,6	1843,5	5,02
548	1804,4	1807,3	1810,2	1813,1	1816,0	1818,9	1821,8	1824,7	1827,6	1830,5	1833,4	1836,3	1839,2	1842,1	1845,0	1847,9	5,05
547	1808,8	1811,7	1814,6	1817,5	1820,4	1823,3	1826,2	1829,1	1832,0	1834,9	1837,8	1840,7	1843,6	1846,5	1849,4	1852,3	5,07
546	1813,2	1816,1	1819,0	1821,9	1824,8	1827,7	1830,6	1833,5	1836,4	1839,3	1842,2	1845,1	1848,0	1850,9	1853,8	1856,7	5,10
545	1817,6	1820,5	1823,4	1826,3	1829,2	1832,1	1835,0	1837,9	1840,8	1843,7	1846,6	1849,5	1852,4	1855,3	1858,2	1861,1	5,12
544	1822,0	1824,9	1827,8	1830,7	1833,6	1836,5	1839,4	1842,3	1845,2	1848,1	1851,0	1853,9	1856,8	1859,7	1862,6	1865,5	5,15
543	1826,4	1829,3	1832,2	1835,1	1838,0	1840,9	1843,8	1846,7	1849,6	1852,5	1855,4	1858,3	1861,2	1864,1	1867,0	1869,9	5,17
542	1830,8	1833,7	1836,6	1839,5	1842,4	1845,3	1848,2	1851,1	1854,0	1856,9	1859,8	1862,7	1865,6	1868,5	1871,4	1874,3	5,20
541	1835,2	1838,1	1841,0	1843,9	1846,8	1849,7	1852,6	1855,5	1858,4	1861,3	1864,2	1867,1	1870,0	1872,9	1875,8	1878,7	5,22
540	1839,6	1842,5	1845,4	1848,3	1851,2	1854,1	1857,0	1859,9	1862,8	1865,7	1868,6	1871,5	1874,4	1877,3	1880,2	1883,1	5,25

TABLE de correction pour la latitude.

LATITUDE.	CORRECTION.
0°	+ $\frac{1}{352}$ de la hauteur calculée.
5	+ $\frac{1}{358}$
10	+ $\frac{1}{375}$
15	+ $\frac{1}{407}$
20	+ $\frac{1}{460}$
25	+ $\frac{1}{548}$
30	+ $\frac{1}{705}$
35	+ $\frac{1}{1030}$
40	+ $\frac{1}{2030}$
45	0
50	— $\frac{1}{2030}$
55	— $\frac{1}{1030}$
60	— $\frac{1}{705}$
65	— $\frac{1}{548}$
70	— $\frac{1}{460}$
75	— $\frac{1}{407}$
80	— $\frac{1}{375}$
85	— $\frac{1}{358}$
90	— $\frac{1}{352}$

Depuis l'équateur jusqu'au 45e. degré de latitude, la correction doit être *ajoutée* à la différence de niveau calculée. Depuis le 45e. degré de latitude jusqu'au pôle, elle doit être *retranchée*.

GNOMONIQUE,

OU

THÉORIE DES CADRANS SOLAIRES.

Par M. BERROYER, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques au collège de Sens.

Notions préliminaires.

1. LA Gnomonique est l'art de construire sur une surface le plus ordinairement immobile et donnée, l'instrument astronomique connu sous le nom de CADRAN.

2. L'objet qu'on se propose étant la recherche de l'heure solaire, l'instrument devra indiquer d'une manière commode, et à chaque instant, la distance du soleil au méridien. Cette distance, étant connue, suffira pour la détermination de l'heure, pourvu, toutefois qu'on suppose le mouvement apparent du soleil, exactement uniforme, circulaire et parallèle à l'équateur pendant la durée d'un même jour. Cette triple hypothèse servira de base à tout ce qui va suivre.

3. Pour remplir complètement l'objet que je viens d'indiquer, on se sert communément d'une verge cylindrique, que j'appellerai l'*axe du cadran*, et qui projète son ombre sur les surfaces environnantes. Le plan mené par l'axe et par son ombre contient à chaque instant le centre du soleil; et ce centre, représenté par S dans la *fig.* 1re., se trouve toujours sur le prolongement de la ligne droite qui joint un point quelconque de l'axe avec l'ombre de

ce point. Si l'on dirige l'axe du cadran perpendiculairement à l'équateur, on peut, à cause de la petitesse de la terre, supposer qu'il se confond avec l'axe du mouvement diurne. Alors le plan mené à chaque instant par le soleil et par l'ombre, sera un plan horaire, et tournera comme cet astre autour de l'axe, par l'effet du mouvement diurne du ciel. Il ne s'agira donc plus que de savoir prévoir et tracer pour les différentes heures du jour, les intersections de ce plan horaire mobile, avec les surfaces sur lesquelles on veut tracer des cadrans. Car ces intersections n'étant autre chose que l'ombre même, cette ombre reviendra s'y projeter, tous les jours, de la même manière et à la même heure, puisqu'alors le soleil sera revenu dans le même plan horaire, quoique à des distances différentes de l'équateur. On verra qu'il est toujours possible de parvenir à cette disposition, et de marquer ainsi les lignes d'ombre sur des surfaces qui permettent de les tracer correctement.

4. Quand ce problème fondamental sera résolu, on connaîtra bien la direction de l'ombre, à partir de la racine de l'axe; mais sa longueur, dans les diverses saisons de l'année, et la nature de la courbe qu'elle décrit chaque jour par son extrémité, sont encore deux objets de recherche, qui appartiennent à la gnomonique.

5. C'est l'axe qui est le premier objet dont il faut s'occuper. Son usage lui donne quelqu'analogie avec le gnomon, dont on a dérivé le nom que porte l'art de construire les cadrans. Mais, dans les cadrans, la direction de l'axe tend nécessairement vers le pôle de l'équateur; car cette disposition est la seule dans laquelle le plan mené par le soleil et par l'ombre, puisse devenir un plan horaire. C'est par conséquent la seule qui puisse ramener toujours l'ombre sur la même trace aux mêmes heures

du jour, quelle que soit la forme de la surface sur laquelle on l'a une fois tracée.

6. Avant de quitter les considérations générales, pour s'occuper des procédés particuliers relatifs à la construction des différentes espèces de cadrans, il convient de se faire une idée du degré d'exactitude qu'on peut attendre de cet instrument, dans la détermination de l'heure solaire. D'abord, puisqu'il s'obtient par une construction graphique, on conçoit qu'il n'en faut pas attendre une précision astronomique, mais seulement une approximation suffisante pour les usages de la société. Or en négligeant les erreurs de l'observation, la théorie qu'on développera dans le cours de ce Traité, est d'une géométrie simple et rigoureuse. Ainsi les autres erreurs ne pourraient provenir que des suppositions qu'on a prises pour base, et d'après lesquelles on admet en principe 1°. la parfaite uniformité du mouvement apparent du soleil, 2°. le parallélisme à l'équateur, et la courbure exactement circulaire du cours de cet astre pendant une révolution diurne.

7. De même qu'une pendule qui marche sans aucun dérangement d'un solstice à l'autre, représente la révolution d'un astre imaginaire dont le mouvement est uniforme, et qui se considère en astronomie sous le nom de soleil moyen; de même les CADRANS sont disposés pour recevoir les ombres projetées par un soleil moyen qui, commençant et achevant sa révolution avec le vrai soleil, parcourrait, dans l'intervalle d'un demi-jour, des arcs égaux en tems égaux, sur des cercles parallèles à l'équateur. Dans toutes les positions où l'astre fictif s'écarte du soleil véritable, l'observation faite au moyen du cadran, est nécessairement inexacte; et cette erreur est inévitable; car les écarts des deux soleils étant variables d'un jour à l'autre, ne peuvent pas être représentés ni

corrigés sur un instrument qui, de sa nature est immobile, et dont la forme est invariable.

8. La durée des révolutions solaires, ou le tems pendant lequel l'ombre pourrait décrire 360° sexagésimaux autour de l'axe, si le soleil était toujours sur l'horison, varie depuis $23^h.59'.40''$ environ jusqu'à $24^h.0'.30''$ de tems moyen. Cette différence, déja très-petite, d'une limite à la limite opposée, n'est que de quelques dixièmes de seconde, entre deux jours consécutifs; en sorte qu'on peut conclure de la presqu'égalité des tems écoulés pendant deux révolutions qui se suivent, que des arcs égaux sont parcourus par le soleil dans un même jour en tems sensiblement égaux. L'heure solaire sera donc bien représentée par un arc de $\frac{360}{24}$ ou de 15 degrés décrits autour de l'axe par le plan horaire, pourvu toutefois qu'on n'entende pas par le mot *heure solaire*, une durée constante, mais la vingt-quatrième partie du tems de la révolution diurne du soleil.

9. Les inégalités réelles du mouvement du soleil ne nuisent ainsi que très-peu à l'exactitude d'un cadran bien fait. Mais les inégalités apparentes qui résultent de la réfraction et de la parallaxe, et qui élèvent inégalement le soleil aux différentes heures du jour et dans les différentes saisons de l'année, sont des causes d'erreurs, dont l'effet variable ne peut s'éviter dans la construction des cadrans. Pour les corriger, il faudrait recourir aux méthodes rigoureuses expliquées dans le Traité d'astronomie, où l'on a enseigné le moyen de calculer ces effets pour chaque instant, pour chaque degré de déclinaison du soleil, et même pour les différens degrés de température et de pression atmosphérique. Mais ces corrections sont inutiles à considérer dans la gnomonique, à cause du peu d'exactitude des observations. Qu'il suffise de remarquer ici que ces

causes d'erreur n'ont que très-peu d'influence sur les heures qui approchent le plus de midi, et qu'elles n'en ont point du tout sur l'instant du midi même. De sorte que les heures les plus favorables à la justesse des observations, sont aussi celles où il est le plus ordinaire et le plus naturel de faire usage des cadrans solaires.

10. Pour ne rien omettre, il faut remarquer encore que le mouvement apparent du soleil n'est pas exactement représenté, comme on le suppose dans cette théorie, par des cercles parallèles à l'équateur et qui s'en éloignent chaque jour du nombre de degrés de déclinaison que les tables indiquent pour midi. Ce mouvement ne serait fidèlement représenté que par un filet de vis à pas inégaux et roulé autour d'une zône sphérique. Mais si l'on n'attache d'importance qu'aux arcs qui s'étendent médiocrement en deça et au-delà de midi, ce qui manque à leur courbure pour être circulaires est tout-à-fait insensible. Quant à la différence de déclinaison qui peut exister entre une de leurs extrémités et l'autre, les formules qui seront proposées permettront d'en tenir compte. Mais dans ce qui suit, on supposera toujours que le lecteur a pris le parti de négliger ces différences, qui ne peuvent être que très-petites dans les arcs que l'on considère, puisqu'elles ne s'élèvent qu'à 4′ pour une révolution entière, même aux instans des équinoxes, où le mouvement en déclinaison est le plus rapide.

Construction des cadrans.

ARTICLE PREMIER.

Manière de poser l'axe.

11. Je suppose d'abord que celui qui s'occupe de cette opération, a les connaissances pratiques nécessaires pour disposer un plan bien horisontal et bien dressé, et pour y tracer une ligne méridienne scrupuleusement exacte (*). Je dirai seulement que dans la gnomonique pour vérifier une méridienne, ou même pour la tracer, on se contente souvent de l'observation du pôle, faite au moyen d'un cercle de métal, ou de bois bien plan, et suspendu avec assez de liberté pour que son poids le tienne vertical, dans tous les azimuths où on le tourne. Alors on attend que l'on voie passer au méridien deux étoiles qui ont la même ascension droite, ou dont les ascensions droites diffèrent de 180°. A cet instant on dirige l'instrument de manière qu'il contienne dans son plan les deux étoiles, sans cesser d'être vertical. Ce plan devient ainsi le méridien lui-même. En effet il contient le pôle puisqu'il se confond avec le cercle de déclinaison de deux étoiles; il contient le zénith, puisque, par sa nature, il reste toujours vertical.

12. Les étoiles qui servent ordinairement à cet usage, sont la polaire et la première, ε, de la queue de la grande ourse. Leurs ascensions droites moyennes au commencement de 1811 sont;

1°. Pour ε	191°.25′. 3″
2°. Pour la polaire	13 .41 .41
Différence.	177°.43′.22″

(*) *Voy.* Astronomie physique, liv. Ier., chap. V, no. 56 et suiv.

La différence n'est pas tout-à-fait égale à 180° ; et l'on voit qu'il faudrait, pour l'exactitude, que la polaire eût 2°.16.38″ de moins en ascension droite. Mais cet arc, dont elle est trop avancée dans son petit cercle, n'est vu que sous un angle d'à-peu-près 4′, ce qui peut se négliger dans ce genre d'observation. Le 261° d'ascension droite offre deux étoiles très-propres à remplir le même objet. On les trouve facilement, à l'aide d'une sphère céleste et du catalogue inséré dans la Connaissance des tems : elles y sont désignées sous les noms de α d'Ophiucus, et ζ du Dragon. Leurs positions moyennes, à l'époque du 1er. janvier 1811, sont

	Ascension droite.	*Déclinaison.*
α d'Ophiucus. . .	261°.32′,26″	12°.42′,29″. Bor.
β du Dragon. . .	261°.32′,33″	52°.26′,47″. Bor.

On voit qu'ayant presque exactement la même ascension droite, elles diffèrent de 40° en déclinaison. Ce grand éloignement les rend très-propres à déterminer le plan du méridien, au moyen des observations que nous venons d'indiquer.

13. Quelle que soit au reste la méthode qu'on ait choisie pour tracer la méridienne sur le plan horisontal, on a dû s'établir dans le voisinage de la surface sur laquelle on veut tracer le cadran, et l'on a dû se placer de manière qu'un plan vertical, élevé sur cette méridienne vînt couper le cadran au point où l'on veut planter l'axe. Pour fixer les idées, je prendrai l'exemple familier d'une muraille verticale, dressée soigneusement, et vérifiée avec la règle et le fil à-plomb. Quand cet exemple sera bien entendu, les modifications qu'il faudra faire aux procédés qui vont être indiqués, se présenteront d'elles-mêmes pour chaque cas particulier. Soit donc *BC* la méridienne (*fig.* 2)

tracée sur une table horisontale ; $t\ n$, $s\ q$ deux fils à-plomb qui descendent librement sur cette ligne et qui sont fixés sur une perche transversale, assurée dans la position convenable, par deux étais entre lesquels l'œil peut se placer et reconnaître sur le mur la ligne $A\ M$, suivant laquelle la surface du cadran est coupée par le plan des fils, qui n'est autre chose que le méridien (*). Maintenant, si c'est en A qu'on veut planter l'axe, il sera commode de faire construire une équerre $A\ C\ R$ en bois dur, de même épaisseur que la verge $A\ C$, et de la faire sceller solidement au point A, si, comme dans l'exemple actuel, la pointe de l'axe se dirige vers le pôle austral ; ou au point C, si, comme dans les cadrans horisontaux, l'axe se dirige, du point où il touche le cadran, vers le pôle boréal. Dans l'un et l'autre cas il faudra que la branche $A\ R$ soit maintenue bien horisontale pendant qu'on la scelle, l'équerre restant d'ailleurs exactement dans le plan des fils, c'est-à-dire dans le méridien qu'on bornoiera pendant toute l'opération. L'équerre qui n'a d'autre objet que d'entretenir l'axe dans la situation convenable pendant qu'on le scelle, doit présenter au milieu de la largeur des faces intérieures de ses branches, deux trous très-peu profonds A, C, propres à recevoir les pointes qui terminent les deux extrémités de la verge.

Supposant ces trous bien placés, l'axe se trouvera nava-

(*) Si la table est de bois, il y aura de l'avantage à la faire percer aux points n et q, afin que les plombs puissent descendre à-peu-près jusqu'à terre. Ils y seront reçus dans des vases pleins d'eau, où ils oscilleront beaucoup moins ; et leur forme, ainsi que la manière dont ils seront suspendus, deviendront alors indifférentes au succès de l'observation. L'œil pourra d'ailleurs vérifier plus sûrement si les deux fils sont bien dans un même plan avec la ligne BC.

riablement fixé dans la position où il doit rester, et l'opération d'en faire le scellement dans le trou préparé au point O, s'achevera facilement sans rien déranger. Il est inutile de dire qu'il ne reste plus qu'à scier la branche AR au point A, mais il faut encore expliquer comment on a dû déterminer les deux points A et C de l'équerre. Or, rien n'est plus simple, car le triangle ARC est formé de trois lignes qui sont respectivement, la verticale CR, l'horisontale AR dans le méridien; et l'axe AC du cadran pris pour axe du mouvement diurne. L'angle R est droit, l'angle C est complément de la latitude du lieu, et l'angle A la latitude elle-même. En effet ce dernier angle est égal à son opposé HAP, lequel est évidemment la hauteur du pôle, étant compris entre les prolongemens derrière le mur, de l'horisontale AR et de l'axe AC. Tout se réduit donc à prendre arbitrairement la longueur AC, et à résoudre un triangle rectangle dont les angles sont connus. Ce triangle donne $RC = AC \sin A$, $RA = AC \cos A$.

Comme l'extrémité de l'ombre portée par la pointe de l'axe AC, est toujours confuse et mal terminée, à cause de la pénombre qui l'accompagne, on a soin, dans les cadrans bien faits, de terminer l'axe par une plaque métallique, percée à son centre d'un trou circulaire pour laisser passer l'image du soleil. Le plan de la plaque doit être dans le prolongement de l'axe; et ainsi il devient perpendiculaire à l'équateur, quand l'axe est convenablement dirigé vers le pôle. Enfin quelquefois on supprime tout-à-fait l'axe; on ne conserve que la plaque circulaire, seule pièce essentielle du cadran, et on la fait supporter par des barres de fer scellées dans la muraille et qui lui servent d'appui (voy. *fig.* 3). Le procédé pratique que nous avons indiqué pour placer l'axe, servira aussi dans ces derniers cas pour disposer convenablement

l'axe imaginaire et la plaque qui le termine. Mais chacun pourra modifier cette opération manuelle de la manière la plus conforme aux moyens dont il peut disposer et à l'adresse des ouvriers qu'il emploie.

Je ferai seulement remarquer que lorsqu'on se sert d'une plaque, le centre de l'image lumineuse projetée sur le cadran, se trouve toujours sur le prolongement du rayon lumineux qui passe par les centres du soleil et de l'ouverture circulaire. Au lieu que lorsqu'on emploie un axe, l'extrémité de l'ombre se trouve sur le prolongement du rayon lumineux qui passe par la pointe de l'axe et par le bord du soleil le plus voisin du pôle boréal de l'équateur, du moins dans nos climats septentrionaux.

Lorsqu'on est suffisamment pourvu d'instrumens, toute la gnomonique se réduit à l'opération fondamentale de poser l'axe. En effet, si on le suppose bien placé, un chronomètre dont on connaît exactement la marche, suffit pour indiquer avec exactitude les positions successives de l'ombre, qui correspondent aux heures qu'on veut que le cadran indique. On n'a donc plus qu'à tracer ces lignes horaires au moment précis que la montre détermine, et l'on a ainsi un cadran décrit par la méthode la plus simple, la plus exacte et en même tems la plus générale, puisqu'elle s'applique indifféremment à toutes les surfaces quelle que soit leur forme et leur situation.

14. Dans ce qui précède, la latitude est employée comme un élément connu, parce que le grand usage qu'on en fait dans d'autres parties de l'astronomie, a obligé d'expliquer ailleurs la manière de l'obtenir. Si cependant on voulait observer la latitude par des moyens suffisans pour la gnomonique, et qui n'exigeassent pas plus d'instrumens que ses autres opérations, on pourrait planter sur la ligne méridienne *BC* (*fig.* 4) un gno-

mon *GH* portant une plaque percée d'un très-petit trou à son centre. Prenant pour base l'observation du midi, le jour du solstice d'été, par exemple, afin d'écarter les causes d'erreurs autant qu'il est possible, on mesurerait exactement le gnomon *GH* et son ombre *KG*. Ces deux longueurs suffiraient pour que dans le triangle rectangle *KGH*, on pût calculer l'angle *KHG* ou son opposé *ZHS*, distance solsticiale du soleil au zénith ; et cet angle ajouté à l'obliquité de l'écliptique *EHS*, donnera la latitude du lieu. Si l'on avait fait cette observation tout autre jour que le jour du solstice, ce serait la déclinaison du soleil à midi qu'il faudrait prendre pour la valeur de l'angle *EHS* au lieu de l'obliquité de l'écliptique ; et cet angle devrait être soustrait de *KHG* ou *ZHS* si le soleil était austral.

Les détails dans lesquels on vient d'entrer, faisant disparaître toute difficulté relative à la pose de l'axe, les problèmes ne consisteront plus qu'à dessiner les lignes d'ombre correspondantes aux différentes heures ; et dans tout ce qui suit, on considérera l'axe comme donné et existant avant le tracé.

15. Cela posé, la gnomonique plane se divisera naturellement en deux parties : dans la première, il sera question d'opérer sur un plan disposé de la manière la plus avantageuse pour recevoir l'ombre de l'axe : dans la seconde, il s'agira d'un plan situé d'une manière quelconque, mais dont la position tient à des circonstances auxquelles on ne peut rien changer. Les cadrans réguliers formeront ainsi une première classe dont il faudra s'occuper d'abord.

Cadrans réguliers.

ARTICLE II.

Cadran équatorial à deux faces.

16. La manière la plus naturelle de disposer un plan autour de l'axe, c'est de l'établir perpendiculairement sur le milieu de ce même axe, de manière que celui-ci puisse projeter son ombre sur les deux surfaces. Pour réaliser cette disposition dans la pratique, il faut d'abord soutenir le plan par des appuis mobiles, qui permettent de le placer perpendiculairement autour de l'axe qui le pénètre, après quoi on enlève les appuis et les deux surfaces demeurent libres lorsque le plan a été amené et fixé dans cette position.

Au moyen de sa perpendicularité sur l'axe, le plan se confond avec l'équateur; et le demi-axe dirigé vers le pôle boréal, projète son ombre sur la face du cadran, qui se trouve éclairée pendant que le soleil est boréal. L'autre face du cadran qui regarde le pôle austral sert pendant les six autres mois de l'année. Ces deux sortes de constructions étant symétriques, il suffit d'examiner ce qui arrive pendant l'une des deux demi-années.

17. Pour cela considérons l'instrument comme placé au centre de la sphère céleste; ce qui ne change rien aux apparences, puisque dans toute la gnomonique nous regardons la terre comme un point. Alors le cercle *IIII'N* (*fig.* 5) décrit sur la surface plane du cadran, représentera l'équateur; et la droite *AC* sera l'axe du mouvement diurne. Si *S*, *S'*, *S''* sont des positions successives du soleil sur son parallèle, positions éloignées les unes des autres d'une heure sexagésimale, les plans *SCAII*, *SCAH'*, menés par cet astre et par l'axe seront des plans horaires dont les angles

dièdres auront pour mesure les arcs de l'équateur compris entre eux. Ces arcs, tels que HH', $H'H''$ seront chacun de 15°. De plus on connaîtra la ligne de midi, représentée ici par $AXII$. Elle sera déterminée par les deux fils à-plomb qui auront servi à placer le cadran. Alors, si l'on tire, à sa droite et à sa gauche, des lignes qui fassent avec elle des angles de 15°, 30° etc., ce seront les lignes des différentes heures du jour. On voit assez que tout se réduit à diviser la circonférence d'un cercle, décrit du centre A, en vingt-quatre parties égales. Cette construction est si simple qu'on ne s'y arrêterait pas davantage, si l'utilité dont elle sera dans la suite n'engageait à la traduire en langage algébrique.

18. Prenons le plan du cadran équatorial pour celui des x, y; choisissons pour axe des x positives la ligne $AXII$ dirigée vers le point le plus bas du cadran; et pour axe des y positives, la ligne AY dirigée vers l'est; nommons E l'angle horaire $HAXII$ formé par la trace de l'ombre avec la ligne de midi; cela posé, l'équation d'une *ligne horaire*, telle que AH, sera

$$y = x \text{ tang } E,$$

y et x étant variables dans la même ligne, et l'angle E variant d'une ligne à l'autre. On emploiera souvent cette équation parce que c'est celle de la trace des plans horaires sur l'équateur, trace d'autant plus importante à considérer que, d'après le choix qu'on a fait de ce grand cercle pour plan des xy, l'équation qui la donne, représente en même tems le plan horaire lui-même, par la raison qu'il s'élève sur elle perpendiculairement à l'équateur, en passant par l'axe du cadran pris pour celui des z. (*Voyez* Essais de géométrie analytique, n°. 58).

19. Jusqu'ici nous n'avons point considéré la hauteur

du soleil sur l'équateur, parce que cet élément n'influe que sur la grandeur du parallèle, et nullement sur la direction des lignes horaires ; mais si l'on demande la longueur de ces lignes pour une déclinaison donnée δ, il faudra la tirer de la résolution des triangles CHA, où l'angle H est égal à la déclinaison du soleil. Soit z' la longueur constante et arbitraire de l'axe qui est représenté par AC dans la figure ; nommons ρ la longueur AH de la ligne horaire, on aura

$$\rho = z' \cot \delta.$$

Cette équation où ρ est constant pour un jour donné, et variable quand la déclinaison change, exprime, pour chaque jour de la demi-année, le rayon du cercle particulier, à la circonférence duquel se terminent les ombres.

La déclinaison étant nulle dans les équinoxes, on a pour cette époque $\rho = \frac{1}{0}$, et le soleil compris dans le plan du cadran n'en éclaire nettement ni l'une ni l'autre face.

Dans la figure, nous avons supposé la pointe de l'axe dirigée vers le pôle boréal de l'équateur. Ainsi nous avons considéré la surface du cadran qui est tournée vers le nord, et qui sert quand la déclinaison du soleil est boréale. Pour avoir le cadran tracé sur l'autre face, il faudrait supposer la pointe de l'axe tournée vers le sud, c'est-à-dire, faire z' négatif ; on aurait alors

$$\rho = -z' \cot \delta,$$

Cette face servirait pour les déclinaisons australes. Mais il faudrait aussi prendre δ négatif, puisqu'on l'a supposé positif au nord de l'équateur. De cette manière on voit que des déclinaisons australes ou boréales, égales entre elles, donneront des valeurs égales de ρ. Il est bon de remarquer l'effet du changement de signe de z', il nous sera utile par la suite.

Cadran horisontal.

20. Pour traduire en analyse les constructions des différens cadrans, nous avons déja fait choix d'un plan des xy; c'est celui du cadran équatorial ou l'équateur. Maintenant par la ligne du midi de ce cadran, que nous avons choisie pour axe des x, et qui se trouve représentée par AX dans la *fig.* 6, menons un plan XAZ qui soit perpendiculaire à l'équateur. Ce plan sera le méridien, et nous le prendrons pour plan des xz. Alors le plan des yz, représenté par YAZ, devant être perpendiculaire aux deux autres, coupera la ligne AX à angle droit au point A. On pourra l'appeler plan de six heures, et son intersection AZ avec le méridien sera l'axe des z, qui est en même tems l'axe du cadran et du mouvement diurne. Tout cela convenu, si l'on propose de tracer un cadran sur le plan horisontal YAM, qui passe par le point A, il faudra considérer d'abord que ce plan est perpendiculaire au méridien XAZ, et que par conséquent son équation n'est autre chose que celle de sa trace sur le plan des xz. Cette trace AM, qui est une ligne horisontale menée dans le méridien, fait avec l'axe AC un angle égal à la hauteur du pôle sur l'horison, ou à la latitude du lieu, que nous nommerons λ. L'équation du plan horisontal, rapporté aux coordonnées équatoriales x, y, z, est donc

$$[1] \ldots x = z \text{ tang } \lambda;$$

Mais le plan horaire rapporté au même système de coordonnées (*Voyez* n°. 18), est représenté par

$$[2] \ldots y = x \text{ tang } E.$$

Donc leur intersection, qui est toujours la ligne qui marque l'heure est, en yz,

$$[3] \ldots y = z \text{ tang } E \text{ tang } \lambda.$$

Cette ligne est ainsi complètement déterminée par le système des équations [1], [3], et il ne faut plus que chercher à la construire commodément sur le cadran horisontal. A cet effet, il suffit de connaître, pour chaque heure, l'angle qu'elle fait avec la ligne horisontale de midi AM, qu'on a dû tracer sur le plan horisontal, dans l'alignement des fils à-plomb qui ont servi à poser l'axe AC. Or cette ligne AM étant à-la-fois dans le méridien et dans le plan horisontal, a pour équation

$$[4] \ldots y = 0, \qquad [5] \ldots x = z \text{ tang } \lambda.$$

Les équations de ces deux droites étant ainsi connues, il est bien facile de trouver l'angle qu'elles forment entre elles.

21. Pour cela je suppose que le lecteur ait entre les mains l'Essai de géométrie analytique; et je prends comme suffisamment connue quant à la notation et à la démonstration, la formule

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\,\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Cette formule donne l'angle V formé par deux lignes dont on connaît les projections; et comme on sait que

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 V}},$$

on peut en conclure

$$\text{tang}^2 V = \frac{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}{(1 + aa' + bb')^2}.$$

Comparant terme à terme les projections pour lesquelles la formule est faite, avec [1], [3], [1], [4], on a

$$a = \text{tang}\,\lambda, \quad b = \text{tang}\,\lambda \,\text{tang}\,E, \quad a' = \text{tang}\,\lambda, \quad b' = 0;$$

donc, en appelant H les angles formés au centre du cadran horisontal par les lignes d'heures et la ligne de midi, il vient

$$\text{tang}^2 H = \frac{\text{tang}^2 E\,\text{tang}^2\lambda + \text{tang}^4\lambda\,\text{tang}^2 E}{(1+\text{tang}^2\lambda)^2}; \text{ ou bien}$$

$$\text{tang}\,H = \text{tang}\,E\,\sin\lambda$$

Dans cette expression, il ne reste plus qu'à substituer pour E les distances angulaires des différentes heures à midi, à raison de 15° par heure.

22. Au moyen de ce qui précède, on peut bien tracer les lignes cherchées puisqu'on a leur direction, mais rien encore n'indique leurs longueurs, qui sont variables à chaque instant du jour et à chaque jour de l'année. Pour procéder à cette nouvelle recherche, il faut remarquer que le premier rayon solaire qui passe librement au-dessus du sommet de l'axe, et en termine l'ombre sur le cadran, décrit un cône droit autour de ce point, pendant la révolution du soleil dans son cercle diurne. Comme l'axe de ce cône se confond avec celui des z, si nous faisons $AC = z'$, l'équation de sa surface prend la forme très-simple (*)

$$\cos SCZ = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(z-z')^2}}};$$

ou bien, en considérant que SCZ est le complément de QCS ou de la déclinaison δ, et que d'ailleurs

$$\sin\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\delta}},$$

(*) *Voy.* Géométrie analytique, n°. 86.

il vient

$$\cot^2 \delta = \frac{x^2 + y^2}{(z - z')^2},$$

z' est la longueur arbitraire de l'axe AC. La déclinaison δ doit être prise positivement dans l'une des demi-années, et négativement dans l'autre, ce qui donne les deux nappes égales de la surface conique [illegible] correspondent à deux jours également éloignés du [illegible] équinoxe.

23. La ligne qui marque l'heure [illegible] cadran horizontal, a pour projections les équations [1] et [3], et à cause de tang H = tang E sin λ la dernière devient [3] $y = \frac{z \tang H}{\cos \lambda}$. L'élimination entre les équations [1], [3] et celle du cône donnera les coordonnées des deux points où la ligne horaire ρ supposée indéfinie est coupée et terminée par la surface conique : ces coordonnées sont

$$z = \frac{z' \cot \delta \cos \lambda}{\cot \delta \cos \lambda \pm \sqrt{\sin^2 \lambda + \tang^2 [illegible]}},$$

$$x = \frac{z' \cot \delta \sin \lambda}{\cot \delta \cos \lambda \pm \sqrt{\sin^2 \lambda + \tang^2 [illegible]}},$$

$$y = \frac{z' \cot \delta \tang H}{\cot \delta \cos \lambda \pm \sqrt{\sin^2 \lambda + \tang^2 H}}.$$

En représentant par ρ la distance de l'origine A ; ou de la racine de l'axe, à un de ces points d'intersection, la valeur correspondante de ρ sera égale à

$$\sqrt{z + y^2 + z^2},$$

on aura donc

$$\rho = \frac{z'}{\cos H \cos \lambda \pm \tang \delta \sqrt{\cos^2 H \sin^2 \lambda + \sin^2 H}}.$$

Cette expression sera celle de la longueur de l'ombre à un instant quelconque, en y mettant pour H l'angle de l'heure sur le plan horisontal et pour δ la déclinaison du jour. Les deux valeurs de ρ sont inégales, et cela doit être ; car les rayons ρ partant de la racine de l'axe, qui n'est pas le centre du cône, doivent percer sa surface dans des points différens. De plus, ces deux valeurs se changent l'une dans l'autre quand δ se change en $-\delta$; elles répondent à des déclinaisons égales [illegible] de l'équateur. Il suffira donc de [illegible] seule [illegible] racines, en supposant que l'on [illegible] successivement à δ toutes les valeurs, soit positives, soit négatives, entre lesquelles varie annuellement la déclinaison du soleil. Mais, pour savoir laquelle des deux racines il faut choisir, d'après nos conventions précédentes, il n'y a qu'à considérer que la longueur de la ligne horaire ρ ne peut jamais devenir infinie *à midi*, lorsque la latitude λ et la déclinaison du soleil sont de même dénomination, c'est-à-dire, toutes deux boréales ou toutes deux australes. Car lorsque le soleil est [illegible] côté boréal de l'équateur, par exemple, il [illegible] instant de midi au-dessus des horisons de tous les peuples septentrionaux. Or la longueur de la ligne horaire pour midi se trouvera en faisant $H=0$ dans l'expression générale de ρ, et en désignant par ρ' la valeur particulière qu'elle prend alors, nos deux racines seront

$$\rho' = \frac{z' \cos \delta}{\cos (\lambda + \delta)}, \quad \text{ou bien} \quad \rho' = \frac{z' \cos \delta}{\cos (\lambda - \delta)}.$$

La première qui répond au signe — du radical est celle qu'il faut rejeter, car elle donnerait ρ' infini lorsque l'on aurait $\lambda + \delta = 90°$, ce qui arrive chaque jour pour un

des parallèles septentrionaux, lorsque le soleil est au nord de l'équateur. Il faut donc prendre l'autre signe, et alors l'expression générale de la longueur des lignes horaires sera

$$\rho = \frac{z'}{\cos H \cos\lambda + \operatorname{tang}\delta \sqrt{\cos^2 H \sin^2\lambda + \sin^2 H}};$$

l'angle horaire H sur le cadran horisontal [illegible] toujours déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang} H = \operatorname{tang} E \cdots$$

dans laquelle E désigne des [illegible] horaires [illegible] pôle.

Lorsque la latitude du lieu [illegible] australe, il faudra tourner la pointe de l'axe vers le pôle austral, et compter les angles horaires H depuis le point le plus austral du cadran ; c'est-à-dire qu'il faudra changer $+z'$ en $-z'$ et $+H$ en $180^\circ - H$, quand λ deviendra négatif.

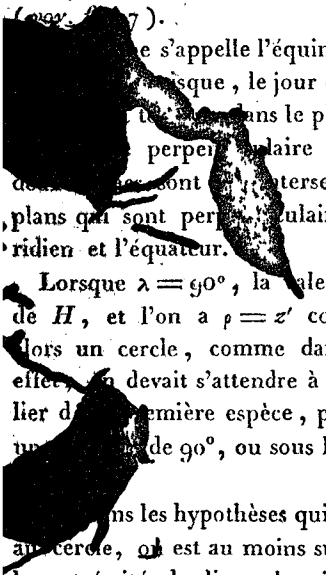
24. Si, dans cette expression, l'on ne fait varier que δ, en prenant pour H une heure constante, on aura pour toute l'année les longueurs d'ombre qui correspondent à cette heure. Si, au contraire, on ne fait varier que H, en laissant la déclinaison constante, on aura autant de points qu'on voudra de la ligne diurne décrite par l'extrémité de l'ombre. A midi solaire $H = 0$, ainsi pour toute l'année la longueur de l'ombre à cette heure est, comme nous l'avons vu tout-à-l'heure,

$$\rho' = \frac{z' \cos\delta}{\cos(\lambda - \delta)}.$$

25. Le jour de l'équinoxe, $\delta = 0$. On a donc à midi $\rho = \frac{z'}{\cos\lambda}$, et à toute autre heure $\rho = \frac{\rho}{\cos\lambda} \times \frac{1}{\cos H}$,

où, en appelant ρ' la longueur de l'ombre à midi, ...

$\rho = \frac{\rho'}{\cos H}$, équation polaire d'une ligne droite, perpendiculaire à la ligne méridienne du cadran, comme il est aisé de s'en convaincre en construisant les différens triangles qu'elle indique lorsqu'on y fait varier H (voy. fig. 7).



e s'appelle l'équinoxiale du cadran. Elle devait isque, le jour de l'équinoxe, l'extrémité de ans le plan de l'équateur. De plus elle perpe laire à la ligne de midi; car ces d sont tersections du cadran par deux plans qui sont per ulaires entre eux; savoir le méridien et l'équateur.

Lorsque $\lambda = 90°$, la aleur de ρ devient indépendante de H, et l'on a $\rho = z' \cot \delta$. La courbe diurne est alors un cercle, comme dans le cadran équatorial. En effet, on devait s'attendre à retrouver ici le cadran régulier de emière espèce, puisqu'un cadran horisontal à de 90°, ou sous le pôle, serait en même tems

ns les hypothèses qui ne conduisent ni à la ligne ni au cercle, on est au moins sûr que la courbe formée par les extrémités des lignes horaires sera une section conique, puisqu'il ne s'agit que d'intersections de cônes, par des plans. De plus, la ligne de midi est certainement l'axe de la courbe, car elle fait partie du méridien; et ce plan, qui contient l'axe du cône, partageant en deux parties égales et symétriques le solide entier, doit partager de la même manière les sections faites par des plans qui lui sont perpendiculaires, comme l'est le plan horisontal.

D'après cette considération, rien n'est plus facile que

de reconnaître dans chaque cas l'espèce de section conique représentée par l'équation

$$\rho = \frac{z'}{\cos H \cos\lambda + \operatorname{tang}\delta \sqrt{\cos^2 H \sin^2\lambda + \sin^2 H}}.$$

En effet, puisque nous savons que la ligne horaire de midi répond toujours à un sommet réel de la courbe, lorsque la déclinaison et la latitude sont de même dénomination, par exemple, toutes deux boréales, il n'y a qu'à chercher quelle est, dans les mêmes circonstances, la grandeur de la ligne horaire de minuit; car cette courbe sera finie, infinie ou imaginaire, selon que la diurne sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Or à minuit l'angle horaire H est égal à $180°$; on a donc à cet instant $\sin H = 0$, $\cos H = -1$, et par conséquent

$$\rho = \frac{-z' \cos\delta}{\cos(\lambda + \delta)},$$

ρ sera positif si $\lambda + \delta > 90°$, infini si $\lambda + \delta = 90°$, négatif si $\lambda + \delta < 90$. Dans ce dernier cas, le changement de signe indique une opposition de direction, c'est-à-dire que le second sommet de la courbe ne se trouve plus au midi de l'axe; ainsi le point correspondant à minuit est alors imaginaire. D'après cela on voit que la courbe diurne sera une ellipse quand on aura $\lambda + \delta > 90°$; ce qui ne peut arriver que dans les zônes glaciales, et seulement pendant une partie de l'année, lorsque le soleil est du côté du pôle élevé. Alors cet astre reste toujours au-dessus de l'horison. L'ellipse dégénère en une parabole lorsque $\lambda + \delta = 90°$; ce qui arrive aussi dans les zônes glaciales, mais seulement deux fois l'année pour chaque parallèle, lorsque le soleil commence ou cesse de rester constamment sur l'horison. Enfin dans tous les autres

cas, et notamment pendant toute l'année des zônes tempérées, les arcs diurnes sont hyperboliques.

27. Quoique l'objet qu'on se propose, dans la recherche de la courbe diurne, soit complètement rempli par l'équation polaire, on pourrait encore desirer d'avoir ce résultat exprimé en coordonnées rectangulaires. Pour cela, [illegible] 8) l'abscisse $AP = x'$ sur la ligne du midi, [illegible] axe de la courbe, et l'ordonnée $PM = y'$ [illegible] où aboutit le rayon vecteur $AM = \varrho$, [illegible] AP [illegible] le égal à H, on aura

$$\sin H = \frac{y'}{\varrho}, \cos H = \frac{x'}{\varrho}, \text{tang } H = \frac{y'}{x'}, \varrho = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

au moyen de ces valeurs, rien n'est plus facile que de chasser ϱ et H; cette transformation donne

$$x'^2(\text{tang}^2\delta\cos^2\lambda - \cos^2\lambda) + 2z'x'\cos\lambda + y'^2\text{tang}^2\delta - z'^2 = 0,$$

ou bien

$$x'^2\cos^2(\lambda - \delta) + 2z'x'\cos\lambda\cos^2\delta + y'^2\sin^2\delta - z'^2\cos^2\delta = 0;$$

où l'on voit aussi facilement que ci-dessus que l'ellipse, la parabole et l'hyperbole répondent aux différens cas de $(\lambda + \varrho) < 90°$, $(\lambda + \varrho) = 90°$, et $(\lambda + \delta) < 90°$.

28. On pourra se servir de ce qui précède pour établir sur le cadran horisontal, ce qui se nomme une méridienne du tems moyen. Pour cela, on prendra, dans la Connaissance des tems, l'heure solaire qui répond au midi moyen, pour un jour quelconque, et l'on tracera le rayon vecteur AM (*fig.* 8) qui répond à cette heure, en lui donnant, d'après la formule, la longueur qui résulte de la déclinaison du jour. Répétant cette opération, pour

le plus grand nombre possible de jours dans l'année, toutes les extrémités des rayons vecteurs appartiendront à une courbe qu'il faudra décrire et qui sera la méridienne du tems moyen cherchée. L'extrémité de l'ombre arrivant à cette courbe, fera connaître le midi moyen, que l'on pourrait appeler *le midi de la pendule*, et qui, suivant l'époque de l'année où l'on se trouve, arrive [illegible] après le midi solaire que donne la méridienne [illegible] du cadran. Les mois, pour lesquels on [illegible] rayons, devront être écrits le long [illegible] courbe, afin que l'on sache, dans chaque saison, si [illegible] avant ou [illegible] midi solaire, qu'on doit observer [illegible] midi moyen.

Pour déterminer un point [illegible] elconque M de la méridienne du tems moyen, on se contente ordinairement de chercher l'intersection du rayon AM par une ordonnée perpendiculaire à l'axe, et menée du point [illegible], où l'ombre se termine à midi solaire, pour le jour donné. Cette méthode d'approximation est fondée [illegible] ce que, dans la petite longueur $P'M$, la courbure [illegible] formé par les extrémités des lignes horaires, est [illegible] qu'il se confond sensiblement avec une ligne droite [illegible] it tangente au point P'.

Cadran sur le premier vertical.

29 La théorie de ce cadran régulier se déduit de celle qu'on a vue dans l'article précédent, au moyen d'une considération fort simple, et qui rend tout nouveau calcul inutile.

Soit A' (*fig.* 9) le point de la terre où l'on propose de construire un pareil cadran, et supposons que le cercle $EA'B$ représente le méridien de ce lieu, sur lequel

l'équateur se projètera sur ce plan suivant une ligne droite EQ. La ligne verticale $C'A'$ menée du centre de la terre au point A', représentera pareillement le plan du premier vertical sur lequel on doit tracer le cadran. Maintenant si, par ce même centre, nous menons un plan AB perpendiculaire à $C'A'$, ce plan sera parallèle à l'horison de A', et réciproquement l'horison AH du point A sera parallèle au premier vertical de A'.

30. On voit [illegible] cette disposition, que le cadran construit sur le pr[illegible] vertical en A' à la latitude λ, est exactement pa[illegible] au cadran horisontal construit en A à la latitude λ [illegible]°. Nous aurons donc le cadran cherché, en substitu[illegible] $-90°$ au lieu de λ dans nos formules (*).

Il faudra de plus exprimer que la pointe de l'axe au point A, comme au point A', est tournée vers le pôle austral [illegible] que l'on compte les angles horaires depuis le poin[illegible]ral du cadran, c'est-à-dire qu'il faudra chan[illegible] en $-z'$, et $+H$ en $180° - H$ dans les for[illegible]dran horisontal.

[illegible]s modifications, les formules de la page 70 deviennent

$$\rho = \sqrt{\cos H \sin \lambda - \operatorname{tang} \delta \sqrt{\cos^2 H \cos^2 \lambda + \sin^2 H}},$$

$$\operatorname{tang} H = \operatorname{tang} E \cos \lambda.$$

Ce sont les valeurs des lignes et des angles horaires,

(*) Les îles Canaries et le Kamschatka offrent ainsi l'exemple de points tellement placés sur le globe, que le cadran horisontal de l'un est le cadran vertical de l'autre.

pour le cadran construit sur le premier vertical à la latitude λ. Au moment de midi H est nul, et l'on a

$$\rho = \frac{-z' \cos \delta}{\sin (\lambda - \delta)} :$$

la longueur de la ligne horaire devient infinie à midi, lorsque $\lambda = \delta$, c'est-à-dire lorsque le soleil est au zénith. Elle devient négative lorsque cet astre passe au delà du zénith du côté du pôle; dans ce cas, il faut prendre z' négatif, c'est-à-dire, placer le [illegible] la face opposée du cadran.

Cadran po[illegible]

31. Parmi les plans perpendiculaires au méridien, celui qui passe par le pôle, et que nous avons pris jusqu'ici pour plan des y, z, ne serait pas propre à la construction d'un cadran, parce que l'axe s'y trouve compris, et ne peut, en conséquence, y projeter son ombre. Mais si, parallèlement à ce plan, il en existait un autre placé au nord et à une distance c de l'axe, on y pourrait tracer un cadran de ceux qu'on appelle polaires, [illegible] contiennent le pôle céleste. Le plan de ce cadran est représenté par $x = + c$. Son intersection avec le plan horaire $y = x \text{ tang } E$, est donc

$$y = c \text{ tang } E.$$

C'est la projection en yz de la ligne qui marque l'heure; mais comme le cadran est parallèle aux yz, on peut dire que c'est la ligne horaire elle-même. Toutes ces lignes sont donc parallèles entre elles et à l'axe des z. *Voy. fig.* 10. A midi, E est nul, et l'on a $y = 0$. Ainsi, les diverses lignes horaires sont distantes de la ligne méridienne d'une quantité exprimée par c tang E. On obtient la valeur de cette distance en mettant pour E, pris négativement le

matin, et positivement le soir, le nombre de degrés, qui représente l'heure qu'on cherche.

Si l'on veut connaître les lignes décrites pendant la durée d'un même jour, par l'ombre d'un point quelconque de l'axe, du point A, par exemple, il faut reprendre l'équation du cône diurne

$$\cot^2 \delta = \frac{x^2 + y^2}{(z - z')^2},$$

trouvée page 58, et ensuite il faut couper ce cône par le plan, dont l'équation est $x = c$, l'intersection sera la courbe diurne décrite par l'ombre du point A sur le plan du cadran polaire, et l'on trouvera

$$(z - z')^2 - \tang^2 \delta = c^2 \tang^2 \delta;$$

cette équation représente une hyperbole rapportée à ses axes, et dont le centre est situé sur l'axe des z à une distance z' de l'origine. On devait en effet s'attendre à ce résultat, puisque le plan du cadran polaire étant parallèle à l'axe du cône diurne, doit couper sa surface suivant une hyperbole placée comme nous venons de le trouver.

Si dans cette équation l'on suppose $\delta = 0$, comme cela a lieu le jour de l'équinoxe, on trouve $z = z'$. Cela nous apprend que le jour de l'équinoxe l'extrémité de l'ombre, toujours comprise dans le plan des zy, reste sur la ligne droite, dont l'équation est $z = z'$; c'est-à-dire, sur la ligne droite menée par la pointe de l'axe, parallèlement à l'axe des y. Nous nommerons comme ci-dessus cette droite, l'équinoxiale du cadran; et sa rencontre avec la ligne de midi sera le centre des courbes diurnes décrit par l'ombre du point A aux diverses époques de l'année (*).

(*) Une méridienne du tems moyen serait plus facile à construire sur ce cadran que sur aucun autre.

Nous avons supposé la pointe de l'axe dirigée vers le pôle boréal. Si l'on voulait qu'elle fût dirigée vers le pôle austral, il faudrait faire z' négatif dans les formules. Voy. *fig.* 11.

Cadran oriental ou occidental.

32. Ici, comme dans le cadran polaire, le plan des xz, qui est celui du méridien, contenant l'axe du cadran, ne peut recevoir son ombre, mais deux plans parallèles au méridien, et placés à l'orient ou à l'occident de l'axe, à une distance $y = \pm c$, seraient bien placés pour qu'on y traçât un cadran oriental et un cadran occidental. L'un $y = -c$ situé à l'occident de l'axe serait éclairé le matin, et l'autre $y = +c$ ne pourrait servir que le soir. L'examen d'un de ces deux cas suffit; et j'observe d'abord que le centre du soleil se trouvant à midi dans le plan du cadran, n'y projète point d'ombre méridienne, en sorte qu'il faut rapporter les lignes d'heures à quelqu'autre axe que la ligne de midi. Si l'on choisit la ligne de six heures VI. VI (*fig.* 12), on remarquera que cette ligne est parallèle à l'axe des z. De plus, en menant dans le plan du cadran une droite Ee perpendiculaire à VI, VI, cette ligne sera parallèle à l'axe des x, et enfin une troisième droite perpendiculaire à la surface du cadran, se trouvera parallèle à l'axe des y. Ici comme dans tout ce qui précède, les xyz sont toujours nos mêmes coordonnées équatoriales. D'après cela, nommons E' l'angle formé par le plan horaire avec le plan de six heures; cet angle étant compté d'orient en occident comme tous les autres angles horaires. Alors l'équation du plan horaire en xy sera $x = -y \operatorname{tang} E'$; en y mettant $y = -c$, il vient $x = c \operatorname{tang} E'$, ce qui donne une ligne horaire, paral-

lèle à l'axe des z, et distante de la ligne VI, VI de la quantité $+ c$ tang E'. On calculera cette distance en mettant pour E', l'excès de l'heure cherchée sur six heures.

La courbe diurne, décrite par un point A, s'obtient en mettant $- c$ pour y dans le cône diurne, dont l'équation est

$$\cot^2 \delta = \frac{x^2 + y^2}{(z - z')^2},$$

Cette substitution donne

$$(z - z')^2 \cot^2 \delta \text{ tang}^2 \delta = c^2 \text{ tang}^2 \delta.$$

La courbe diurne projetée sur le plan des xz, est donc une hyperbole rapportée à ses axes, et dont le centre situé sur l'axe des z est éloigné d'une quantité z' de l'origine. Cette projection est égale à la courbe même tracée sur le plan du cadran. La ligne qui contient le centre des hyperboles, et qui est l'équinoxiale du point A a pour équation $z = z'$; elle est parallèle à l'axe des x, c'est-à-dire à l'intersection du méridien et de l'équateur. En la projetant sur le plan du cadran, elle devient perpendiculaire à la ligne de six heures, et la coupe dans un point M qui se trouve de niveau avec A ; car à six heures, le soleil est dans l'horison au tems de l'équinoxe. Il faudrait supposer z' négatif dans ces formules si la pointe A de l'axe était tournée vers le pôle austral.

Cadrans irréguliers.

ARTICLE III.

On ne peut tracer que des cadrans irréguliers, sur tous les plans dont l'angle dièdre avec le méridien n'est ni

droit ni nul, comme dans les cas examinés jusqu'ici. Or, comme il y a une infinité de ces plans, je vais, pour fixer les idées, et diviser la matière qui reste à traiter, ne m'occuper d'abord que des plans qui passent par la verticale. Il sera facile ensuite de généraliser ce cas, en modifiant convenablement les moyens qui auront servi à la solution de ce premier problème.

33. Soit donc une muraille bien verticale et bien unie, représentée par le plan PQ (*fig.* 13), et tournée d'ailleurs dans un aspect quelconque. Supposons que, sur la face australe, on ait planté un axe AM, parallèle à celui du mouvement diurne, suivant la méthode indiquée dans le n°. 13. J'observe d'abord que la ligne à-plomb, qu'on peut tracer sur le mur, à partir de la racine A de l'axe, est la ligne de midi; car elle est commune à tous les verticaux qui passent par A, et conséquemment au méridien et au cadran, ce qui caractérise toujours la ligne de midi. Je la représente par $AXII$. Je projette le point A' perpendiculairement sur cette ligne en M, et je forme ainsi le triangle $AA'M$ rectangle en M, dans lequel on aura $A'M = AM \cot \lambda$, puisque l'angle en A' est la latitude. Ce triangle $AA'M$ est tout entier dans le plan du méridien. Par conséquent le plan du premier vertical que je désigne par MAS lui sera perpendiculaire. Cela posé, à une heure quelconque, comme deux heures du soir, par exemple, le plan horaire coupe le premier vertical MAS, suivant la ligne AS', et le plan du cadran MAQ suivant AQ'. La première de ces lignes marque l'heure sur le premier vertical, la seconde a le même usage sur le plan proposé. Mais pour la tracer, il faut connaître l'angle qu'elle fait avec la verticale AM. Pour me procurer cet angle, j'imagine un cadran horisontal qui passe par A', et dont conséquemment $A'M$ soit la ligne de midi et $A'Q'$ la

ligne de 2 heures. L'angle horaire $MA'Q'$ est déja connu. Nous l'avons appelé H (21); de plus l'angle $Q'MA'$ formé par les horisontales dans le méridien et dans le cadran, est l'azimuth du vertical proposé, cet azimuth étant compté du sud vers l'est. Par conséquent le complément $Q'MS$ de cet angle, est la quantité dont la partie orientale du cadran s'écarte du premier vertical, en allant de l'orient vers le sud, et de o à 360°. Nous nommerons cette déviation α, et nous la regarderons comme connue; car on peut la déterminer par l'observation de différentes manières : on pourra même la trouver, sans instrument, en suivant une méthode qui sera indiquée plus loin.

Il résulte de tout ce qu'on vient de voir, que dans le triangle $MA'Q'$ on connaît l'angle $MA'Q' = H$; l'angle $A'MQ' = 90 - \alpha$, et le côté $A'M = AM \cot \lambda$. Par conséquent l'on aura

$$MQ' = \frac{AM \cot \lambda \sin H}{\cos (H - \alpha)}.$$

Or, si nous appelons U l'angle MAQ' formé sur le cadran par la ligne horaire AQ', avec la ligne de midi, nous aurons

$$\text{tang } U = \frac{MQ'}{AM},$$

par conséquent

$$[1] \ldots \text{tang } U = \frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H - \alpha)}$$

Dans la construction précédente, nous avons considéré la moitié du plan du cadran qui passait entre ce méridien et le premier vertical. C'est pour cela que nous avons trouvé l'angle $A'MQ' = 90° - \alpha$. Néanmoins, notre formule (1) est générale pour tous les angles horaires; il suffit

d'y substituer au lieu de H les valeurs successives de ces angles. Par exemple, si l'on veut considérer l'autre moitié du cadran, qui est située à l'occident, et qui, par conséquent, reçoit l'ombre avant midi, il faut faire H négatif; ce qui donne

$$\text{tang } U = -\frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H+\alpha)}.$$

Le signe négatif de tang U indique que l'angle U doit être pris sur le cadran à l'occident de la méridienne; de plus, il faut toujours se rappeler que H est donné par la formule

$$\text{tang } H = \text{tang } E \sin \lambda$$

E étant l'heure comptée à partir de midi, et convertie en degrés de l'équateur.

34. Voici maintenant un moyen très-simple pour déterminer la déviation α du plan du cadran. L'axe AA' étant placé (voy. *fig.* 14), on a dû commencer par tracer la méridienne A XII, fondement de toutes nos déterminations. Par la pointe A' de l'axe, on mènera une ligne horisontale $A'M$, et l'on marquera le point M où elle rencontre la méridienne. Puis par ce point M on mènera dans le plan du cadran une ligne horisontale hMH sur laquelle on marquera plusieurs points, tels que h et H, également distans du point M. Cela fait, on mesurera très-exactement tous les côtés des triangles $A'MH$, $A'Mh$, et dans chacun d'eux, on calculera l'angle en M. Dans tous les cas, ces deux angles devront être supplémens l'un de l'autre, ce qui sert de preuve à l'opération; s'ils sont tous deux droits, le plan proposé est directement méridional ou perpendiculaire au méridien AMA'. S'ils sont inégaux, l'un est plus petit et l'autre plus grand que l'angle droit, d'une quantité égale à la déviation α du plan du cadran.

On peut aussi déterminer très-simplement cette déviation en plaçant une mire dans la direction du plan du cadran, à une grande distance, et relevant la position de cette mire par rapport à une ligne méridienne tracée sur le plan horisontal ; opération qui suppose seulement l'usage du graphomètre.

Ou bien encore, on peut placer l'œil dans la direction du plan du cadran, et observer l'instant où le centre du soleil, de la lune ou de quelque autre astre vient passer dans ce plan ; car, si l'on connaît l'heure qu'il est à ce même instant, soit par le moyen d'un chronomètre, soit par un cadran horisontal, il sera facile de calculer l'azimuth du cadran d'après ces observations.

35. On aurait pu parvenir à l'équation (1) en cherchant l'équation du plan du cadran en coordonnées équatoriales, et la combinaison avec l'équation du plan horaire ; mais cette marche, plus analytique et plus conforme à nos recherches précédentes, offre quelque difficulté pour la détermination des signes. C'est pourquoi j'ai préféré d'expliquer d'abord la précédente qui, sous ce rapport, est exempte de toute obscurité.

36. Maintenant, nous pouvons recourir à cette méthode générale pour calculer les longueurs des lignes horaires ; il est visible que tout se réduit à trouver l'équation du plan du cadran en coordonnées équatoriales. Car alors en la combinant avec celle des plans horaires que nous avons formée depuis longtems, l'élimination nous donnera l'intersection des deux plans, c'est-à-dire la ligne horaire.

Or en mettant toujours l'origine des coordonnées équatoriales au point A, c'est-à-dire à la racine de l'axe, l'équation du plan du cadran sera nécessairement de cette

forme

$$z = Ax + By.$$

Si l'on fait $y = 0$, on aura l'intersection du cadran par le plan des xz. Ce plan est le méridien représenté par $A'AM$ dans la *fig.* 13; ainsi l'intersection sera la ligne de midi, AM; et son équation est

$$z = Ax,$$

le coefficient $\frac{1}{A}$ exprime la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle forme avec l'axe des z positifs, représenté par AZ. Cet angle est égal à $A'AM$, c'est-à-dire au complément de la latitude du lieu que nous avons nommée λ. Il faut de plus exprimer que, pour un point quelconque M de cette ligne, AA' ou z est négatif lorsque x est positif: ces deux conditions exigent qu'on prenne

$$A = -\text{tang } \lambda,$$

par conséquent

$$z = -x \text{ tang } \lambda + By,$$

ce qui détermine déja une des constantes cherchées.

Pour déterminer l'autre, il faut se donner l'angle formé par le plan du cadran avec le premier vertical. Cet angle que nous avons désigné par α, peut aisément se déterminer par l'observation, comme nous venons de le dire. D'ailleurs puisque le premier vertical passe aussi par la ligne de midi, et est perpendiculaire au plan des xz, son équation se réduit à celle de sa trace sur ce plan, c'est-à-dire qu'elle est

$$z = -x \text{ tang } \lambda,$$

comme nous l'avons déja remarqué. Maintenant il est bien facile de trouver l'angle que ce plan forme avec celui du cadran; car par les formules de la Géométrie

analytique, page 73, en nommant α cet angle, on a

$$\cos\alpha = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'}};$$

$A = \text{tang}\,\lambda$, $C = 1$, $A' = \text{tang}\,\lambda$, $C' = 1$, $B' = 0$.

Substituant ces valeurs dans la formule, et réduisant, elle donne

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + B'^2\cos^2\lambda}},$$

d'où l'on tire

$$B = \pm\frac{\text{tang}\,\alpha}{\cos\lambda};$$

nous prendrons le signe négatif pour nous conformer à la *fig.* 13; car si nous menons dans le premier vertical la ligne horisontale AY, qui sera l'axe des Y positives, le plan $A'AY$ sera celui des zy, dont l'équation est $x = 0$, et il coupera le plan du cadran suivant une ligne droite AN dont l'équation sera

$$z = By,$$

or si nous voulons que les choses soient telles que les représente la *fig.* 13, il faudra que les points de cette intersection, tels que N, aient, en même tems, les x négatifs et les y positifs, ce qui exige que B soit négatif. On aura donc

$$B = -\frac{\text{tang}\,\alpha}{\cos\lambda};$$

et l'équation du plan du cadran sera

$$(3)\ \ldots\ z = -x\,\text{tang}\,\lambda - y\frac{\text{tang}\,\alpha}{\cos\lambda}$$

Nous avons déja vu que l'équation du plan horaire est

$$y = x \operatorname{tang} E, \text{ ou bien } y = \frac{x \operatorname{tang} H}{\sin \lambda},$$

la ligne qui marque l'heure étant l'intersection de ces deux plans, est donnée par la combinaison de leurs équations, c'est-à-dire, qu'elle a pour projections en xz,

$$(4) \ldots x = \frac{-z \cos \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H};$$

en yz,

$$(5) \ldots y = \frac{-z \operatorname{tang} H \cos \lambda}{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H}$$

Le cône diurne dont l'équation est

$$\cot^2 \delta = \frac{x^2 + y^2}{(z - z')^2};$$

coupe cette ligne en un point qui a pour coordonnées

$$z = \frac{z' (\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H)}{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H - \operatorname{tang} \delta \cos \lambda \sqrt{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 H}},$$

$$x = \frac{-z' \cos \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H - \operatorname{tang} \delta \cos \lambda \sqrt{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 H}},$$

$$y = \frac{-z \operatorname{tang} H \cos \lambda}{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H - \operatorname{tang} \delta \cos \lambda \sqrt{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 H}}.$$

La distance de ce point à l'origine ou la longueur de l'ombre est

$$\rho = \frac{z' \sqrt{(\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H)^2 + \cos^2 \lambda (\sin^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 H)}}{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} H - \operatorname{tang} \delta \cos \lambda \sqrt{\sin^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 H}}.$$

La complication de cette expression, tient principalement à ce que la ligne du midi, autour de laquelle tourne l'ombre, ne divise plus les courbes en deux parties symétriques.

37. Pour achever de la ramener à la forme polaire, il faut substituer aux angles H, au centre du cadran horisontal, leur valeur en fonction des angles au centre du vertical déclinant ; angles que nous avons déja nommés U. Or cela est très-facile, car nous avons trouvé tout-à-l'heure, page 81,

$$(I)\ldots \operatorname{tang} U = \frac{\cot\lambda \sin H}{\cos(H-\alpha)} :$$

en développant le dénominateur du second membre, on en tire

$$\operatorname{tang} H = \frac{\operatorname{tang} U \cos\alpha \sin\lambda}{\cos\lambda - \operatorname{tang} U \sin\alpha \sin\lambda}.$$

Au moyen de cette valeur, on peut chasser l'angle H de l'expression de ρ ; la quantité qui est sous le radical au numérateur devient un carré parfait, et toutes réductions faites, on arrive ainsi à

$$(II)\ldots \rho = \frac{}{\cos U[\sin\lambda + \cos\lambda \sin\alpha \operatorname{tang} U - \operatorname{tang}\delta \sqrt{\sin^2\lambda(\cot\lambda - \operatorname{tang} U \sin\alpha)^2 + \operatorname{tang}^2 U \cos^2\alpha}]}$$

Les formules (I) et (II) sont générales, à l'égard des formules analogues, contenues dans les articles précédens, et offrent, en y faisant les modifications convenables, la solution de tous les problêmes de Gnomonique qu'on a vus jusqu'ici et même de ceux dont il reste encore à parler. En attendant que la dernière partie de cette proposition soit démontrée, on peut toujours remarquer qu'il suffit de faire ici $\alpha = 0$, pour retrouver toute la théorie du cadran directement méridional ; car dans ce cas, les angles U, au centre du cadran, sont les mêmes que les angles désignés par H dans la page 75. Les formules ayant subi ce premier changement donneront la construction du cadran horisontal, en changeant $+z'$ en $-z'$, λ en $\lambda + 90°$ et U en $180° - U$.

38. Dans le tems des équinoxes, δ est nul, et la ligne décrite sur le cadran déclinant, par l'extrémité de l'ombre, a pour équation

$$\rho = \frac{z}{\cos U \sin \lambda + \cos \lambda \sin \alpha \sin U},$$

ce même jour à midi, on aura $U = 0$, et en nommant ρ' la longueur de l'ombre à cet instant, on a

$$\rho' = \frac{z'}{\sin \lambda},$$

la première équation se simplifie en introduisant un angle auxiliaire c, tel qu'on ait

$$\sin \lambda = \sin \alpha \cos \lambda \operatorname{tang} c,$$

car en faisant usage de cette transformation, on trouve

$$\rho = \frac{\rho' \cos c \sin \lambda}{\cos \lambda \sin \alpha \sin (c + U)} = \frac{\rho' \sin c}{\sin (c + U)}.$$

C'est l'équation polaire d'une ligne droite, qui coupe la méridienne du cadran à une distance ρ' de l'origine, et qui fait avec elle un angle c. En effet, soit Ee cette ligne, *fig.* 15, et AM la ligne de midi, menons une ligne horaire quelconque $AN = \rho$, et faisons $AM = \rho'$; l'angle MAN sera U, et si l'angle $AMN = c$ la proportion des sinus aux côtés opposés dans ce triangle MAN, donnera

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin c}{\sin (c + U)}$$

c'est l'équation proposée elle-même.

39. En employant ici la transformation du n°. 27, on serait parvenu à la connaissance de l'angle c d'une manière plus naturelle, mais le calcul eût été un peu plus long.

40. La complication que l'on ne peut éviter dans l'expression générale de ϱ, rend les courbes diurnes assez difficiles à décrire sur le cadran déclinant; mais la seule partie de leur cours, à laquelle on s'intéresse, a peu d'étendue et contient le point de midi qu'on trouve aisément. La principale utilité de ces courbes est en effet de déterminer le point où l'ombre doit se trouver chaque jour à midi moyen, et pour cela il suffit de connaître le point où la ligne horaire les coupe à cet instant. Mais, à cause du peu d'irrégularité de la marche du soleil, ces intersections, qui forment la *méridienne du tems moyen*, ne peuvent avoir lieu qu'à $16'16''$ au plus de distance du midi solaire; en sorte que deux lignes marquant $12^h - 16'$ et $12^h + 16'$ sur le cadran, comprennent entre elles tout ce qu'il est nécessaire de connaître des courbes diurnes, pour la construction de la méridienne du tems moyen. Supposons que, pour une déclinaison donnée, on ait déterminé la position et la longueur de ces lignes représentées par AH', Ah' (*fig.* 16), on aura alors deux points de la courbe diurne. Or, on peut encore, presque sans calcul, déterminer un autre point de ces courbes; c'est celui qui répond à la ligne de midi vrai; car alors on a $U = 0$, et en représentant par ϱ' la valeur particulière de ϱ pour cet instant, il vient

$$\varrho' = \frac{k' \cos \delta}{\sin (\lambda - \delta)};$$

on aura donc ainsi trois points appartenant à la courbe de ce jour; et les lignes droites qui les joindront représenteront à-peu-près l'arc cherché. Tout se réduit ainsi à déterminer la longueur d'ombre qui convient à chaque déclinaison différente, $16'$ avant et $16'$ après midi solaire.

Le jour de l'équinoxe où le soleil est en S dans l'équateur, on sait déjà que la longueur de l'ombre AD pour

un instant quelconque est

$$\rho = \frac{z' \sin c}{\sin \lambda \sin (c + U)};$$

alors l'angle $AA'D$ (*fig.* 16) est droit. Il devient donc facile de calculer l'angle $A'AD$, que j'appellerai Q, car dans le triangle $A'AD$ on aura

$$\cos Q = \frac{AA'}{AD} = \frac{z'}{\rho},$$

ou bien

$$\cos Q = \frac{\sin \lambda \sin (c + U)}{\sin c}$$

Quand on connaîtra ainsi l'angle Q, formé par l'axe du cadran avec la ligne horaire pour laquelle on calcule, cela servira pour trouver la longueur de cette ligne à toute autre époque de l'année ; car selon que le soleil se trouvera en S' ou en S'', au nord ou au sud de l'équateur, on aura $AA'H' = 90° \pm \delta$, et par conséquent la longueur de l'ombre sera

$$\rho = \frac{z' \cos \delta}{\cos (Q + \delta)}.$$

En supposant que l'on donne à δ toutes les valeurs positives et négatives dont la déclinaison est susceptible.

41. La construction d'une méridienne du tems moyen exige une suite de calculs qui paraît assez longue pour qu'il ne soit pas inutile d'en placer ici la récapitulation.

Pour trouver le point de la méridienne du tems moyen, qui répond à une déclinaison donnée δ :

1°. On commencera par chercher les deux lignes horaires AD et Ad qui répondent à $12^h - 16'$ et à $12^h + 16'$, et qui serviront à la détermination de tous les autres points : pour cela, on réduira $16'$ en degrés sexagésimaux, en multi-

pliant par 15, ce qui donne 4 degrés à mettre pour E dans la formule

$$\text{tang } H = \text{tang } E \sin \lambda.$$

Ayant ainsi H, la formule

$$\text{tang } U = \frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H - \alpha)},$$

trouvée n°. 33, donnera les deux angles formés par les lignes horaires cherchées à droite et à gauche de la ligne de midi. Il faut prendre H positif avant midi et négatif après. Pour α, il conserve toujours son même signe, et il exprime l'angle que la moitié orientale du cadran forme avec le premier vertical; cet angle étant compté de l'est vers le sud et de 0 à 360°.

2°. Ces deux lignes étant tracées indéfinies sur le cadran, on cherchera l'angle Q qu'elles forment avec l'axe. Cet angle sera donné par la formule

$$\cos Q = \frac{\sin \lambda \sin (c + U)}{\sin c},$$

trouvée n°. 40 : après toutefois que l'on aura calculé c au moyen de la relation $\text{tang } c = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin \alpha}$ introduite dans le n°. 38.

3°. On marquera, sur chacune de ces mêmes lignes, la longueur d'ombre Aq' ou Aq'' qui convient à la déclinaison donnée. Cela se fera par le moyen de la formule trouvée n°. 40.

$$\rho = \frac{z' \cos \delta}{\cos (Q + \delta)}.$$

4°. On cherchera ensuite la longueur de l'ombre, à midi solaire, au moyen de la formule

$$\rho = \frac{z' \cos \delta}{\sin (\lambda - \delta)},$$

dans toutes ces formules la latitude λ et la déclinaison δ doivent être prises positivement au nord de l'équateur, et négatives au sud de ce plan. La longueur de l'ombre à midi étant trouvée, on la portera sur la méridienne en AXII.

5°. Trois points étant ainsi construits sur les lignes horaires AQ', AXII et AQ'', on les joindra ensemble par des lignes, qui seront des cordes de la courbe diurne. Il ne restera plus qu'à mener les lignes horaires correspondantes à midi moyen, pour les deux jours qui ont la déclinaison donnée. Ces deux lignes couperont les cordes qq' et qq'' en deux points que l'on pourra considérer comme faisant partie de la méridienne courbe.

Ces opérations diverses semblent demander beaucoup de tems; mais on doit remarquer, que tout ce qui est relatif au tracé des lignes AD et Ad, ne se fait qu'une fois dans tout le travail, et qu'on trouve, en appliquant les formules, un grand nombre de cas où l'un des trois points est inutile.

42. Le cadran vertical déclinant donne lieu à une question qui n'a pas été proposée dans les articles précédens. L'azimuth étant donné, quelles sont les heures les plus éloignées de midi, qui puissent être indiquées par le cadran?

Pour nous diriger dans cette recherche, soit $SS'S''$ l'horison d'un lieu quelconque de notre hémisphère (*fig.* 17); représentons par P le pôle boréal, par ST la trace du plan du cadran, que je suppose vertical, mais déclinant vers l'est. Pour fixer les idées, PS, PS', etc., seront des cercles horaires et $S'N'$, SN, $S''N''$, etc., des portions de parallèles décrits par le soleil, les jours où il se lève en S, S', etc. Tout cela étant convenu, je remarque d'abord que le jour où il se lève au point S, dans le cercle horaire PS, est celui où il éclaire le cadran de meilleure heure : car

s'il ne se dégage pas de l'horison en ce point, il se lève plus près de midi, comme en S', ou plus loin de midi, par exemple en S''. Dans le premier cas il ne paraît pas encore, quand il est dans le cercle horaire PS; dans le second, il est encore derrière le cadran au point Q, quand il atteint ce même cercle. Tout se réduit donc à connaître l'heure qu'il est quand le soleil est au point S, intersection de l'horison par le plan du cadran. Or il est alors distant de midi d'un angle égal à l'azimuth du cadran mesuré dans le plan horisontal. C'est tout ce qu'il faut savoir pour trouver l'heure, au moyen de la formule du cadran horisontal $\text{tang } H = \text{tang } E \sin \lambda$. Dans cette formule il faut mettre pour H l'azimuth du point du cadran qui se trouve dans l'horison; alors E sera la valeur de l'angle horaire correspondant mesuré dans le plan de l'équateur, et ce dernier réduit en tems est précisément ce qu'on cherche.

Une construction semblable du côté du couchant, ferait voir que la dernière heure du cadran, est distante de 12 heures de celle qu'on vient de trouver.

Cadran incliné d'une manière quelconque sur l'horison et le méridien.

43. Quelle que soit la situation du plan sur lequel on veut faire un cadran, il est toujours possible d'y tracer une ligne méridienne dans la direction des deux fils à-plomb dont il a été parlé (13). L'axe AA', *fig.* 18, ayant été planté sur quelqu'un des points de cette ligne formera avec elle, dans le plan du méridien, deux angles supplémens l'un de l'autre : et celui des deux qui sera aigu, pourra se calculer aisément en abaissant de l'extrémité de l'axe une perpendiculaire à la méridienne; car on

aura ainsi un triangle rectangle, dont tous les côtés pourront être mesurés.

Soit donc AMA', *fig.* 18, le triangle dont il est question; il est clair que si la ligne méridienne AM était verticale, l'angle A serait le complément de la latitude, comme dans les cas que nous venons d'examiner. Ainsi l'on aurait alors $\lambda = 90 - A$. Telle est donc la valeur qu'il faut donner à λ dans les formules du cadran déclinant, pour qu'elles puissent servir à construire le cadran proposé. Il ne reste plus qu'à trouver la déviation du plan, pour le lieu dont la latitude est $90 - A$. Or, rien n'est plus simple, car l'horison doit y être perpendiculaire à AM comme l'est déja MA': ainsi on n'aura qu'à mener $Mp = Mq$, à angle droit sur AM, et on aura deux triangles pMA', qMA' dans l'horison fictif; ils seront aussi propres que ceux du n°. 34 à faire connaître la valeur qu'il convient de donner à α dans les formules.

Calcul d'un Cadran.

Afin de faire connaître avec plus de détail, non-seulement les différentes opérations dont se compose le calcul d'un cadran, mais encore l'ordre dans lequel il convient de les arranger, pour éviter la confusion : on va placer ici, pour servir de type, tout le travail d'un cadran exécuté dans un lieu dont la latitude est 48°.12′. Ce sera donc la valeur de λ dans nos formules.

La muraille verticale sur laquelle on a opéré, est éclairée avant six heures du matin, par le soleil levant d'été, et sa déviation à partir du point d'orient du premier vertical est de 10°.12′ vers le nord. Ainsi en comptant de l'orient vers le sud, comme nous l'avons supposé dans nos formules, la valeur de α sera

$$\alpha = 360° - 10°, 12',$$

en la substituant dans nos formules, nous aurons,

après midi $$\text{tang } U = \frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H + 10° \cdot 12')}$$

et avant midi $$\text{tang } U = -\frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H - 10° \cdot 12')}$$

N. B. Dans les calculs suivans, le signe *L'* placé devant un nombre indique le complément de son logarithme; et le signe — placé sur une caractéristique de logarithme, indique qu'elle est négative. De plus la déviation 10°.12′ a été désignée par α.

HEURES solaires après midi.	DISTANCES du ⊙ au méridien en degrés de l'équatorial.	CALCULS de la formule tang H = sin λ tang E.	ANGLES HORAIRES sur le cadran horisontal.
$0^h.11'$	$E = 3°.45'$	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\log.E$ 8.8165294 $L.\tang H$ 9.6889631	$H = 2°.47'.50''$
0.30	7.30	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.1195918 $L.\tang H$ 9.9920255	5.36.30
0.45	11.15	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.2986618 $L.\tang H$ 9.1710955	8.26.0
1.0	15.0	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.4280525 $L.\tang H$ 9.3004862	11.17.50
1.15	18.45	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.5307813 $L.\tang H$ 9.4032150	14.12.0
1.30	22.30	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.6172243 $L.\tang H$ 9.4896580	17.9.40
1.45	26.15	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.6929750 $L.\tang H$ 9.5654087	20.11.10
2.0	30.0	$L.\sin\lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.7614394 $L.\tang H$ 9.6338731	23.17.10

ANGLES HORISONTAUX augmentés de la déviation α.	CALCUL de la formule $\text{tang } U = \frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H+\alpha)}$	ANGLES horaires sur le cadran vertical.	TANGENTES naturelles pour un rayon de 5000
$H+\alpha = 12°.59'.50''$	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 8.6884518 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0112712 $L.\text{tang } U$ $\bar{2}.6510906$	$U = 2°.33'.5''$	224
15.48.30	$L.\cos \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 8.9900174 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0116444 $L.\text{tang } U$ $\bar{2}.9581494$	5.11.20	454
18.38. 0	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.1663074 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0233829 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}.1410779$	7.52.40	692
21.29.50	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.2926313 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0313138 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}.2747327$	10.39.40	941
24.24. 0	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9...897106 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0406325 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}.3717307$	13.32.30	1204
27.21.40	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.4699097 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0115247 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}.4728220$	16.32.40	1485
30.23.10	$L.\cos \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.5.79081 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0641723 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}.5534680$	19.40.50	1788
33.29.10	$L.\cos \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.5969519 $L'.\cos(H+\alpha)$ 0.0783237 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}.6271632$	22.58. 0	2119

Heures solaires après midi.	Distances du ⊙ au méridien en degrés de l'équatorial.	Calculs de la formule $\tang H = \sin \lambda \tang E$	Angles horaires sur le cadran horisontal.
$2^h . 15'$	$E = 33° . 45'$	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.8248926 $L.\tang H$ 9.6973263	$H = 26° . 28' . 40''$
2 . 30	37 . 30	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9.8849805 $L.\tang H$ 9.7574.42	29 . 46 . 10
2 . 45	41 . 15	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 9 9429879 $L.\tang H$ 9.8154216	33 . 10 . 30
3 . 0	45 . 0	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 10 $L.\tang H$ 9.8724337	36 . 42 . 10
3 . 15	48 . 45	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 10.05-0121 $L.\tang H$ 9.9294158	40 . 22 . 0
3 . 30	52 . 30	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\log E$ 10.1150195 $L.\tang H$ 9.9874532	44 . 10 . 20
3 . 45	6 . 15	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 10.1751074 $L.\tang H$ 10.0475411	48 . 7 . 50
4 . 0	60 . 0	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\tang E$ 10.2385606 $L.\tang H$ 10.1109943	52 . 14 . 40

Angles horisontaux augmentés de la déviation α.	Calculs de la formule $\text{tang } U = \frac{\cos \lambda \sin H}{\cos (H+\alpha)}$	Angles horaires sur le cadran vertical.	Tangentes naturelles pour un rayon de 5000.
$H+\alpha = 36°.40'.40''$	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.6491894 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.0958216 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.6963986	$U = 26°.25'.50''$	2485
39.58.10	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.6950290 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.1155510 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.7628684	30. 4.50	2896
43.22.30	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.7381446 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.1385406 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.8280728	33.56.40	3365
46.54.10	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.7764571 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.1654052 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.8932499	38. 1.40	3910
50.34. 0	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8113583 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.1971032 $L.\text{tang } U$ 1.9598491	42.21.20	4558 Cordes.
54.22.20	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8431190 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.2546913 $L.\text{tang } U$ 0.0291979	46.55.30	3982
58.19.50	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8719625 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.2798259 $L.\text{tang } U$ 0.1031760	51.44.30	4363
62.26.40	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8979734 $L.\cos (H+\alpha)$ 0.3347864 $L.\text{tang } U$ 0.1841474	56.48. 0	4756

HEURES solaires après midi.	DISTANCES du ⊙ au méridien en degrés de l'équatorial.	CALCULS de la formule $\text{tang } H = \sin \lambda \text{ tang } E$	ANGLES HORAIRES sur le cadran horisontal.
$4^h.15'$	$E = 63°.45'$	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\text{tang } E$ 10.3070250 $L.\text{tang } H$ 10.1794587	$H = 56°.30'.30''$
4.30	67.30	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\text{tang } E$ 10.3827757 $L.\text{tang } H$ 0.2552094	60.56.30
4.45	71.15	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\text{tang } E$ 10.4692187 $L.\text{tang } H$ 9.3416524	65.31.0
5.0	75.0	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\text{tang } E$ 10.5719475 $L.\text{tang } H$ 0.4445812	70.13.50
5.15	78.45	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\text{tang } E$ 10.7013382 $L.\text{tang } H$ 10.5737719	75 3 42
5.30	82.30	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\text{tang } E$ 10.8805709 $L.\text{tang } H$ 10.7530046	79.59.0
5.45	86.15	$L.\sin \lambda$ 9.8724337 $L.\text{tang } E$ 11.1834706 $L.\text{tang } H$ 11.0559043	84.58.30
6.0	90.0	$\text{tang } H = \infty$	90.0.0

ANGLES HORISONTAUX augmentés de la déviation α.	CALCULS de la formule $\text{tang } U = \frac{\cos \lambda \sin H}{\cos (H+\alpha)}$		ANGLES horaires sur le cadran vertical.	CORDES pour un rayon de 5000.
$H+\alpha = 66°.42'.50''$	$L.\cot \lambda$	9.9513876	$U = 62°.4'.10''$	5156
	$L.\sin H$	9.9211763		
	$L'.\cos(H+\alpha)$	0.4030481		
	$L.\text{tang } U$	0.2756120		
71. 8.30	$L.\cot \lambda$	9.9513876	67.31.50	5558
	$L.\sin H$	9.9415739		
	$L'.\cos(H+\alpha)$	0.4904803		
	$L.\text{tang } U$	0.3834508		
75.43. 0	$L.\cot \lambda$	9.9513876	78. 8. 0	5958
	$L.\sin H$	9.9590805		
	$L.\cos(H+\alpha)$	0607809		
	$L.\text{tang } U$	0.5182683		
80.25.50	$L.\cot \lambda$	9.9513876	78.49.30	6349
	$L.\sin H$	9.9736179		
	$L'.\cos(H+\alpha)$	0.7762569		
	$L.\text{tang } U$	0.7042624		
85.15.40	$L.\cot \lambda$	9.9513876	84.32.10	6726
	$L.\sin H$	9.9850676		
	$L'.\cos(H+\alpha)$	1.0829414		
	$L.\text{tang } U$	1.0193966		
90.11. 0				

Le calcul des angles U sur le cadran vertical s'arrête ici à $5^h.15'$, parce que en mettant dans la formule tang H = sin λ tang E, l'azimuth du plan, c'est-à-dire, 100°.12′, au lieu de H, on trouve que le cadran ne peut pas marquer jusqu'à $5^h.30'$.

Les angles sur le cadran horisontal étant calculés pour tous les quarts d'heure, de midi à six heures du soir ; on a immédiatement ces mêmes angles pour tout autre quart d'heure de la journée. Car s'il s'agit, par exemple, du troisième quart d'heure avant-midi, ou de onze heures et un quart, son angle horisontal sera le même que pour les trois quarts d'heure après-midi, ou pour $0^h.45'$; ce qui résulte de la symétrie du cadran horisontal.

Si l'on veut avoir une ligne horaire plus éloignée de la méridienne du cadran que la ligne de 6 heures, son angle horisontal H, sera le supplément de l'angle calculé pour l'heure, qui précédant 6 heures, en est à la même distance que l'heure proposée : ainsi l'angle de $6^h.45'$ est supplément de l'angle de $5^h.15'$; comme on peut le conclure généralement de la formule tang H = sin λ tang E.

Au moyen de ces remarques, on voit que dans les opérations qui restent à faire, on peut supprimer tout ce qui est relatif à la recherche de l'angle H, dont la valeur est calculée d'avance pour tous les cas, dans le tableau ci-dessus.

Heures solaires avant midi.	Différences entre les angles horisontaux et la déviation α.	Calculs de la formule $\text{tang } U = \frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H - \alpha)}$.	Angles horaires sur le cadran vertical.	Tangentes naturelles pour un rayon de 5000.
11h. 45′	H 2°.45′.50″ α 10.12. 0 $H-\alpha$ 7.26.10	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 8.6884318 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0056680 L.tang U $\overline{2}$.6434874	U = 2°.31′.10″	220
11 . 30	H 5.36.30 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 4.35.30	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 8.9900174 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0013961 L.tang U 2.9428011	5. 0.40	438
11 . 15	H 8.26. 0 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 1.46. 0	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 9.1663074 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0002065 L.tang U $\overline{1}$.1179015	7.28.30	656
11 . 0	H 11.17.50 α 10.12. $H-\alpha$ 1. 5.50	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 9.2920513 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0000796 L.tang U $\overline{1}$.2434985	9.56.10	876
10 . 45	H 14.12. 0 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 4. 0. 0	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 9.3897106 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0010592 L.tang U $\overline{1}$.3421574	12.24. 0	1099
10 . 30	H 17. 9.40 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 6.57.40	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 9.4699997 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0032132 L.tang U $\overline{1}$.4245105	14.53. 0	1329
10 . 15	H 20.11.10 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 9.59.10	L cot λ 9.9513876 L.sin H 9.5579081 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0066300 L.tang U $\overline{1}$.4959257	17.23.40	1567
10 . 0	H 23.17.10 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 13. 5.10	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 9.5969519 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0114273 L.tang U $\overline{1}$.5597668	19.56.40	1815
9 . 45	H 26.28.40 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 16.16.40	L.cot λ 9.9513876 L.sin H 9.6491894 L′.cos $(H-\alpha)$ 0.0177676 L.tang U $\overline{1}$.6183446	22.33.10	2076

Heures solaires avant midi.	Différences. entre les angles horisontaux et la déviation α.	Calculs de la formule $\text{tang } U = \frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H - \alpha)}$	Angles horaires sur le cadran vertical.	Tangentes naturelles pour un rayon de 5000.
9h. 30′	H 29°46′.10″ α 10.12. 0 $H-\alpha$ 19.34.10	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.6959290 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.0258402 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.6731568	$U = 25°.13'.40''$	2356
9 . 15	H 33.10.30 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 22.58.20	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.7381446 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0. 358935 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.7254257	27.59.10	2657
9 . 0	H 36.42.10 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 26.30.10	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.7764571 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.0482193 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.7760640	30.50.30	2986
8 . 45	H 40.22.0 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 30.10. 0	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8113583 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.0632012 $L.\text{tang } U$ 1.8259471	33.48.50	3349
8 . 30	H 44.10.20 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 33.58.20	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8431190 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.0812838 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.8757904	36.55. 0	3756
8 . 15	H 48. 7.50 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 37.55.50	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8719625 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.1030571 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.9264072	40.10.10	4221
8 . 0	H 52.14.40 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 41. 2.40	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.8979734 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.1292501 $L.\text{tang } U$ $\bar{1}$.9785911	43.35.20	4758 Cordes.
7 . 45	H 56.30.50 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 46.18.50	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.9211763 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.1607281 $L.\text{tang } U$ 0.0332920	47.11.40	4003
7 . 30	H 60.56.30 α 10.12. 0 $H-\alpha$ 50.44.30	$L.\cot \lambda$ 9.9513876 $L.\sin H$ 9.9415739 $L'.\cos (H-\alpha)$ 0.1987212 $L.\text{tang } U$ 0.0916827	51. 0.10	4305

Heures solaires avant midi.	Différences entre les angles horisontaux et le complément d'azimuth.		Calculs de la formule $\text{tang } U = \frac{\cot \lambda \sin H}{\cos (H - \alpha)}$.		Angles horaires sur le cadran vertical.	Cordes pour un rayon de 5000.
7h. 15′	H	65°.31′. 0″	L.cot λ	9.9513876	$U = 55°.2′.0″$	4620
	α	10.12. 0	L.sin H	9.9590865		
	$H-\alpha$	55.19. 0	L'.cos $(H-\alpha)$	0.2448569		
			L.tang U	0.1553250		
7. 0	H	70.13.50	L.cot λ	9.9513876	59.18.10	4948
	α	10.12. 0	L.sin H	9.9736179		
	$H-\alpha$	60. 1.50	L'.cos $(H-\alpha)$	0.3014314		
			L.tang U	0.2264369		
6. 45	H	75. 3.40	L.cot λ	9.9513876	63.48.50	5285
	α	10.12. 0	L.sin H	9.9850676		
	$H-\alpha$	64.51.40	L'.cos $(H-\alpha)$	0.3718012		
			L.tang U	0.3082564		
6. 30	H	79.59. 0	L.cot λ	9.9513876	68.34.20	5632
	α	10.12. 0	L.sin H	9.9933292		
	$H-\alpha$	69.47. 0	L'.cos $(H-\alpha)$	0.4614625		
			L.tang U	0.4061793		
6. 15	H	84.56.30	L.cot λ	9.9513876	73.34.20	5988
	α	10.12. 0	L.sin H	9.9983276		
	$H-\alpha$	74.46.30	L'.cos $(H-\alpha)$	0.5806884		
			L.tang U	0.5304036		
6. 0	H	90. 0. 0	L.cot λ	9 9513876	78.47.50	6347
	α	10.12. 0	L.sin H	10.0000000		
	$H-\alpha$	79.48. 0	L'.cos $(H-\alpha)$	0.7518189		
			L.tang U	0.7032065		
5. 45	H	95. 1.30	L.cot λ	9.9513876	84.13.	6705
	α	10.12. 0	L.sin H	9.9983276		
	$H-\alpha$	84.49.30	L'.cos $(H-\alpha)$	1.0448029		
			L.tang U	0.9945181		
5. 30	H	100. 1. 0	L.cot λ	9.9513876	89.47.30	7058
	α	10.12. 0	L.sin H	9.9933292		
	$H-\alpha$	89.49.	L'.cos $(H-\alpha)$	2.4948819		
			L.tang U	2.4395987		

Pour tracer au moyen de ces calculs le cadran proposé, représenté dans la planche 4; du point A, origine de l'axe, je décris un cercle avec un rayon égal à la longueur de l'échelle que je suppose être une règle

d'un mètre divisée en 5000 parties ; instrument presqu'indispensablement nécessaire, et que les opérations du cadastre ont rendu très-commun.

Au point M sur la méridienne, je mène la tangente Tt, et j'y porte du point M aux points 1, 2, 3, etc., toutes les tangentes naturelles obtenues par le calcul.

Le cadran n'ayant que deux mètres de large, les tangentes d'angles plus grands que 45° n'y peuvent être contenues, mais j'ai alors recours aux cordes que je porte de M aux points 14, 15, 16, etc. sur la circonférence du cercle.

Par l'origine A et par tous les points ainsi déterminés, on n'a plus qu'à mener les lignes qui répondent aux différentes heures. Mais si l'on veut que la longueur de l'ombre indique les jours d'équinoxe et de solstice ou les changemens de saison, on se rappellera que la formule $t = \frac{z' \cos \delta}{\sin (\lambda - \delta)}$, donne généralement la longueur méridienne de l'ombre. Si l'on y fait successivement $\delta = 23°.27'.40''$, $\delta = 0$, $\delta = -23°.27'.40''$, on aura le solstice d'hiver, les équinoxes et le solstice d'été : en voici le calcul en donnant à z' ou à l'axe du cadran la valeur de 6250 parties de l'échelle, c'est-à-dire un mètre et un quart, valeur qui convient à-peu-près à un cadran de 3 mètres de long.

SOLSTICE D'HIVER.		ÉQUINOXE.		SOLSTICE D'ÉTÉ.	
$L.z'$	3.7958800	$L.z'$	3.7958800	$L.z'$	3.7958800
$L.\cos\delta$	9.9625258	$L.\cos\delta$	10.0000000	$L.\cos\delta$	9.9625258
$L.\sin(\lambda+\delta)$	0.0226365	$L.\sin\lambda$	0.1276663	$L.\sin(\lambda-\delta)$	0.3783315
$L.A\mathfrak{X}$	3.7810423	$L.AN$	3.9234463	$L.A\mathfrak{S}$	4.1367273
$A\mathfrak{X} =$	6040	$AN =$	8384	$A\mathfrak{S} =$	13700

Ayant ainsi sur la ligne de midi trois points appartenant aux trois courbes diurnes qui répondent aux changemens de saison, on peut, comme il arrive le plus ordinairement, se borner là et n'observer la hauteur du soleil qu'à midi ; ou bien on peut chercher sur les autres lignes horaires, des points analogues, et décrire complettement les lignes diurnes : si c'est ce dernier parti qu'on prend, on aura d'abord facilement la ligne équinoxiale $E\Omega$ qui est droite, et qui fait avec celle ...

de midi un angle C, connu par la relation tang $C = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin \alpha}$, α représentant la déviation du cadran comptée de l'est vers le sud. Dans le cas présent, $\alpha = 360^{o} - 10^{o}.12'$, ce qui donne

$$L.\ \text{tang } \lambda = 10.486124$$
$$L. - \sin \alpha = \underline{9.248181 1}$$
$$L. - \text{tang } C = 10.800431 3.$$

Le signe négatif de tang C montre que l'angle C est obtus. Et en l'évaluant par les tables de sinus, on trouve $C = 98^{o}.59'.50''$. Cette valeur doit se porter, d'après nos formules, à l'est de la méridienne, en allant du nord au sud; et elle est représentée par $AIVQ$ dans la figure.

Maintenant pour fixer, sur la direction des lignes horaires, les points qui appartiennent aux hyperboles solsticiales, on a vu précédemment qu'il suffit de connaître l'angle Q que chacune de ces lignes fait avec l'axe; après quoi la formule $\rho = \frac{z' \cos \delta}{\cos (Q + \delta)}$, donne les longueurs d'ombre pour la déclinaison δ, tant boréale qu'australe: mais l'angle Q s'obtient au moyen de l'expression générale . . . . $\cos . Q = \frac{\sin \lambda \sin (C + U)}{\sin C}$. Ainsi on a tout ce qu'il faut pour dresser le tableau suivant.

Heures solaires après midi.	Angles verticaux augmentés de C, ou de 98°.59′.50″.		Angles des lignes horaires et de l'axe, suivant la formule $\cos Q = \frac{\sin\lambda \sin(C+U)}{\sin C}$.	
0h.15′	U	2°.33′.50″	$L.\frac{\sin\lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	98.59.50	$L.\sin(C+U)$	9.9910982
	$C+U$	101.33.40	$L.\cos Q$	9.8689086
			$Q=$	42°.19′.0″
0.30	U	5.11.20	$L.\frac{\sin\lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	98.59.50	$L.\sin(C+U)$	9.9865500
	$C+U$	104.11.10	$L.\cos Q$	9.8643604
			$Q=$	42°.58′.0″
0.45	U	7.52.40	$L.\frac{\sin\lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	98.59.50	$L.\sin(C+U)$	9.9808849
	$C+U$	106.52.30	$L.\cos Q$	9.8586953
			$Q=$	43°.45′.30″
1.0	U	10.39.40	$L.\frac{\sin\lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	98.59.50	$L.\sin(C+U)$	9.9739197
	$C+U$	109.39.30	$L.\cos Q$	9.8517301
			$Q=$	44°.42′.10″
1.15	U	13.32.30	$L.\frac{\sin\lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	98.59.50	$L.\sin(C+U)$	9.9654931
	$C+U$	112.32.20	$L.\cos Q$	9.8433035
			$Q=$	45°.48′.20″
1.30	U	16.32.40	$L.\frac{\sin\lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	98.59.50	$L.\sin(C+U)$	9.9553375
	$C+U$	115.32.30	$L.\cos Q$	9.8331479
			$Q=$	47°.4′.40″

Il n'y aurait aucune difficulté à porter les calculs plus loin dans l'après midi. Mais dans le cadran qui a été construit sur ces résultats, on s'est borné aux hauteurs solaires les moins altérées par la réfraction. L'opération se fait

OMBRES SOLSTICIALES.

ÉTÉ. $\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\cos (Q + \delta)}$		HIVER. $\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\cos (Q - \delta)}$	
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6130769	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9760455
$L.\rho$	4.1453989	$L.\rho$	3.7824303
$\rho =$	13976	$\rho =$	6059
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6019565	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9743242
$L.\rho$	4.1565193	$L.\rho$	3.7841516
$\rho =$	14339	$\rho =$	6083
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.5879384	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9721592
$L.\rho$	4.1705374	$L.\rho$	3.7863166
$\rho =$	14809	$\rho =$	6114
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.5704880	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9694441
$L.\rho$	4.1879878	$L.\rho$	3.7890317
$\rho =$	15417	$\rho =$	6152
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.5490266	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9661019
$L.\rho$	4.2094492	$L.\rho$	3.7923739
$\rho =$	16197	$\rho =$	6200
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	7.5226619	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9620122
$L.\rho$	4.2358139	$L.\rho$	3.7964636
$\rho =$	17211	$\rho =$	6258

de la même manière pour le matin, à cela près qu'il faut faire U négatif dans la formule qui sert à calculer Q. Cela revient à employer l'angle ANE au lieu de son supplément C ou ANQ. C'est ainsi que l'on a calculé le tableau suivant.

HEURES solaires avant midi.	ANGLES verticaux augmentés de $180° - C$, ou de 81°.0′.10″.		ANGLES des lignes horaires et de l'axe, suivant la formule $\cos Q = \frac{\sin \lambda \sin (C+U)}{\sin C}$	
11h. 45′	U	2°.31′.10″	$L.\frac{\sin \lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	81 . 0 . 10	$L.\sin (C+U)$	19.9972184
	$C+U$	83 . 31 . 20	$L.\cos Q$	9.8750288
			$Q =$	41°.24′.50″
11 . 30	U	5 . 0 . 40	$L.\frac{\sin \lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	81 . 0 . 10	$L.\sin (C+U)$	9.9989481
	$C+U$	86 . 0 . 50	$L.\cos Q$	9.8767585
			$Q =$	41°.9′.20″
11 . 15	U	7 . 28 . 30	$L.\frac{\sin \lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	81 . 0 . 10	$L.\sin (C+U)$	9.9998467
	$C+U$	88 . 28 . 40	$L.\cos Q$	9.8776571
			$Q =$	41°.1′.10″
11 . 0	U	9 . 56 . 10	$L.\frac{\sin \lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	81 . 0 . 10	$L.\sin (C+U)$	9.9999417
	$C+U$	90 . 56 . 20	$L.\cos Q$	9.8777521
			$Q =$	41°.0′.1[illegible]
10 . 45	U	12 . 24 . 0	$L.\frac{\sin \lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	81 . 0 . 10	$L.\sin (C+U)$	9.9992356
	$C+U$	93 . 24 . 10	$L.\cos Q$	9.8770540
			$Q =$	41°.6′.30″
10 . 30	U	14 . 53 . 0	$L.\frac{\sin \lambda}{\sin C}$	$\bar{1}.8778104$
	C	81 . 0 . 10	$L.\sin (C+U)$	9.9977042
	$C+U$	95 . 53 . 10	$L.\cos Q$	9.8755146
			$Q =$	41°.20′.30″

Après les lignes équinoxiales et solsticiales, celles qu'il serait le plus convenable de tracer sur le cadran seraient celles qui répondent aux

OMBRES SOLSTICIALES.

ÉTÉ. $\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\cos (Q + \delta)}$		HIVER. $\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\cos (Q - \delta)}$	
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6279744	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9783225
$L.\rho$	4.1305014	$L.\rho$	3.7801533
$\rho =$	13505	$\rho =$	6028
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6321255	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9789520
$L.\rho$	4.1263503	$L.\rho$	3.7795238
$\rho =$	13377	$\rho =$	6019
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6342932	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9792798
$L.\rho$	2.1241826	$L.\rho$	3.7791960
$\rho =$	13310	$\rho =$	6014
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6346899	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9793198
$L.\rho$	4.1237859	$L.\rho$	3.7791560
$\rho =$	13298	$\rho =$	6014
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6328790	$L \cos (Q - \delta)$	9.9790661
$L.\rho$	4.1255968	$L.\rho$	3.7791097
$\rho =$	13354	$\rho =$	6017
$L.Z' \cos \delta$	13.7584758	$L.Z' \cos \delta$	13.7584758
$L.\cos (Q + \delta)$	9.6291398	$L.\cos (Q - \delta)$	9.9784995
$L.\rho$	4.1293360	$L.\rho$	3.7799763
$\rho =$	13469	$\rho =$	6025

jours où le soleil change de signe; mais pour ne pas charger la surface du cadran d'un trop grand nombre de lignes, on a seulement calculé

les arcs de ces courbes qui se trouvaient compris entre onze heures trois quarts et midi et un quart. On a supposé que le soleil en entrant dans les signes successifs, a les déclinaisons rapportées ici.

Pour le verseau et le sagittaire . . . . . 20°. 10′ australe.
Pour les poissons et le scorpion . . . . 11 . 29 *Id.*
Pour le taureau et la vierge. . . . . 11 . 29 boréale.
Pour les gémeaux et le lion. . . . . 20 . 10 *Id.*

L'angle Q étant pour midi un quart de . . . . 42°. 19′. 0″
pour onze heures trois quarts. . 41 . 24 . 50

Les formules donnent

Déclinaison australe.	$0^h . 15'$.	LONGUEUR DE L'OMBRE. $0^h . 0'$.	$11^h . 45'$.
	$\rho = \frac{Z \cos \delta}{\cos (Q - \delta)}$.	$\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\sin (\lambda + \delta)}$.	$\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\cos (Q - \delta)}$.
20°. 10′	$L.Z' \cos \delta$ 13.7684039 $L.\cos (Q - \delta)$ 9.9667048 $L.\rho$ 3.8016991 $\rho =$ 6334	$L.Z' \cos \delta$ 13.7684039 $L.\sin (\lambda - \delta)$ 9.9682784 $L.\rho$ 3.8001255 $\rho =$ 6312	$L.Z' \cos \delta$ 13.7684 $L.\cos (Q - \delta)$ 9.9694 $L.\rho$ 3.7989 $\rho =$ 6295
11 . 29	$L.Z' \cos \delta$ 13.7870984 $L.\cos (Q - \delta)$ 9.9338222 $L.\rho$ 3.8532762 $\rho =$ 7135	$L.Z' \cos \delta$ 13.7870984 $L.\sin (\lambda - \delta)$ 9.9361360 $L.\rho$ 3.8509624 $\rho =$ 7095	$L.Z' \cos \delta$ 13.7870 $L.\cos (Q - \delta)$ 9.9378 $L.\rho$ 3.8492 $\rho =$ 7067
Déclinaison boréale.	$\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\cos (Q + \delta)}$.	$\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\sin (\lambda - \delta)}$.	$\rho = \frac{Z' \cos \delta}{\cos (Q + \delta)}$.
11°. 29′	$L.Z' \cos \delta$ 13.7870984 $L.\cos (Q + \delta)$ 9.7712776 $L.\rho$ 4.0158018 $\rho =$ 10371	$L.Z' \cos \delta$ 13.7870984 $L.\sin (\lambda - \delta)$ 9.7765983 $L.\rho$ 4.0105001 $\rho =$ 10244	$L.Z' \cos \delta$ 13.7870984 $L.\cos (Q + \delta)$ 9.7864910 $L.\rho$ 4.0006074 $\rho =$ 10153
20 . 10	$L.Z' \cos \delta$ 13.7684039 $L.\cos (Q + \delta)$ 9.6646482 $L.\rho$ 4.1037557 $\rho =$ 12698	$L.Z' \cos \delta$ 13.7684039 $L.\sin (\lambda - \delta)$ 9.6720841 $L.\rho$ 4.0963198 $\rho =$ 12483	$L.Z' \cos \delta$ 13.7684039 $L.\cos (Q + \delta)$ 9.6775364 $L.\rho$ 4.0908675 $\rho =$ 12327

La préparation qu'il faut faire pour établir une méridienne du tems moyen sur le cadran proposé, n'est qu'une extension de l'opération qu'on vient d'effectuer; au lieu de quatre arcs de courbes diurnes, il en faut tracer un nombre beaucoup plus grand, en observant de ne le faire que pour des déclinaisons qui se rapportent à midi, et qu'on trouve à la première page de chaque mois dans la Connaissance des tems. Dans la colonne suivante se trouve pour le même midi, le tems moyen correspondant; d'où il est facile de conclure le tems vrai ou solaire au midi moyen, qu'il faut marquer sur l'arc pour avoir un point de la méridienne courbe.

Si, par exemple, on a choisi dans le volume de 1811, au mois de février, la déclinaison 11°.29′ australe; on décrira, ainsi qu'on vient de le faire l'arc)(, ♒, et considérant ensuite qu'il est déjà 14′.14″ de tems moyen au midi solaire, on en conclura que le midi moyen arrive à 11ʰ.45′.46″ du cadran. La ligne horaire de 11ʰ.45′.46″ est donc celle qui marque midi moyen, et dont la rencontre avec l'arc diurne doit donner un point de la méridienne courbe. Il ne reste donc qu'à mener cette ligne horaire; ce qui se fera en calculant son angle par la même méthode qui a servi pour les autres lignes horaires, ou bien en employant, pour parvenir à la connaissance de ce même angle, la proportion suivante 15′ : 2°.33′.30″ :: 14′.4″ : x.

Employer cette proportion, c'est regarder toutes les minutes des deux quarts d'heure les plus voisins de midi, comme répondant à des angles horaires égaux entre eux; ce qui n'est pas tout-à-fait exact. On commet une seconde erreur, mais aussi peu sensible que l'autre, en prenant sur l'axe même, la quantité qu'on a trouvée pour la tangente naturelle de l'angle qui forme le quatrième terme de la proportion. Bien entendu que cette tangente a été calculée pour un rayon égal à l'ombre méridienne du jour auquel correspond l'arc.

SUR LE MOUVEMENT DE TRANSLATION DU SYSTÊME PLANETAIRE.

SUPPOSONS que tout le système solaire soit en mouvement vers un certain point de l'espace, et voyons les conséquences qui en doivent résulter. Nous examinerons ensuite si les apparences y sont conformes.

D'abord pour que ce mouvement produise dans les positions apparentes des étoiles des déplacemens sensibles à nos mesures, il faut qu'il soit très-considérable : car, d'après ce que nous avons reconnu de l'immense distance des étoiles, un déplacement égal au diamètre de l'orbe terrestre n'y produirait aucune parallaxe sensible. De plus, selon toutes les analogies, ce mouvement doit s'exécuter autour du centre de gravité du système d'étoiles dont notre soleil et ses planètes font partie ; de même que le mouvement de Jupiter et des autres planètes entourées de satellites, s'exécute autour du centre de gravité du système solaire. Ainsi dans un tems très-court, par exemple, dans l'espace d'un demi-siècle, le petit arc de cette immense orbite qui est décrite par notre système, peut être considéré comme rectiligne. Soit donc, *fig.* 19, CC', cette direction prolongée en ligne droite ; C et C' étant les deux positions successives de notre système, qui peut être ici considéré

comme un point. Les rayons visuels CE, $C'E$ menés de ces deux positions à une même étoile E supposée fixe, la projèteront sur la sphère céleste en des points différens SS'; l'angle CEC' formé par ces rayons sera une véritable parallaxe séculaire, tout-à-fait analogue à la parallaxe de la lune et des planètes, lorsqu'on les suppose observées au même instant du centre et de la surface de la terre; et tout ce que nous avons dit sur cet objet dans le premier livre, s'applique également ici. Pour compléter cette analogie, appelons r l'élément CC' de la trajectoire; nommons R la distance CE de l'étoile à la première position du système, et Z l'angle $EC'G$ formé par le rayon visuel $C'E$ avec la direction du mouvement; la valeur de la parallaxe séculaire CEC' ou ϖ sera donnée par la formule

$$\sin \varpi = \frac{r \sin Z}{R},$$

tout-à-fait analogue à celle de la parallaxe de hauteur. Le rapport $\frac{r}{R}$ exprimerait la valeur de la parallaxe séculaire pour une étoile qui serait placée à la même distance R que la précédente, mais dans une direction perpendiculaire à CC', ce qui répond à la parallaxe horisontale.

Malheureusement cette expression de la parallaxe séculaire renferme deux élémens r et R qui sont absolument inconnus, et sur lesquels on ne peut même former aucune conjecture plausible. La valeur absolue de cette parallaxe, pour chaque étoile, est donc une chose impossible à déterminer. Mais ce qui ne l'est pas, et ce que l'on peut déduire des observations, c'est *la direction* de la parallaxe qui doit toujours tendre vers un même pôle, quelle que soit l'étoile que l'on considère. Si, par la position absolue de chaque étoile, et par les deux positions

successives du système, on mène un plan, qui contiendra les deux rayons visuels CE, $C'E$, tous ces plans devront se couper suivant une même ligne droite, qui sera l'axe CC' du mouvement.

Or, il est facile de voir par les observations, si cette condition est remplie ; car les plans menés par les deux rayons visuels, contiennent aussi les deux positions apparentes de l'étoile ; on peut donc les déterminer par cette condition, et voir si en effet ils se coupent tous suivant une même ligne droite.

Pour exprimer ceci par l'analyse, nous rapporterons les positions apparentes des points de l'espace à trois coordonnées rectangulaires xyz. Les deux premières, xy, seront situées dans le plan de l'équateur ; l'axe des x passera par l'équinoxe du printems, l'axe des y par le commencement du cancer, et les valeurs de x et de y seront positives en allant du centre de la terre vers ces points ; le troisième axe, celui des z, étant perpendiculaire aux deux autres, sera l'axe de l'équateur, et nous compterons les z positifs en allant du centre de la terre vers le pôle boréal. Cela posé, en nommant D la déclinaison d'une étoile quelconque, A son ascension droite, et r sa distance ; on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \text{tang } A, \quad z = r \sin D,$$

d'où l'on tire

$$x = r \cos D \cos A, \quad y = r \cos D \sin A, \quad z = r \sin D,$$

expressions que nous avons souvent employées. Je suppose maintenant qu'à une autre époque postérieure à la précédente, on détermine encore par l'observation l'ascension droite de la même étoile, et sa déclinaison apparentes.

Ces quantités devront avoir changé par l'effet de la précession, de la nutation, de l'aberration et du changement d'obliquité ; mais on peut y faire les corrections nécessaires pour ces diverses causes, et réduire ainsi les élémens de l'astre à l'époque de la première observation. Alors, si le système solaire, origine des coordonnées xyz, ne s'est pas déplacé sensiblement, et si l'étoile n'a par elle-même aucun mouvement propre sensible, on devra retrouver la même déclinaison D et la même ascension droite A ; mais si l'une ou l'autre de ces causes existe, on trouvera une autre déclinaison D' et une autre ascension droite A'. Ainsi, en supposant que la distance r de l'étoile à la terre soit devenue r', on aura pour ses nouvelles coordonnées

$$x' = r' \cos D' \cos A',\quad y' = r' \cos D' \sin A',\quad z' = r' \sin D'.$$

Maintenant supposons que D' et A' ne diffèrent de D et de A qu'en vertu du mouvement de translation du système solaire ; soient XYZ les coordonnées du point du ciel vers lequel ce mouvement est dirigé. Si, par l'œil de l'observateur, considéré comme fixe, nous menons un plan qui contienne les deux positions apparentes de l'étoile, ce point que nous nommerons le *pôle de translation du système*, devra s'y trouver compris. Or, l'équation d'un plan mené ainsi par l'origine, est généralement de la forme

$$z = Mx + Ny,$$

M et N étant deux constantes : puisque les coordonnées XYZ, xyz, $x'y'z'$ doivent y satisfaire, on aura évidemment les trois conditions

$$z = Mx + Ny,\quad z' = Mx' + Ny' ;\quad Z = MX + NY,$$

en éliminant d'abord M entre elles, on les réduit à deux, qui sont

$$zX-Zx=N\{yX-Yx\}, \quad z'X-Zx'=N\{y'X-Yx'\},$$

et enfin en éliminant N, on obtient cette condition unique

$$\{z'y-zy'\}X-\{z'x-zx'\}Y-\{x'y-xy'\}Z=0,$$

ou en faisant

$$\frac{X}{Z}=P, \quad \frac{Y}{Z}=Q,$$

$$\{z'y-zy'\}P-\{z'x-zx'\}Q-\{x'y-xy'\}=0;$$

la condition du problème est que toutes les étoiles s'accordent à donner les mêmes valeurs de P et de Q; et comme deux étoiles suffisent pour déterminer ces deux quantités, toutes les autres serviront à vérifier si l'accord exigé a lieu. Remarquons toutefois que pour avoir P et Q avec exactitude, et même pour vérifier leurs valeurs, il faut employer des étoiles dont les mouvemens apparens soient les plus grands qu'il est possible. Car P et Q sont déterminés par la direction de l'arc que ces étoiles décrivent sur la sphère céleste, et plus cet arc sera grand, moins il sera dévié par les erreurs des observations : tandis qu'au contraire, s'il est fort petit, ces erreurs pourront changer sa direction d'un grand nombre de degrés, et quelquefois la faire paraître contraire à ce qu'elle est réellement. L'expérience seule peut guider à cet égard ; car la quantité absolue du déplacement apparent, produit sur chaque étoile par la parallaxe séculaire, dépend de sa distance et lui est réciproquement proportionnelle; et comme des étoiles très-voisines en apparence l'une de l'autre, peuvent différer énor-

mément dans leurs distances à la terre, on voit que l'effet absolu de la parallaxe sur leurs positions apparentes peut être fort différent aussi. L'expérience seule peut donc faire connaître les étoiles qu'il faut de préférence employer.

Pour effectuer ces calculs de la manière la plus simple, reprenons l'équation de condition en P et Q, et substituons-y, au lieu de $xyz\ x'y'z'$ leurs valeurs angulaires, elle deviendra ainsi divisible par rr' et l'on trouvera ensuite

$$\left.\begin{array}{l}\{\sin D'\cos D\sin A-\sin D\cos D'\sin A'\}\ P\\ -\{\sin D'\cos D\cos A-\sin D\cos D'\cos A'\}\ Q\\ +\cos D'\cos D.\sin(A'-A)\end{array}\right\}=0.$$

Si l'on ajoute au coefficient de P les termes.....

$-\cos D'\sin D\sin A+\cos D'\sin D\sin A$ qui s'entredétruisent, et en coefficient de Q les termes.....
$-\cos D'\sin D\cos A+\cos D'\sin D\cos A$ qui s'entredétruisent aussi, l'équation prendra la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\{\sin(D'-D)\sin A-2\sin D\cos D'\sin\frac{1}{2}(A'-A)\cos\frac{1}{2}(A'+A)\}P\\ \{\sin(D'-D)\cos A\ \ 2\sin D\cos D'.\sin\frac{1}{2}(A'-A)\sin\frac{1}{2}(A'+A)\}Q\\ \cos D\cos D'\sin(A'-A).\end{array}\right\}=0.$$

Ici les changemens de la déclinaison et de l'ascension droite sont en évidence. Comme ces changemens sont fort petits, nous pouvons les supposer proportionnels à leurs sinus et faire ensuite $A=A'$, $D=D'$ dans tous les termes qui les ont déja pour coefficiens; de cette manière il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\{(D'-D)\sin A-(A'-A)\sin D\cos D\cos A\}P\\ -\{(D'-D)\cos A+(A'-A)\sin D\cos D\sin A\}Q\\ +(A'-A)\cos^2 D\end{array}\right\}=0.$$

Il sera plus commode pour le calcul numérique d'introduire, au lieu des déclinaisons D, D', les distances de l'astre au pôle boréal de l'équateur ; or en nommant ces distances Δ, Δ', on aura

$$D = 100^\circ - \Delta, \quad D' = 100^\circ - \Delta',$$

en substituant ces valeurs dans notre équation, et changeant tous les signes, elle devient

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} \{(\Delta' - \Delta)\sin A + (A' - A)\sin\Delta\cos\Delta\cos A\}P \\ -\{(\Delta' - \Delta)\cos A - (A' - A)\sin\Delta\cos\Delta\sin A\}Q \\ -(A' - A)\sin^2\Delta \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on représentait par α l'ascension droite du pôle de translation apparente, par δ sa distance polaire, et par ρ son éloignement, on aurait évidemment

$$X = \rho\sin\delta\cos\alpha, \quad Y = \rho\sin\delta\sin\alpha, \quad Z = \rho\cos\delta.$$

Ce sont les relations qui ont lieu entre les coordonnées angulaires et rectangulaires de tous les points de l'espace ; de là on tire

$$P = \frac{X}{Z} = \text{tang}\,\delta\cos\alpha, \quad Q = \frac{Y}{Z} = \text{tang}\,\delta\sin\alpha,$$

et ρ disparaît de ces rapports comme cela devait être. Maintenant si l'on substitue ces expressions dans l'équation (1), elle devient

$$(2) \quad \left.\begin{array}{r} (\Delta' - \Delta)\,\text{tang}\,\delta\sin(A - \alpha) \\ -(A' - A)\{\sin^2\Delta - \sin\Delta\cos\Delta\,\text{tang}\,\delta\cos(A - \alpha)\} \end{array}\right\} = 0.$$

Cette forme sera très-commode pour calculer les rapports $\frac{\Delta' - \Delta}{A' - A}$ des deux mouvemens, en déclinaison et en

ascension droite, lorsqu'on aura déterminé α et δ. En faisant ce calcul pour différentes étoiles, on verra si le résultat s'accorde avec l'observation, et l'on pourra ainsi vérifier aisément l'hypothèse que l'on aura faite sur la position du pôle de translation.

Comme cette formule renferme toute la solution du problème qui nous occupe, je ferai remarquer que l'on pourrait y parvenir directement d'une manière fort simple d'après les propriétés des triangles sphériques. Considérons en effet le triangle PpS, *fig.* 20, formé sur la sphère céleste par trois rayons visuels menés au pôle P de l'équateur à l'astre S et au pôle apparent de translation p Dans ce triangle le coté Pp est δ, le coté PS est Δ, et l'angle compris est $A - \alpha$; on aura donc l'angle S par la formule connue

$$\cot S = \frac{\cot \delta \sin \Delta - \cos (A - \alpha) \cos \Delta}{\sin (A - \alpha)},$$

mais cet angle S peut encore se calculer d'une autre manière; car, si l'on prolonge l'arc de grand cercle pS, qui passe déja par le pôle de translation et par la position S de l'étoile, il faudra qu'il contienne aussi la seconde, laquelle est désignée par S' dans la figure. D'après cela on voit que l'angle S aura pour tangente trigonométrique..... $\frac{(A' - A) \sin \Delta}{\Delta' - \Delta}$, c'est-à-dire, la variation d'ascension droite transportée sur le parallèle de l'étoile et divisée par la variation de la distance polaire. Cela tient à la petitesse de ces mouvemens qui permet de considérer le triangle rectangle SMS' comme rectiligne. La cotangente de l'angle en S sera donc égale à $\frac{\Delta' - \Delta}{(A' - A) \sin \Delta}$, puisqu'elle est inverse de sa tangente. En substituant sa valeur au lieu de cot S,

dans l'équation précédente, et faisant disparaître les dénominateurs, on trouve

$$\{\Delta' - \Delta\}\tang\delta\sin(A - \alpha)\}$$
$$-(A' - A\{\sin^2\Delta - \sin^2\Delta\cos\Delta\tang\delta\cos(A - \alpha)\} = 0.$$

qui est précisément l'équation à laquelle nous ont conduits les considérations analytiques.

Pour appliquer ces formules, j'emploierai les valeurs des mouvemens apparens qui ont été calculées avec beaucoup de soin par M. de Zach, dans son ouvrage intitulé *Tabulæ speciales aberrationis et nutationis*, *etc.* Les mouvemens en ascension droite ont été conclus des observations de Bradley comparées à celles de M. Maskeline. Quant aux mouvemens en déclinaison, M. de Zach les a calculés de deux manières; en comparant les observations de Bradley avec celles de M. Maskeline, et en comparant les observations de Mayer avec celles de M. Piazzi. De là résultent des évaluations souvent fort différentes, et quelquefois même contradictoires. Dans l'incertitude du choix, je n'ai employé que les étoiles pour lesquelles les deux comparaisons s'accordaient à donner des mouvemens de mêmes signes et à-peu-près de même valeur, et j'ai pris la moyenne des deux résultats. Ayant ainsi les valeurs de $\Delta' - \Delta$ et de $A' - A$, je les ai considérées pour plus d'exactitude, comme se rapportant à l'époque moyenne des observations comparées, et j'ai pris pour Δ et A les valeurs appartenantes à cette époque moyenne. Un exemple suffira pour montrer comment j'ai opéré.

	Distance polaire.	Ascension droite.	Noms des Observateurs.
La Chèvre en 1760.....	44°.16′.27″,5	71°.44′.59″,5	BRADLEY.
Réduction à 1802 calculée	— 3′.35″,604	+ 46′. 1″,243	
En 1802, calculée. Δ....	44°.12′.51″,896	A....75°.31′. 0″,743	
En 1802, observée. Δ′...	44°.13′.12″,400	A' ...75°.31′.14″,400	MASKELINE.
Mouv. en 42 ans Δ′ — Δ	+ 20″,504	$A'-A$....+ 13″,657	
Suivant Mayer.....	+ 17″,454		
Moyenne Δ′ — Δ....	+ 18″,979		
Élémens pour l'époque moyenne de 1781 Δ..	44°.14′.50″	A....75°. 8′.10″	

Il n'y a d'autre attention à avoir que d'observer exactement les règles des signes dans les soustractions et dans l'emploi des sinus et des cosinus. Quant aux valeurs moyennes de Δ et de A, il suffit de les prendre en dixaines de secondes ; car ce sont les seules différences Δ′ — Δ et $A'-A$ qui ont de l'influence dans la formule. En substituant ces valeurs numériques dans notre équation générale (1), j'ai obtenu les résultats suivans où je n'ai employé que les étoiles, pour lesquelles Bradley et Maskeline s'accordent avec Mayer et Piazzi.

Aldebaran..... $4'',960.P+ 0'',062.Q- 7'',250=0$,
La Chèvre..... $20'',085.P+ 1'',732.Q- 6'',649=0$,
Sirius..... $49'',072.P+12'',479.Q+16'',139=0$,
Procyon..... $40'',428.P+12'',774.Q+28'',621=0$,
Pollux..... $5'',177.P+12'',213.Q+24'',391=0$,
Arcturus..... $29'',073.P-78'',312.Q-43'',222=0$,
α de la Lyre.... $12'',216.P- 6'',466.Q- 1'',000=0$,
α de l'Aigle.... $18'',719.P+ 3'',988.Q-29'',485=0$.

A la seule inspection de ces équations, il est facile de voir qu'elles sont loin de s'accorder ensemble, et qu'elles donneront des valeurs extrêmement différentes pour P et Q suivant la manière dont on voudra les combiner. Mais comme les erreurs des observations peuvent entrer pour beaucoup dans les écarts qu'elles indiquent, ce qui se présente de plus naturel, c'est de se borner aux étoiles dont le mouvement apparent est le plus considérable, d'en déduire les valeurs de P et de Q, et de voir ensuite si ces valeurs satisfont aux mouvemens des autres étoiles, dans les limites des erreurs que l'on peut attribuer aux observations.

Je choisirai donc Sirius, Procyon et Arcturus. J'ajoute ensemble les équations relatives aux deux premières, et j'ai ainsi pour déterminer P et Q

$$89'',500\,P + 25'',253\,Q + 44'',760 = 0,$$
$$29'',073\,P - 78'',312\,Q - 43'',222 = 0,$$

de là on tire

$$P = -0{,}311738, \quad Q = -0{,}667604,$$

or les expressions générales de P et de Q sont

$$P = \text{tang}\,\delta \cos\alpha, \quad Q = \text{tang}\,\delta \sin\alpha.$$

On voit que si l'on prend α dans la première moitié de la circonférence, δ sera plus grand que l'angle droit; mais si l'on prend α plus grand qu'une demi-circonférence, δ sera moindre que l'angle droit. La première valeur appartient donc au pôle austral de l'axe de translation apparente, la seconde à son pôle boréal. C'est vers ce dernier que se dirige le mouvement réel du système planétaire, comme il est facile de s'en assurer par la construction géo-

métrique des variations observées. Conséquemment les mouvemens apparens des étoiles sont dirigés vers l'autre pôle. Nous aurons donc pour la position du pôle de transformation réelle

$$\alpha = 244°.58'.11'', \qquad \delta = 36°.22'.58''.$$

La valeur de α diffère seulement de quelques minutes de celle qui a été assignée par M. Herschell; mais celle de δ diffère de la sienne de 13°. Maintenant, pour vérifier ces valeurs et voir si elles indiquent un mouvement commun dans les étoiles, il faut les substituer dans l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(\Delta' - \Delta)\ \text{tang}\ \delta \sin (A - \alpha) \\ -(A' - A)\left\{\sin^2 \Delta - \sin \Delta \cos \Delta \ \text{tang}\ \delta \cos (A - \alpha)\right\}\end{array}\right\} = 0,$$

puis, nous donnant d'après les observations l'un des deux mouvemens, par exemple le mouvement $A' - A$ en ascension droite, il faut en conclure le mouvement en déclinaison $\Delta' - \Delta$, et voir s'il s'accorde avec les valeurs observées. C'est ainsi que j'ai formé le tableau suivant auquel j'ai ajouté aussi les valeurs de $\Delta' - \Delta$, calculées d'après les élémens de M. Herschell.

	Ascens. droite moyenne en 1760. A.	Distance au pôle boréal en 1760. Δ.	Variation d'ascens. droite observ. $A' - A$.	Variation de la dist. pol. observ. $\Delta' - \Delta$.	Valeur de $\Delta' - \Delta$ calculée.	Suivant M. Herschell.
barin.	65°.32'.38",7	73°.59'.39",7	+ 7",850	+ 4" 500	— 7819",5	+ 15057"
hèvre..	74.44.59 ,5	44.16.27,5	+ 13 ,657	+ 17 ,454	négative.	négative.
.....	96.38.36 ,8	106.24. 6 ,3	— 17 ,542	+ 50 ,410	+ 32",19	+ 18",11
on....	110.40.56 ,8	84.10.36 ,0	— 28 ,914	+ 42 ,299	+ 58 ,39	+ 34 ,36
x.....	112.39. 3 ,7	61.24.56 ,8	— 31 ,604	+ 2, 866	+ 55,13	+ 40 ,63
urus...	211.10.53 ,0	69.33.27 ,1	— 49 ,155	+ 81 ,985	+ 81 ,97	+ 46 ,17
la Lyre	277.12.11 ,0	51.25.33 ,7	+ 16 ,573	— 11 ,293	+ 12 ,75	+ 3 ,25
l'Aigle.	294.46. 0 ,7	81.44.51 ,1	+ 30 ,113	— 18 ,649	+ 48 ,59	+ 29 ,35

Or, à l'inspection de ce tableau, on voit clairement qu'il n'y a aucun accord entre le mouvement observé et les mouvemens calculés, soit avec nos élémens, soit avec ceux de M. Herschell. Il ne s'agit pas seulement ici de quelques différences fort petites que l'on pourrait attribuer aux erreurs des observations; les écarts que l'on remarque entre les observations et le calcul, sont du même ordre que les mouvemens observés eux-mêmes. Peut-être penserait-on qu'il serait possible d'atténuer ces erreurs et de les faire disparaître en changeant tant soit peu la position de l'axe de translation; mais il est facile de voir qu'il n'en est pas ainsi. Prenons pour exemple Aldébaran. En 1760, l'ascension droite de cette étoile était 65°.32′.39″. Ainsi tant que l'ascension droite du pôle de translation réelle différera peu de 245°, comme l'indiquent nos calculs et ceux de M. Herschell, Aldébaran se trouvera toujours à fort peu près sur le cercle de déclinaison qui passe par le pôle de translation apparente, car celui-ci étant opposé au précédent, se trouve situé comme Aldébaran, vers 65° d'ascension droite. Le mouvement d'Aldébaran en ascension droite, d'après le calcul, sera donc toujours fort petit comparativement à la variation de sa distance polaire: car cette dernière seule changerait, si l'ascension droite d'Aldébaran coïncidait avec celle du pôle de translation. Or, au contraire, nous trouvons, par les observations, le mouvement d'Aldébaran en ascension droite, presque double de son mouvement en déclinaison. Ces observations ne peuvent donc, en aucune manière, s'accorder avec les résultats que nous ont donnés Arcturus, Sirius et Procyon.

Mais ces deux dernières étoiles elles-mêmes qui nous ont servi de données, offrent une discordance considérable; et comme nous les avions combinées ensemble,

cette discordance indique qu'elles ne s'accordent pas non plus l'une avec l'autre.

Enfin la Lyre et l'Aigle nous donnent des résultats directement opposés à ceux du calcul ; et d'après la seule position de ces étoiles, il est facile de sentir qu'il n'en peut pas être autrement. Nous trouvons que le pôle de translation apparente est placé vers 65° d'ascension droite, et vers 40° ou 50° de déclinaison australe : il faut donc que toutes les étoiles convergent vers ce point. Or, si vous tirez un arc de grand cercle qui le joigne avec l'Aigle ou avec la Lyre, qui sont deux étoiles boréales, cet arc s'éloignera nécessairement du pôle boréal, depuis l'étoile jusqu'au pôle de translation ; et comme il faut que l'étoile le suive dans son mouvement, il faut de toute nécessité que sa distance polaire augmente. Or, les observations prouvent au contraire que cette distance diminue.

On voit par ces rapprochemens, que les mouvemens apparens des étoiles ne peuvent pas être ramenés à converger vers un même pôle placé comme le veut M. Herschell, et comme nous l'avons trouvé par Procyon, Sirius et Arcturus ; on ne trouverait pas plus d'accord en mettant ce pôle dans tout autre point du ciel, et cette assertion que nous allons prouver, terminera toute discussion.

Si les mouvemens apparens convergent vers un même pôle, on doit trouver les variations d'ascension droite nulles dans le cercle de déclinaison qui passe par ce pôle, et cela doit arriver dans deux points opposés de l'équateur. Or, en examinant la table que M. de Zach a donnée de ces mouvemens, on voit qu'en allant de 0 à 180° d'ascension droite, le point où les mouvemens en ascension droite changent de signe, est situé entre α d'Orion et Sirius, c'est-à-dire entre 85 et 98° d'ascension droite. Ce point semble même très-bien indiqué, pour la séparation

des signes; car les cinq étoiles qui sont entre 0° et 85° éprouvent un accroissement d'ascension droite, et les six autres qui suivent, depuis 98° jusqu'à 174°, éprouvent une diminution.

Le même signe se maintient au-delà de 180° d'ascension droite jusqu'à Arcturus et α de la Balance, et il change entre cette dernière étoile et α de la Couronne, c'est-à-dire entre 219° et 233°. Il y a bien une petite anomalie dans l'intervalle, pour α et β de la Vierge; cette dernière étoile sur-tout, quoique située vers 174° d'ascension droite, éprouve un accroissement d'ascension droite au lieu d'une diminution. Mais on peut regarder cette exception comme l'effet d'un mouvement propre et nous n'en tiendrons pas compte. Nous fixons donc le changement de signe dans la seconde moitié de l'équateur, entre 219 et 230 degrés d'ascension droite. Ici la séparation des signes paraît encore évidente, car depuis 230° d'ascension droite jusqu'à 360°, les mouvemens sont tous de même signe et indiquent un accroissement. Cependant, pour satisfaire à l'opposition des deux pôles, il aurait fallu trouver le point de partage entre 265° et 278°, c'est-à-dire à 35° de ce que les mouvemens apparens indiquent.

Autre considération. S'il y avait un mouvement polaire, les étoiles très-voisines auraient des mouvemens presque parallèles, en sorte que le rapport de leurs mouvemens en ascension droite et en déclinaison serait à-peu-près le même. Or, cette condition se trouve violée presque partout où l'on peut en faire l'épreuve.

Par exemple, α d'Ophiurus et α d'Hercule diffèrent seulement de 5° en ascension droite et de 2° en déclinaison. La variation de l'ascension droite est 42 ans en $+2''$, 26 pour la première, et $+8''$, 54 pour la seconde, suivant Bradley; mais la variation de la distance polaire, est

— 10″, 8 pour l'une, et + 2″ pour l'autre. La différence serait encore plus forte, si l'on prenait le catalogue de Mayer, comparé à celui de Piazzi.

Les trois étoiles α β γ de la constellation de l'Aigle, qui ne diffèrent que de 2° en ascension droite, et de 5° en déclinaison, présentent des discordances encore plus fortes. Leurs mouvemens en ascension droite pour 42 ans sont + 30″, + 5″ et + 2″, tandis que les changemens de leurs distances polaires sont — 21″, 8, — 8″, 5 pour les deux premières, et + 14″, 9 pour la troisième.

L'examen que nous venons de faire de toutes ces irrégularités, montre que les mouvemens observés jusqu'à présent dans les étoiles ne sont assujétis à aucune loi, et qu'on voudrait en vain les accorder en les supposant dirigés vers un même pôle. Il devient par là infiniment probable que ceux de ces mouvemens dont l'existence est bien constatée, sont dus en partie à des déplacemens réels des étoiles, et non pas à une translation générale de notre système. Tels sont par exemple ceux de la Chèvre, de Sirius, de Procyon, de Pollux, d'Arcturus, de la Lyre et d'α de l'Aigle. Quant aux autres dont l'évaluation comporte plus d'incertitude, non-seulement ils ne sont pas connus avec assez de précision pour qu'on puisse en conclure la direction du mouvement de notre système, mais même leur comparaison n'offre aucun indice qui puisse faire présumer que ce système est en mouvement.

Ce résultat que nous tirons des observations convenablement discutées, se trouvant contraire à ce qui avait été avancé par plusieurs astronomes célèbres, nous sommes obligés de modifier ce que nous avions annoncé, d'après leur autorité, sur le mouvement du système planétaire, page 187 du premier livre.

SUR LA RECTIFICATION
DE LA LUNETTE MÉRIDIENNE
PAR LE CALCUL DES AZIMUTHS.

POUR qu'une lunette méridienne soit bien placée et complètement rectifiée, il faut, 1°. que son axe de rotation soit horisontal; 2°. que l'axe optique de la lunette soit perpendiculaire à cet axe; 3°. que le fil équatorial du micromètre soit tangent aux parallèles célestes sur lesquels on le transporte; 4°. que le plan vertical, décrit par la lunette autour de son axe horisontal, soit le plan du méridien.

J'ai expliqué dans le chapitre V du premier livre les procédés très-simples que l'on emploie pour remplir les trois premières conditions. On rend l'axe horisontal au moyen d'un niveau d'épreuve qui se suspend à l'axe de rotation. On vérifie l'axe optique par le retournement. La direction du fil équatorial s'obtient par des essais, en faisant tourner le micromètre jusqu'à ce que les astres dans leurs passages suivent exactement ce fil. J'ajouterai seulement que pour donner à ces procédés toute la précision dont ils sont susceptibles, il faut que le niveau d'épreuve soit très-sensible; que son tube soit nu et dépourvu de montures qui pourraient le fléchir; enfin qu'il soit travaillé en dedans suivant la courbure circulaire, conformément aux principes que j'ai expliqués dans le chapitre XX du premier livre. Par ce moyen, on pourra juger plus exactement et plus sûrement de l'horisontalité de l'axe. Sa bulle d'air, renfermée dans le tube, parcourt 3 ou 4 millimètres

pour une inclinaison d'une seconde, comme cela avait lieu dans les niveaux dont j'ai parlé, et qui avaient été construits par Fortin pour nos cercles d'Espagne, on pourra non-seulement corriger le défaut d'horisontalité avec beaucoup d'exactitude, mais même si l'on avait par hasard omis de le faire, on pourrait rectifier les observations à l'aide du calcul, d'après l'indication du niveau.

Quant à ce qui concerne l'axe optique, un disque lumineux circulaire placé à une grande distance, est le meilleur moyen de le régler. Nous avons eu occasion, Arago et moi, d'employer ce moyen à Formentera. Nous avions pour signal un de nos grands réverbères placé dans l'île d'Yvice, à une distance d'environ cinq lieues. Il est incroyable avec quelle précision le fil peut se mettre et se remettre sur une pareille mire. Elle est telle qu'en le déplaçant exprès et le replaçant ensuite pour varier les erreurs du pointé, nous n'avons jamais rien apperçu dans les passages observés, qui y dénotât la plus légère différence.

Pour ce qui concerne la vérification des fils verticaux et du fil équatorial, il suffira de voir, comme nous l'avons indiqué, si la mire reste sous les premiers quand on fait tourner la lunette, et si les étoiles dans leurs passages ne quittent pas le second. C'est à quoi l'on arrive facilement. Il est impossible sans doute qu'il n'y ait pas sur cela quelque légère incertitude, mais l'erreur qui pourrait en résulter est rigoureusement nulle quand on compare des étoiles observées aux mêmes points physiques du fil équatorial, c'est-à-dire aux points où il est coupé par les autres fils. Quand la direction des fils est suffisamment assurée par les vérifications précédentes, on ne met pas l'étoile sur le fil équatorial dans les observations de passage, parce que le croisement des fils, où il faudrait sur-tout

l'observer, offrirait trop de largeur, par conséquent trop d'incertitude. Mais on la place tout près de ce fil, tantôt au-dessus, tantôt au-dessous, et de cette manière on saisit avec plus de précision les instans de son passage à chacun des fils verticaux. Il faut seulement éviter d'observer ainsi trop loin du fil équatorial, car on ne pourrait plus répondre de mettre toujours les astres observés à une même distance; on observerait donc leurs passages à différens points des fils verticaux, et par conséquent les époques des passages seraient affectées de toute l'erreur due à leur défaut de verticalité ou de parallélisme entre eux.

A l'aide de ces précautions, les procédés mécaniques que nous avons indiqués donneront les trois premières rectifications avec une très-grande exactitude. Ainsi la lunette décrira un plan vertical. Il ne restera donc plus qu'une condition à remplir, c'est que ce plan soit le méridien. Elle se trouvera déja peu éloignée de cette position si on l'a placée suivant la direction d'une ligne méridienne tracée sur le sol avec les soins convenables, comme nous avons enseigné à le faire dans le premier livre. On parviendrait à la mettre exactement dans le méridien, par la bissection de la révolution diurne des étoiles circompolaires, comme je l'ai expliqué dans le premier livre, p. 73. Mais l'application de cette méthode suppose que la marche de la pendule est assez bien connue pour que l'on puisse la considérer comme exactement uniforme pendant une révolution du ciel. Et quoique cette supposition n'ait rien que de très-praticable, comme le prouvent les exemples d'observations rapportées dans le premier livre, cependant elle est assez inquiétante pour que l'on desire de s'en rendre indépendant. C'est à quoi l'on parvient en comparant les intervalles des passages de plusieurs étoiles consé-

cutives, comme M. Delambre l'a proposé le premier, et comme nous allons l'expliquer.

Quelques astronomes sentant par leur pratique journalière l'avantage de ces vérifications promptes et toujours prêtes, ont voulu étendre l'usage de la méthode de M. Delambre, aux autres corrections que la lunette méridienne exige ; ils ont voulu déterminer de cette manière l'azimuth de la lunette, l'erreur de l'axe optique et le défaut d'horisontalité de l'axe de rotation. Mais il est facile de voir que ces trois genres d'erreurs ne peuvent pas être donnés par les seules différences observées des passages, car celles-ci pourraient être exactes sans que la lunette tournât dans le méridien, il suffirait pour cela qu'elle décrivît un cercle horaire. Ainsi, en définitif, toutes les conditions que l'on a tirées, ou que l'on voudrait tirer des différences des passages, se réduiront toujours à amener la lunette dans un plan horaire. Ces conditions ne renferment rien qui l'assujétisse à décrire un vertical.

D'après cette discussion nous nous en tiendrons pour les premières corrections aux procédés mécaniques qui ont toute l'exactitude desirable. Et supposant que la lunette tourne dans un vertical peu différent du méridien, nous chercherons à mesurer combien elle s'en écarte, et nous verrons à l'y amener exactement.

Soit *fig.* 21 T le centre de rotation de la lunette, Z le zénith, ZN le méridien, P le pôle élevé, qui sera pour nous le pôle boréal ; ZV le vertical que la lunette décrit, et qui dans la figure est occidental, quand l'objectif de la lunette est tourné vers le nord. Si un astre S vient à passer dans ce vertical, on pourra, au moment de son passage, former le triangle sphérique ZPS entre le zénith, l'astre et le pôle. Nommons D la distance PZ du pôle au zénith, dans le lieu de l'observation ; Δ la distance polaire

PS de l'astre. Ces deux quantités sont connues. Appelons A la déviation de la lunette ou l'azimuth cherché PZV du vertical compté du nord vers l'ouest ; enfin soit P l'angle horaire SPZ de l'astre à l'instant de son passage observé dans ce même vertical. Si P était donné, on connaîtrait aisément l'azimuth A, car alors dans le triangle SPZ on connaîtrait deux cotés D et Δ avec l'angle compris P. On trouvera donc A par la formule

$$\text{tang } A = \frac{\sin P}{\cot \Delta . \sin D - \cos P \cos D}.$$

Généralement cette équation exprimera une relation entre les élémens du triangle. Pour plus de simplicité, nous ferons disparaître le dénominateur, et nous la mettrons sous la forme suivante

$$\sin P = \text{tang } A \{\cot \Delta \sin D - \cos P \cos D\};$$

mais nous pouvons la simplifier encore par la considération que le vertical de la lunette s'écarte peu du méridien. Alors en effet, dans la construction que nous avons supposée, l'azimuth A et l'angle horaire P sont tous deux fort petits, et seulement de quelques secondes de degrés. Nous pouvons donc substituer leur rapport à celui de leurs sinus, et supposer ensuite $\cos A = 1$, $\cos P = 1$ dans les autres termes de l'équation qui sont déja multipliés par ces petits angles. Nous aurons ainsi

$$P = A \{\cot \Delta \sin D - \cos D.\}$$

Exprimons l'angle horaire P au moyen du tems. Pour cela je supposerai que la marche diurne de la pendule suit exactement le tems sydéral. Il est toujours possible de remplir cette condition, sinon par la pratique mécanique, au moins par le calcul, comme on l'a vu dans le chapitre VI du premier livre. Cette réduction supposée de la marche de la pendule n'est pas non plus une pétition

de principes ; car on a vu dans le chapitre cité, qu'elle ne suppose pas la connaissance du plan du méridien ; il suffit, pour l'obtenir, d'avoir observé les passages successifs d'une même étoile dans un vertical quelconque. Enfin on verra tout-à-l'heure qu'il n'est pas besoin, pour le problème qui nous occupe, d'avoir ainsi le mouvement de la pendule avec la dernière rigueur, mais qu'une connaissance approchée de sa marche suffit, parce que la correction ne porte que sur de très-courts intervalles de tems. Quant à l'avance absolue de la pendule sur le tems sydéral, nous la représenterons par r, et ce sera une des inconnues que les observations nous donneront le moyen de déterminer.

Soit donc T le tems sydéral absolu à l'instant du passage de l'astre au méridien supérieur, et H l'heure de son passage observé dans le vertical supérieur de la lunette. Puisque r est l'avance absolue de la pendule, $H - r$ sera le tems sydéral absolu à l'instant du passage observé, et $H - r - T$ sera, pour le même instant, l'angle horaire de l'astre compté du méridien supérieur, et d'orient en occident. Cet angle est exprimé en tems. Pour le convertir en arc, il faudrait le multiplier par 40 si l'on adopte la division décimale du tems, par 15 si l'on adopte la division sexagésimale. Il sera plus simple de laisser cet angle ainsi exprimé en tems, et de supposer la déviation A exprimée de la même manière. Au reste, quand on aura ainsi trouvé sa valeur, il suffira de la multiplier par 40 ou par 15 pour avoir cette valeur en arc.

D'après cela, notre équation approchée entre P et A deviendra

$$[1] \ldots . H - r - T = A.\{\cot \Delta \sin D - \cos D\},$$

ou
$$H - r - T = A \frac{\sin (D - \Delta)}{\sin \Delta}.$$

Quoique cette équation ait été tirée d'une construction particulière, en supposant l'astre observé dans son passage supérieur et au nord du zénith, elle peut cependant s'appliquer à tous les cas par le seul jeu des signes algébriques. En effet, tant que le passage sera supérieur et se fera au nord du zénith, D sera plus grand que Δ. Le second membre de l'équation sera positif et par conséquent le premier $H - r - T$ sera positif aussi, c'est-à-dire que l'astre passera au vertical de la lunette *après* avoir passé au méridien, comme notre construction le supposait. Si au contraire l'observation est faite au sud du zénith, Δ sera plus grand que D; le second membre de l'équation devient négatif, par conséquent le premier deviendra aussi négatif, c'est-à-dire que dans ce cas l'astre passe au vertical de la lunette *avant* de passer au méridien. Cela devait être en effet, puisque le vertical passe à l'orient de l'autre côté du zénith. Si la déviation du vertical était contraire à celle que nous avons supposée, c'est-à-dire si elle était orientale lorsque l'objectif est tourné du côté du nord, A deviendrait négatif, et l'opposition des signes serait inverse, c'est-à-dire que $H - r - T$ serait négatif pour les passages supérieurs observés au nord du zénith, et positif pour les passages supérieurs observés au sud. Tout cela est parfaitement conforme avec le changement de position du vertical.

Il est vrai que jusqu'ici nous n'avons considéré que des passages supérieurs. Mais il est facile de ramener les passages inférieurs dans la même formule : il suffit de remarquer que lorsqu'on observe sous le pôle, au nord du zénith, un astre dont l'ascension droite en tems est T et la distance polaire Δ, la direction de l'axe optique de la lunette est exactement la même qu'elle serait si, au même instant physique, on observait au sud du zénith le passage d'une étoile dont l'ascension droite en tems fût $T + \frac{1}{2}R$,

R étant la révolution des fixes, et dont la distance polaire serait $200° - \Delta$, c'est-à-dire égale au supplément de la distance polaire de l'astre réellement observé. En effet, il n'y a de différence que dans la direction de l'objectif, qui, dans le premier cas, serait tourné vers le nord, dans le second vers le sud. Mais la direction absolue de l'axe optique dans l'espace, et par conséquent l'azimuth du vertical de la lunette, n'en sont point altérés. Ainsi quand on aura observé à l'instant H de la pendule, le passage inférieur d'une étoile dont l'ascension droite en tems est T et la déclinaison Δ, il faudra mettre $T + \frac{1}{2}R$ au lieu de T, et $200° - \Delta$ au lieu de Δ dans la formule relative aux passages supérieurs, on aura la relation de A et de r qui convient à l'observation.

Au moyen de notre formule générale, nous pouvons combiner les observations de plusieurs étoiles, de manière à faire disparaître leur ascension droite absolue, et à ne laisser dans le résultat que les différences de ces ascensions droites, qui sont connues plus exactement. En effet, désignons par un accent les quantités relatives à une autre étoile S', nous aurons ces deux équations

Passage de S.... $H - r - T = A\{\cot\Delta \sin D - \cos D\}$,
Passage de S'... $H' - r - T' = A\{\cot\Delta' \sin D - \cos D\}$.

Je laisse l'avance absolue de la pendule la même, puisque nous avons supposé que sa marche diurne suivait exactement le tems sydéral. En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, r disparaîtra, et il ne restera que la différence $T' - T$ des ascensions droites; nous aurons ainsi

$$H' - H - (T' - T) = A\frac{\sin(\Delta - \Delta')\sin D}{\sin\Delta \sin\Delta'},$$

ce qui donne

$$A = \frac{\{(H' - T') - (H - T)\} \sin \Delta \sin \Delta'}{\sin (\Delta - \Delta') \sin D} . \quad [2]$$

Si l'on choisit des étoiles qui passent au méridien à des instans très-rapprochés l'un de l'autre, $H' - H$ et $T' - T$ seront de très-petites quantités. Il suffira donc de connaître approximativement la marche diurne de la pendule, pour convertir ce petit intervalle $H' - H$ en tems sydéral. Pour $T' - T$, il faut le supposer donné par les catalogues d'étoiles; et en effet, dans l'état actuel de l'astronomie, les différences d'ascension droite d'un assez grand nombre d'étoiles sont connues avec beaucoup d'exactitude.

Pour montrer l'application de cette méthode, je choisirai le même exemple qu'en a donné M. Delambre dans la Connaissance des tems de 1792, où il l'exposa pour la première fois.

Le 13 août 1789, M. Delambre savait que sa lunette méridienne avait une déviation, et il n'avait pas eu le tems de la remettre sur la mire méridienne avant d'observer. Il la rectifia par les passages de 2 α ♓ et de α du Cygne, de la manière suivante

Passage observé de 2 α ♓	$H = 20^h. 6'.30'',50$
Ascension droite calculée.....	$T = 20 . 6 .24 ,05$
Différence	$H - T = + 6'',45$
Passage observé de α du Cygne	$H' = 20^h.34'.21'',80$
Ascension droite calculée.....	$T' = 20 .34 .18 ,20$
Différence.....	$H' - T' = + 3'',60$
	$H - T = + 6 ,45$
	$H' - T' - (H - T) = - 2'',85$

On avait de plus en mesures sexagésimales

$$\Delta = 103°.11', \quad \Delta' = 45°.30', \quad D = 41°.10'.$$

Il suffit de connaître ainsi Δ, Δ' et D en minutes, sans aller jusqu'à l'exactitude des secondes. Avec ces données on trouve $\Delta - \Delta' = 57°.41'$, et ensuite

$$A = \frac{-2'',85.\sin\Delta.\sin\Delta'}{\sin(\Delta-\Delta')\sin D} = -3'',558.$$

La déviation était donc $-3'',558$ en tems ou $53'',37$ en arc. Son signe négatif indique qu'elle était *orientale* quand l'objectif était tourné vers le nord, comme nous l'avons supposé dans notre formule. Elle était par conséquent *occidentale* quand on tournait la lunette vers le sud.

Maintenant que A est connu, nous pourrons trouver r par une quelconque des deux équations primitives relatives à S et à S', nous aurons ainsi

Par 2 α ♓ .... $r = H - T - A\frac{\sin(D-\Delta)}{\sin\Delta} = 6'',45 - 3'',23 = 3'',22,$

Par α du Cygne $r = H' - T' - A\frac{\sin D - \Delta')}{\sin\Delta'} = 3'',60 - 0'',38 = 3'',22.$

La valeur de r étant positive nous apprend que la pendule avancerait de $3'',22$ sur le tems sydéral à l'époque de ces observations. Cette avance est exprimée en tems sydéral.

Cette méthode serait parfaite si elle ne supposait pas que l'on connaît les différences d'ascension droite. A la vérité, dans l'état actuel de l'astronomie ces différences peuvent être regardées comme connues à très-peu près. Mais pourtant il serait à desirer que l'on pût s'en passer si l'on entreprenait une recherche qui exigeât la dernière exactitude, ou seulement une exactitude plus grande encore que celle

que l'on a jusqu'à présent apportée à la détermination de cet élément.

On y parviendrait en observant la même étoile au-dessus et au-dessous du pôle. Alors on pourrait regarder ces deux passages comme appartenant à deux étoiles, dont l'une, celle qui passe la première, aurait pour ascension droite T, et pour distance polaire Δ; tandis que l'autre, celle qui passe la seconde et qui répond au passage inférieur, aurait pour ascension droite $T' = T + \frac{1}{2}R$, et pour distance polaire $\Delta' = 180^\circ - \Delta$. En mettant ces valeurs dans la formule générale [2], on aurait

$$\text{Pass. sup. obs. le premier } A = \frac{\{H - H' + \frac{1}{2}R\}\sin\Delta}{2\cos\Delta\sin D} \ldots [3]$$

Mais si l'on eût d'abord observé le passage inférieur à l'heure H'', ensuite le passage supérieur à l'heure H, il n'y aura qu'à remarquer que le passage inférieur suivant arrivera 24 heures après le premier, c'est-à-dire à l'heure $H'' + R$ de la pendule, et qu'il se trouvera postérieur à H. En substituant donc $H'' + R$, au lieu de H' dans la formule [3], on aura

$$\text{Pass. sup. obs. le dernier } A = \frac{\{H - H'' - \frac{1}{2}R\}\sin\Delta}{2\cos\Delta\sin D} \ldots [4]$$

H désigne toujours dans ces formules l'heure observée à l'instant du passage supérieur, et il faut compter les heures sans interruption depuis H'' jusqu'à H.

EXEMPLE. Le 1er. août 1789, M. Delambre observa la Chèvre au méridien inférieur à $H'' = 17^h.1'.18'',8$

Ajoutez $\frac{1}{2}R$ 12

$H'' + \frac{1}{2}R = 29^h.1'.18'',8$

Il observa ensuite le pass. sup. à $H = 29\ .1\ .18'',6$

Différence . . . . . $H - H'' - \frac{1}{2}R = -0'',2$

on avait de plus

$$\Delta = 44°.15', \qquad D = 41°.10;$$

avec ces données on trouve

$$A = -0'', 15 \qquad \text{orientale.}$$

Mais cette quantité est trop petite pour que l'on puisse en répondre dans une seule observation.

Cette manière de combiner les deux passages de la même étoile, a l'avantage d'employer une différence d'ascension droite exactement connue, puisqu'elle est nécessairement égale à une demi-circonférence. Mais d'un autre côté, cela suppose que la marche de la pendule est assez uniforme, ou du moins assez exactement connue, pour que l'on puisse en répondre pendant un intervalle de 12 heures. Or si cette exactitude est possible, du moins elle demande bien des précautions et des observations très-nombreuses.

On évitera cet inconvénient, sans perdre l'avantage de la méthode, en combinant les observations de deux étoiles circompolaires, de manière à faire disparaître du résultat le terme constant $\frac{1}{2} R$. Pour cela il faut choisir deux étoiles circompolaires presque opposées en ascension droite; on connaît un grand nombre de ces étoiles ainsi placées, et le choix est d'autant plus facile qu'il n'est nullement nécessaire que leur ascension droite soit connue. Il suffit de connaître à-peu-près leur distance au pôle. Quand on aura choisi deux étoiles S, s, ainsi placées, elles passeront dans le vertical de la lunette presque en même tems, l'une en haut, l'autre en bas. Que l'on observe d'abord S au méridien supérieur, et désignons par de petites lettres les quantités qui se rapportent à s, nous aurons d'après

les formules [3] et [4]

Pass. sup. de S obs. le 1er. . . $2A\frac{\cos\Delta\sin D}{\sin\Delta}=H-H'+\frac{1}{2}R$

Pass. sup. de s obs. le dernier $2A\frac{\cos\delta\sin D}{\sin\delta}=h-h''-\frac{1}{2}R.$

faisant la somme de ces équations, R disparaît, et l'on a

$$2A\frac{\sin(\Delta+\delta)\sin D}{\sin\Delta\sin\delta}=H-h''-(H'-h);$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{\{H-h''-(H'-h)\}\sin\Delta\sin\delta}{2\sin(\Delta+\delta)\sin D}.$$

Il faut se souvenir que h et h'' sont les heures des passages supérieurs et inférieurs de s; de même que H et H' sont les heures des passages supérieurs et inférieurs de S. Or, puisque par supposition les deux étoiles sont presque opposées en ascension droite, les différences de leurs passages opposés $H-h''$, $H'-h$ seront de petits intervalles de tems, sur la réduction desquels l'erreur de la marche diurne de la pendule aura très-peu d'influence. C'est l'avantage de la première méthode de M. Delambre. De plus, la formule est tout-à-fait indépendante de la différence d'ascension droite. C'est l'avantage de la seconde méthode, qui emploie les deux passages d'une même étoile circompolaire. Le procédé que nous venons d'exposer réunit donc les avantages des deux autres sans en avoir les inconvéniens. Mais il l'emporte encore sur eux par une autre considération qui est la petitesse du coefficient ..... $\frac{\sin\Delta.\sin\delta}{2\sin(\Delta+\delta)\sin D}$. Si l'on suppose les deux distances polaires Δ et δ égales entre elles, ce coefficient se réduit

à $\frac{\sin \Delta}{4.\cos \Delta \sin D}$; il est donc justement sous-double de celui que nous avons trouvé, en n'employant que deux passages d'une même étoile circompolaire ; d'où il suit que les erreurs des observations seront deux fois moins sensibles par cette nouvelle méthode que par l'ancienne.

Dans le cas que nous venons de considérer des deux distances polaires égales, le coefficient $\frac{\sin \Delta}{4.\cos \Delta \sin D}$ diminue à mesure que Δ devient moindre, ce qui affaiblit les erreurs des observations. Mais dans la pratique il y aurait de l'inconvénient à employer des étoiles trop voisines du pôle, parce que la lenteur de leur mouvement rendrait les observations de leurs passages beaucoup plus incertaines. Si l'on voulait supposer que la difficulté des observations est réciproque au sinus de la distance polaire Δ, ce qui paraît une évaluation assez naturelle, l'exactitude de la déviation ainsi calculée serait en raison directe du sin Δ et inverse du coefficient précédent, c'est-à-dire qu'elle serait proportionnelle à cos Δ. Dans cette hypothèse, il y aurait encore de l'avantage à observer le plus près possible du pôle. Au reste, l'observation seule peut indiquer dans chaque lieu la distance polaire la plus favorable pour la compensation de ces deux causes opposées. Mais afin qu'on apprécie l'influence de la distance polaire sur le coefficient, voici les valeurs du facteur, calculées pour la latitude de Paris et pour les diverses valeurs de la distance polaire supposée la même pour les deux étoiles.

DISTANCE POLAIRE.	FACTEUR.
1°.44′ la polaire.	$\frac{1}{87}$
10	$\frac{1}{15}$
20	$\frac{1}{7,2}$
30	$\frac{1}{4,56}$
40	$\frac{1}{3,13}$
45	$\frac{1}{2,63}$
50	$\frac{1}{2,2}$

On voit par ces résultats, qu'à la distance où se trouve l'étoile polaire, l'erreur de la déviation de la lunette serait $\frac{1}{87}$ de l'erreur des observations. A 10° de distance polaire, ce serait $\frac{1}{15}$, à 20° $\frac{1}{7,2}$, et ainsi de suite. Enfin, à 50° du pôle, l'erreur de la déviation ne serait encore que la moitié de celle des passages observés.

Dans un lieu donné on ne peut voir au-dessus et au-dessous du pôle que les étoiles dont la distance polaire est moindre que 90° — D, c'est-à-dire égale à la latitude du lieu. Telle est donc la limite de Δ et de δ dans la formule précédente. Et il s'ensuit que pour Paris cette limite est 48°.50.14.

Je joins ici un tableau des étoiles connues, qui sont placées convenablement pour ce genre d'observations sous la latitude de Paris. On en peut trouver beaucoup d'autres, puisqu'il n'est pas nécessaire de connaître leur différence d'ascension droite.

Mais avant de terminer, je dois à la justice de reconnaître que la première idée du procédé a été indiquée

par M. Butt, dans le journal de Nicholson. Je dis *indiqué*, parce que l'auteur remarquait eulement que dans tout vertical qui n'était pas le méridien, il devait exister une différence entre les passages supérieurs-inférieurs, inférieurs-supérieurs de deux étoiles *S* et *s* observées presque en même tems l'une au-dessus, l'autre au-dessous du pôle ; et il proposait cette inégalité comme un moyen facile et simple de reconnaître si un instrument des passages se trouvait ou non dans le méridien. Mais il ne donnait d'ailleurs aucune indication sur le calcul de la déviation de l'instrument, d'après les différences observées, ni même sur la possibilité de la mesurer par ce procédé. Il se bornait à dire que l'on pouvait la détruire par des bissections.

Liste des étoiles circompolaires qui sont à-peu-près opposées en ascension droite, et dont on peut voir les deux passages sur l'horison de Paris.

	ASCENSION DROITE de *S* en tems.			ASCENSION DROITE de *s* en tems.	
χ	Cassiopée. . .	$0^h.22'$	δ	Grande Ourse.	$12^h.\ 6'$
ζ	Cassiopée. . .	0 .26	χ	du Dragon. . .	12 .25
α	Cassiopée. . .	0 .30			
ν^2	Cassiopée. . .	0 .38			
γ	Cassiopée. . .	0 .45	ε	Grande Ourse.	12 .46
46	Andromède. .	1 .11			
δ	Cassiopée. . .	1 .13			
48	Andromède. .	1 .16	ζ	Grande Ourse.	13 .16
ζ	Andromède. .	1 .19			
φ	Andromède. .	1 .32			

Suite de la liste des étoiles circompolaires et opposées.

ASCENSION DROITE de *S* en tems.			ASCENSION DROITE de *s* en tems.		
ε	Cassiopée. . .	1h.41′	η	Grande Ourse	13h.40′
f	Cassiopée. . .	1 .47	α	du Dragon . .	13 .59
35	Cassiopée. . .	2 .13	χ	du Bouvier. .	14 . 7
θ	Persée.	2 .31	5*a*	Petite Ourse .	14 .28
γ	Persée.	2 .51	β	Petite Ourse .	14 .51
χ	Persée.	2 .57			
α	Persée.	3 .11	11	Petite Ourse .	15 . 7
2	Giraffe.	3 .14			
4	Giraffe.	3 .16			
6	Persée.	3 .17	ι	Dragon. . . .	15 .21
↓	Persée.	3 .23	γ	Petite Ourse .	15 .21
∂	Persée.	3 .29			
υ	Persée.	3 .32			
λ	Persée.	3 .52	ζ	Petite Ourse .	15 .51
			θ	Dragon. . . .	15 .58
μ	Persée.	4 . 1	γ	Hercule. . . .	16 .14
			η	Dragon. . . .	16 .21
9e.	Giraffe.	4 .35	σ	Hercule. . . .	16 .28
	La Chèvre. . .	5 . 3	ε	Petite Ourse .	17 . 6
			ζ	Dragon. . . .	17 . 8
			β	Dragon. . . .	17 .26
			γ′	Dragon. . . .	17 .26
			γ²	Dragon. . . .	17 .29
			85*i*	d'Hercule. . .	17 .35
			2*i*	Scorpion . . .	17 .34
			ω	Dragon. . . .	17 .38

Suite de la liste des étoiles circompolaires et opposées.

ASCENSION DROITE de *S* en tems.			ASCENSION DROITE de *s* en tems.		
♪	Cocher.	5h.44′	ξ	Dragon. . . .	17h.50′
β	Cocher.	5 .46	γ	Dragon. . . .	17 .52
2	Lynx.	6 . 3	♆²	Dragon. . . .	17 .58
42	Giraffe	6 .31	χ	Dragon. . . .	18 .24
43e	Giraffe	6 .33	♪	Petite Ourse .	18 .34
			ο	Dragon. . . .	18 .48
			50	Dragon. . . .	18 .52
			υ	Dragon. . . .	18 .57
57e	Giraffe	8 . 3	6′	Cygne.	20 . 7
ι	Grande Ourse.	8 .14	α	du Cygne. . .	20 .35
			η	Céphée	20 .41
θ	Grande Ourse.	9 .20	ξ	Cygne.	20 .58
υ	Grande Ourse.	9 .37	α	Céphée	21 .14
			β	Céphée	21 .26
			♪	Cygne	21 .27
λ	Grande Ourse.	10 . 6	π′	Cygne	21 .35
μ	Grande Ourse.	10 .11	ζ	Céphée	22 . 4
β	Grande Ourse.	10 .50	ε	Céphée	22 . 8
α	Grande Ourse.	10 .52	5	Lézard	22 .22
♆	Grande Ourse.	10 .59	7	Lézard	22 .23
λ	Dragon	11 .20	ι	Céphée	22 .43
			λ	Andromède. .	23 .28
χ	Grande Ourse.	11 .36	ι	Andromède. .	23 .29
γ	Grande Ourse.	11 .44	χ	Andromède. .	23 .31
			γ	Céphée. . . .	23 .32
			β	Cassiopée. . .	23 .59

SUR LA LONGUEUR DU PENDULE A SECONDES A DIFFERENTES LATITUDES.

Si l'on nomme l la longueur d'un pendule simple, t le tems d'une de ses oscillations, π le rapport de la circonférence au diamètre et g la pesanteur représentée par le double de l'espace que décrivent les corps pesans pendant la première seconde de leur chûte verticale; il existe entre ces quatre quantités la relation suivante :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

c'est-à-dire que les tems des oscillations de différens pendules simples sont proportionnels aux racines carrées de leurs longueurs, et réciproques aux racines carrées des pesanteurs qui les sollicitent; t se trouve ainsi exprimé en secondes.

Pour un autre pendule simple dont une oscillation se ferait dans le tems t', on aurait de même, en nommant l' sa longueur, la pesanteur restant constante

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}},$$

de là on tire

$$\frac{l'}{l} = \frac{t'^2}{t^2},$$

c'est-à-dire que *les longueurs de deux pendules simples*

sollicités par la même pesanteur, sont entre elles comme les carrés des tems de leurs oscillations.

Les valeurs de t et de t' sont faciles à déterminer par expérience. Soit N le nombre d'oscillations faites par le pendule l dans le tems T, on aura $t = \frac{T}{N}$, puisque toutes les oscillations sont d'égale durée ; on aura de même pour l'autre pendule $t' = \frac{T'}{N'}$. Ces valeurs substituées dans la formule précédente, donnent

$$\frac{l'}{l} = \frac{T'^2}{T^2} \cdot \frac{N^2}{N'^2},$$

on connaîtra donc les rapports des longueurs des deux pendules, d'après les nombres d'oscillations qu'ils exécutent dans des tems donnés. Si les tems que l'on compare ainsi sont égaux $T = T'$, et l'on a

$$\frac{l'}{l} = \frac{N^2}{N'^2},$$

c'est-à-dire que les longueurs de deux pendules simples sollicités par la même pesanteur, sont réciproquement proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations qu'ils exécutent dans des tems égaux.

C'est par cette formule que l'on calcule la longueur du pendule à secondes ; car il serait impossible de donner mécaniquement au pendule la longueur précise qu'il doit avoir pour faire exactement 86400 oscillations dans un jour, lorsqu'on se sert de la division sexagésimale ou 100000, quand on se sert de la division décimale du tems. Mais si l'on a observé un pendule simple, qui fait un certain nombre N d'oscillations dans un jour, soit moyen, soit sydéral, et que sa longueur soit l, on en conclut

aisément la longueur du pendule à secondes qui ferait N, oscillations dans le même tems ; car en nommant l' cette longueur inconnue, on a, par la formule précédente,

$$l' = \frac{l.N^2}{N'^2}.$$

Pour éviter d'avoir à faire des réductions considérables, on tâche d'approcher mécaniquement par des essais de la longueur cherchée ; alors N' est peu différent de N, et en nommant n la différence, de sorte que $N = N' + n$ la formule devient

$$l' = l + \frac{2ln}{N'} + \frac{l.n^2}{N'^2}.$$

Les deux derniers termes qui expriment la correction à faire au pendule observé, pour le réduire au pendule à secondes, sont très-petits et se calculent facilement.

Il faut maintenant dire comment on obtient la longueur l du premier pendule simple : car on sent qu'un pareil pendule, formé par un point pesant placé à l'extrémité d'un fil inflexible et sans masse, est purement idéal, et ne peut être obtenu que par des réductions mathématiques. Mais si l'on ne peut s'astreindre à sa définition rigoureuse, du moins on tâche de s'en rapprocher ; et pour cela on compose le pendule avec une sphère métallique, suspendue à l'extrémité d'un fil aussi métallique. Connaissant le poids de la boule, son diamètre, le poids du fil et sa longueur, on peut, d'après les formules de la mécanique, calculer les corrections extrêmement petites, qu'il faut faire à la longueur observée, pour la réduire à celle d'un pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même tems que le pendule composé que l'on a observé.

Cette expérience pour être bien faite, exige une infinité de précautions et de soins que l'on trouvera décrits avec le plus grand détail dans le travail sur la mesure du pendule, imprimé dans les volumes de *la Méridienne*; nous allons en donner une idée succincte.

D'abord il est avantageux que la boule soit faite de platine, le plus dense et le plus pesant de tous les métaux : par ce moyen, la résistance de l'air altère moins le mouvement du pendule, et les oscillations durent plus longtems. Par ce moyen aussi la correction due au poids du fil est moindre.

Par la même raison, il faut que le fil métallique soit aussi fin que possible, afin d'offrir moins de surface à l'air. Il faut qu'il soit bien homogène dans toutes ses parties, car on le suppose tel dans le calcul. Pour s'assurer de cette condition, on mesure une longueur donnée du fil, on la pèse, puis la coupant en deux parties égales, on pèse de nouveau chaque moitié, et l'on voit si leurs poids sont égaux. Il ne faut pas employer un fil de fer, de peur que le magnétisme terrestre qui agit sur ce métal, n'ajoute une nouvelle force à celle de la gravité que l'on veut observer.

Pour attacher le fil à la boule sans altérer la sphéricité de celle-ci, on fait une calotte métallique de même rayon que la boule, et qui s'applique exactement sur sa surface. Le fil s'attache à cette calotte par une vis. Lorsque cette calotte est bien travaillée, le seul contact favorisé par une couche imperceptible de quelque matière grasse, suffit pour déterminer l'adhésion des deux surfaces. La boule se trouve ainsi suspendue au fil métallique par le seul effet de cette adhésion, favorisée en cela par la pression de l'air qui presse la calotte sur la boule sans pouvoir s'insérer entre leurs surfaces.

Enfin pour pouvoir suspendre librement tout l'appareil, on attache le bout supérieur du fil à un couteau de suspension, tel que celui qui supporte la verge des horloges, et l'on pose le couteau sur deux plans fixes, bien polis et formés de pierre dure, auxquels on donne une position parfaitement horisontale, au moyen d'un niveau à bulle d'air. Ces plans sont enchâssés dans un grand plateau de fer qui s'attache sur des supports fixés et scellés dans une muraille solide, de manière à conserver une invariable immobilité. Tout cet appareil est représenté dans les planches 5 et 6.

Les choses ainsi préparées, il ne reste plus qu'à mettre le pendule en mouvement, et à compter les oscillations qu'il fait dans un tems donné. Mais il faut de plus avoir égard à la grandeur des arcs qu'il décrit, car les oscillations d'une étendue finie, sont plus longues que les oscillations infiniment petites, et lorsqu'elles se font dans des arcs peu considérables, leur durée augmente ainsi comme le carré du sinus de la moitié de l'arc décrit. Pour avoir égard à cette circonstance, on place devant le pendule une échelle horisontale divisée en parties égales, et dont on mesure la distance au centre de suspension. En observant sur cette échelle l'écart du pendule à droite et à gauche de la verticale, on peut aisément calculer l'angle qu'il décrit, et trouver la correction qu'il faut faire à chaque oscillation pour la réduire au cas de l'infiniment petit. Soit t' la durée observée d'une oscillation dans l'arc $2A$; t la durée d'une oscillation infiniment petite, on aura

$$t' = t\left\{1 + \frac{\sin^2 A}{16}\right\}.$$

Maintenant appelons N' le nombre d'oscillations faites par le pendule dans l'arc $2A$ et pendant le tems T; la durée

d'une de ces oscillations sera $\frac{T}{N'}$. Désignons par N le nombre des oscillations infiniment petites qu'il aurait faites dans le même tems T; la durée d'une seule de ces oscillations sera $\frac{T}{N}$. Substituant ces valeurs au lieu de T' et de t, dans la formule précédente, elle donne

$$N = N' \left\{ 1 + \frac{\sin^2 A}{16} \right\}.$$

Par ce moyen, quand on aura observé N', on aura N, c'est-à-dire le nombre d'oscillations infiniment petites que le même pendule aurait faites dans le même tems.

L'amplitude de l'arc dans lequel le pendule oscille va toujours en diminuant à cause de la résistance de l'air. Il est donc nécessaire d'avoir égard à ces variations. Si la durée totale de l'expérience est peu considérable, on mesure les amplitudes de l'arc au commencement et à la fin des observations, et l'on calcule la correction avec l'arc moyen $\frac{A+A'}{2}$, ce qui donne

$$N = N' \left\{ 1 + \tfrac{1}{16} \cdot \sin^2 \cdot \frac{(A+A')}{2} \right\}.$$

Mais si l'expérience dure plus longtems, il faut calculer la correction d'amplitude d'une manière plus exacte; pour cela, il faut partir de ce résultat, donné par les lois de la mécanique et confirmé par l'expérience, c'est que, lorsqu'un pendule oscille dans l'air, l'amplitude des arcs décrits diminue en progression géométrique, quand le tems croît en progression arithmétique; d'après cette loi, le calcul donne

$$N = N' \left\{ 1 + \frac{\sin A \,.\, \sin\{A - A'\}}{16\, M \log\left(\frac{A}{A'}\right)} \right\},$$

M étant le module des tables logarithmiques ordinaires, c'est-à-dire 2,3025850g. Pour ne pas interrompre la série des raisonnemens, je supprime ici la démonstration de cette formule. On la trouvera à la fin de ce chapitre.

En l'appliquant à toutes les oscillations observées, on les réduit au cas de l'infiniment petit, ce qui les rend toutes comparables entre elles, c'est-à-dire que l'on trouve par ce calcul le nombre d'oscillations infiniment petites que le pendule observé aurait faites dans le même tems.

Compter ainsi les oscillations une à une, serait une chose très-fastidieuse et sujète à beaucoup d'erreurs; voici le moyen que l'on emploie pour l'éviter. On place derrière le pendule une horloge que l'on règle avec soin sur les étoiles, c'est-à-dire, dont on détermine le mouvement par des observations astronomiques avec une extrême précision. Pour cela, un moyen très-simple et qui n'exige aucun appareil d'instrumens, c'est de sceller fixement dans une muraille solide, une lunette terrestre dirigée vers quelque grosse tour, ou sur une arête verticale de quelque édifice. Les étoiles qui passent dans le champ de cette lunette, en s'occultant derrière cet objet fixe, déterminent, par leurs retours diurnes, la durée du jour sydéral avec la dernière précision. Avant d'observer ainsi le mouvement de l'horloge, on la met en repos ainsi que le pendule; puis l'on fixe sur sa lentille une petite marque, par exemple, un petit cercle de papier blanc, et l'on place ce signal de manière qu'en le regardant d'un point fixe, éloigné d'environ 8 ou 10 mètres, avec une

lunette terrestre immobile, le centre du petit cercle se trouve exactement dans le vertical du fil du pendule. Cela fait, on met en mouvement le pendule et l'horloge. Supposons qu'alors le fil du pendule coïncide sur le signal : si le pendule et l'horloge vont exactement du même mouvement, ils ne se sépareront jamais; mais si leurs vîtesses sont inégales, comme cela arrive toujours, ils ne tardent pas à se quitter. Si c'est le pendule qui va plus vîte que l'horloge, il dépasse le signal, et gagnant sur lui de plus en plus, à mesure que les oscillations se multiplient, il finit par arriver à l'extrémité de son oscillation quand le signal ne fait que de passer à la verticale; alors il a gagné sur l'horloge une demi-oscillation. Le mouvement continuant toujours, cet excès augmente, et après un autre intervalle de tems à-peu-près égal, le fil du pendule et le signal passent en même tems à la verticale; mais ils marchent dans des directions opposées. Alors le pendule a gagné sur l'horloge une oscillation entière; continuant à gagner sur elle, il passe du côté opposé de la verticale, gagne encore une demi-oscillation, puis une oscillation entière; et enfin, après avoir gagné deux oscillations, il revient à la verticale en même tems que le signal, et en marchant dans le même sens. C'est ce que l'on appe le *une coïncidence*. Pour observer exactement l'époque de ce phénomène, on se sert du signal fixé sur la lentille de l'horloge. On place à sept ou huit mètres du pendule une lunette horisontale munie à son foyer d'un fil vertical que l'on dirige sur le fil métallique du peudule, quand il est dans son point de repos. La lunette fixée dans cette position, détermine l'instant des coïncidences, lorsque le pendule et le signal passent en même tems derrière le fil. Dans l'intervalle de deux coïncidences, on sait que le pendule gagne ou perd sur l'horloge deux oscillations,

selon qu'il va plus ou moins vîte qu'elle. Ainsi, pour savoir ce qu'il doit en gagner ou en perdre dans un jour sydéral, on fait la proportion suivante : N, nombre des oscillations faites par l'horloge entre deux coïncidences, est à $N \pm 2$ nombre d'oscillations du pendule dans le même tems, comme une révolution entière de la pendule ou R est au nombre d'oscillations correspondant du pendule. Soit P ce nombre, on aura par cette proportion

$$P = \frac{R.(N \pm 2)}{N} = R \pm \frac{2R}{N},$$

le second terme exprime l'avance ou le retard diurne du pendule sur l'horloge. Si celle-ci est sexagésimale, ... $R = 86400''$; si elle est décimale, $R = 100000''$. Plus l'intervalle des coïncidences sera considérable, plus le terme $\frac{2R}{N}$ sera petit, et par conséquent une petite erreur sur N sera moins sensible sur la différence que l'on cherche. Il est vrai qu'alors le pendule et l'horloge se quittant moins vîte, la coïncidence est plus difficile à observer ; mais la petitesse de la correction est un avantage qui surpasse cet inconvénient. Il faut donc s'efforcer par des essais, d'amener le pendule et l'horloge à avoir une marche peu différente l'un de l'autre, ce qui se fait par des essais en alongeant ou en raccourcissant le fil de suspension. Il faut ensuite appliquer au nombre $R \pm \frac{2R}{N}$ la correction de l'amplitude des arcs, afin de réduire les oscillations au cas de l'infiniment petit. On connaîtra ainsi le nombre d'oscillations du pendule en vingt-quatre heures de l'horloge; et comme celle-ci est supposée réglée sur les étoiles, on aura, par une simple proportion, le nombre des oscillations du pendule dans un jour sydéral.

On répète l'expérience sur un grand nombre de coïncidences, et l'on prend la moyenne des résultats.

Maintenant il ne reste plus qu'à trouver la longueur du pendule observé. Pour cela on le remet en repos. On a placé d'avance sous la boule métallique un petit plan d'acier bien horisontal, susceptible de se hausser et de se baisser par le moyen d'une vis, dont les filets fins et serrés, permettent d'opérer ainsi des mouvemens presque imperceptibles. Ce petit plan est fixé d'une manière invariable au-dessous de la boule de platine et dans la même verticale que son centre. Lorsqu'on veut mesurer la longueur du pendule, on élève peu-à-peu le petit plan jusqu'à ce qu'il vienne toucher la boule par dessous sans la soulever; alors on note la température, on ôte le pendule, et on lui substitue une règle divisée, suspendue de même par un couteau. Cette règle porte à son extrémité inférieure une languette mobile *LA*, que l'on amène en contact avec le petit plan d'acier. On connaît ainsi la distance de celui-ci au plan de suspension; c'est la longueur totale du pendule composé, prise depuis son point le plus haut jusqu'au bas de la boule. On fait à cette longueur les corrections relatives au diamètre de la boule, à son poids, à celui du fil et de la calotte, et l'on a la longueur du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même tems que le pendule observé. Il faut encore faire à ce résultat une petite correction dépendante de la densité de l'air, car cette densité diminue le poids de la boule d'une quantité égale au poids d'une boule d'air de même diamètre, et par conséquent elle diminue la pesanteur dans le rapport de ces mêmes poids. On démontre en mécanique que la présence de l'air n'influe sur la durée des oscillations que de cette seule manière; sa résistance n'altère point leur

durée totale, parce que si elle augmente la durée de chaque demi-oscillation descendante, en retardant le mouvement de la boule, elle diminue par la même cause la durée de chaque demi-oscillation ascendante de la même quantité : de sorte qu'il n'en résulte aucun changement dans l'oscillation totale. Je donnerai dans les notes la formule qui présente ces diverses corrections réunies.

Dans toutes les réductions précédentes, il faut avoir soigneusement égard à la température du fil métallique, afin de corriger sa longueur des variations qu'elle peut éprouver. Quand la température a changé pendant la série des diverses coïncidences, on regarde toutes les observations comme se rapportant à la température moyenne de la série; et si le contact du petit plan d'acier sous la boule de platine a été effectué à une température un peu différente, on le ramène par le calcul à cette température moyenne, en ôtant ou ajoutant à la longueur mesurée la quantité dont le fil métallique a dû s'alonger ou se raccourcir par suite de ces variations. Car le pendule dont on cherche à mesurer la longueur doit être celui dont on a observé les coïncidences, et non pas un pendule plus long ou plus court. En outre il faut éviter avec le plus grand soin de donner à l'air environnant la moindre agitation qui pourrait modifier le mouvement naturel du pendule. Par toutes ces raisons, on enveloppe l'appareil d'une cage de verre, et l'on place les thermomètres dans son intérieur. On doit même envelopper aussi d'une seconde cage de verre, l'horloge devant laquelle le pendule oscille; car sans cette précaution la lentille et la boule se communiqueraient mutuellement une partie de leur mouvement par l'intermède de l'air interposé ; et comme la boule du pendule est beaucoup moins pesante, la durée de ses oscillations pourrait éprouver ainsi des changemens considérables. Enfin lorsqu'on a établi le contact du

plan d'acier avec la boule de platine ou avec la barre qui sert à mesurer la longueur, il ne faut pas adopter aussitôt cette longueur comme exacte; car la seule présence de l'observateur dans l'intérieur des cages de verre pendant quelques minutes, suffit pour élever la température et pour dilater sensiblement la barre qui sert de mesure, ou le fil métallique auquel la boule de platine est suspendue. Lorsqu'on a établi un premier contact, il faut se retirer, fermer l'appareil et le laisser douze ou quinze minutes de tems, pour qu'il reprenne sa première température. Alors, en retournant vérifier le contact, on trouve presque toujours qu'il n'a plus lieu. On le rétablit donc; mais cette fois, comme il restait peu de chose à faire, on ne demeure dans l'appareil que quelques instans fort courts. Dans une seconde vérification on reste moins de tems encore, et enfin on parvient par quelques essais, à établir un contact permanent; c'est alors que l'on observe les thermomètres, et que l'on note la température où ce contact a eu lieu.

Au moyen de toutes ces précautions, on obtient avec une extrême exactitude la longueur du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le vide, dans le même tems que le pendule composé que l'on a observé. Désignons cette longueur par l; supposons de plus que le pendule observé fasse $N' + n$ oscillations dans un jour sydéral, représenté par N'; enfin nommons l' la longueur cherchée du pendule à secondes; nous obtiendrons l' par la formule

$$l' = l + \frac{2ln}{N'} + \frac{ln^2}{N'^2},$$

que nous avons donnée plus haut.

Enfin il reste encore à réduire cette longueur à ce qu'elle serait, si l'observation eût été faite au niveau

de la mer. En effet, la pesanteur diminue à mesure que l'on s'éloigne de ce niveau, et l'on démontre en mécanique que les longueurs des pendules synchrônes sont proportionnelles aux pesanteurs qui les sollicitent. Il s'ensuit qu'il faut raccourcir le pendule à mesure qu'on s'élève, si l'on veut qu'il fasse toujours le même nombre d'oscillations dans le même tems. Soit donc g l'intensité de la pesanteur dans le lieu de l'observation, dont la hauteur sur le niveau de la mer est h. Nommons (g) l'intensité de cette force au niveau de la mer et à la même latitude, le rayon de la terre en ce point étant a; on sait que ces intensités sont réciproques au carré de la distance au centre de la terre. On aura donc $\frac{(g)}{g} = \frac{(a+h)^2}{a^2}$, ou simplement $\frac{(g)}{g} = 1 + \frac{2h}{a}$; en négligeant le carré de la fraction $\frac{h}{a}$ qui est toujours très-petite. Ainsi, pour réduire au niveau de la mer le pendule à secondes calculé dans le lieu de l'observation, il faudra le multiplier par $1 + \frac{2h}{a}$, c'est-à-dire qu'en le nommant l' comme nous l'avons dit tout-à-l'heure, on aura

Long. du pendule à secondes au niv. de la mer $= l' + \frac{2hl'}{a}$.

La méthode précédente est la plus exacte de toutes celles que l'on a employées pour ce genre d'expériences. En l'appliquant avec les soins qu'elle exige, elle donne entre les résultats partiels une exactitude surprenante. J'en donnerai pour exemples les observations suivantes faites par M. Mathieu et moi à Dunkerque en 1809.

Expériences du pendule faites à Dunkerque.

JOURS.	NOMBRE d'oscillations de l'horloge dans un jour solaire moyen.	NOMBRE d'oscillations du pendule dans un jour solaire moyen.	LONGUEUR du pendule dans l'air.	LONGUEUR du pendule à secondes décimales dans le vide calculée.	ÉCARTS autour de la moyenne.
			m	m	m
Févr. 1809 27	100035,265	100008,170	0.7419044	0.7420718	−0.0000148
28	100035,034	100007,425	0.7419249	0.7420812	− 54
		100007,071	0.7419366	0.7420874	+ 8
Mars..... 1	100034,928	100007,753	0.7419257	0.7420867	+ 1
		100007,080	0.7419266	0.7420775	− 91
2	100034,928	100007,874	0.7419210	0.7420842	− 24
		100007,706	0.7419230	0.7420837	− 29
4	100035,444	100007,193	0.7419368	0.7420896	+ 30 (*)
		100007,145	0.7419346	0.7420866	+ 0
	100035,244	100006,670	0.7419339	0.7420788	− 78
		100006,584	0.7419594	0.7421029	+ 163
6	100035,044	100008,057	0.7419372	0.7421030	+ 164
7	100034,882	100007,367	0.7416362	0.7420918	+ 52

Moyenne, ou longueur du pendule décimal à Dunkerque . . . 0m.7420866

On voit que le point de suspension de la boule a été changé le 4 mars. Ce changement avait pour objet de compenser les erreurs qui auraient pu provenir d'un défaut d'homogénéité dans la boule. Il faut toujours avoir cette précaution dans le cours des expériences.

(*) Même fil que dans les expériences précédentes, seulement la boule est suspendue par le point opposé. Cette nouvelle disposition de l'appareil a été maintenue pendant les six dernières séries.

La méthode que je viens d'exposer a été imaginée par Borda ; et il en a fait usage, conjointement avec M. de Cassini, pour déterminer la longueur du pendule à secondes à l'Observatoire de Paris. Nous avons depuis employé cette méthode, Arago, Mathieu, Bouvard et moi, sur divers points de l'arc de la méridienne depuis Formentera jusqu'à Dunkerque, et nous avons pu apprécier toute son exactitude. La seule modification que nous y ayons faite consiste à avoir rendu l'appareil portatif sans lui avoir rien ôté de sa précision. Car le pendule dont s'était servi Borda n'avait pas moins de quatre mètres de longueur, au lieu que celui dont nous faisons usage n'a guère que soixante-seize centimètres. Cette nouvelle disposition de l'appareil était indispensablement nécessaire pour que nous pussions l'employer dans nos voyages. La principale cause de cette simplification consiste dans l'extrême exactitude du procédé qui nous sert à mesurer la longueur de notre pendule : cette exactitude nous dispense de chercher une plus grande précision dans une augmentation de longueur. Notre mesure se fait au moyen d'un instrument portatif et d'un très-petit volume, avec lequel on rend sensibles jusqu'à des millièmes de millimètre. Cet instrument, que l'on appelle *comparateur*, est indépendant des erreurs de division auxquelles des verniers sont sujets, lorsqu'on s'en sert pour mesurer toujours à-peu-près dans les mêmes points d'un limbe ou d'une règle divisée. On en trouvera une courte description dans une note placée à la fin de ce chapitre, et j'exposerai en même tems la manière d'en faire usage. Je souhaite que l'extrême simplicité de cet appareil, et sa parfaite exactitude encouragent les voyageurs instruits à s'occuper davantage des expériences du pendule lorsqu'ils parcourent des contrées où l'on n'a pas encore pu mesurer un arc du méridien terrestre. De pa-

reilles observations seraient extrêmement utiles pour la connaissance de la figure de la terre, sur-tout si elles étaient faites dans l'hémisphère austral, auquel les observations de La Caille semblent donner un applatissement différent de celui que l'on observe sur l'hémisphère boréal.

Pour ne pas interrompre le raisonnement j'ai omis une disposition qu'il est fort utile de donner au couteau de suspension, afin qu'il n'altère pas le mouvement du pendule. Elle consiste d'abord à faire en sorte que le centre de gravité de ce couteau se trouve extrêmement près de l'arête de suspension; en outre il faut qu'il soit surmonté par une vis mobile, comme on le voit dans la planche 5, afin de pouvoir faire varier son centre d'oscillation. Par ce moyen, on règle le couteau de manière que ses oscillations isolées soient à fort peu près les mêmes que celles du pendule total. Alors en effet la masse du couteau n'a aucune influence pour accélérer ou retarder son mouvement; et il est comme s'il n'existait pas. Pour arriver à ce but, nous commençons par accorder à-peu-près le couteau seul avec l'horloge, ensuite on y attache le fil du pendule, et l'on accorde encore le tout avec l'horloge, ou du moins on fait en sorte que les oscillations soient longtems à se séparer; cela se fait en alongeant ou raccourcissant le fil. Alors le couteau et le pendule se trouvent aussi à-peu-près d'accord. Je dis à peu près, car il est impossible qu'il n'y ait pas à cet égard quelque différence; mais l'influence de cette différence est comme anéantie par le peu de distance du centre de gravité du couteau à la ligne de suspension. Ce procédé ingénieux a été pareillement imaginé par Borda. Il s'était assuré de son exactitude, en répétant successivement la mesure du pendule à secondes avec deux couteaux réglés de cette manière, mais dont les

poids étaient très-différens ; et il avait trouvé qu'il n'en résultait aucun changement dans les coïncidences. On peut apprécier encore mieux la précision de ce procédé au moyen du calcul ; mais cela suppose des considérations mécaniques qui ne sauraient trouver place ici. On les trouvera dans le quatrième volume de *la Méridienne*.

Au moyen de la méthode précédente, les variations du pendule à secondes à différentes latitudes, deviennent sensibles, même pour des parallèles qui ne sont pas très-éloignés les uns des autres. Je choisirai pour exemple les observations suivantes qui ont été faites sur divers points de la méridienne française, entre Formentera et Dunkerque. Elles donnent, pour chacun de ces points, les longueurs du pendule décimal qui, placé au niveau de la mer, ferait 100000 oscillations dans un jour solaire moyen.

Noms des lieux.	Latitudes.	Hauteur au-dessus du niveau de la mer.	Longueur du pendule mesurée.	Longueur du pendule au niveau de la mer.	Noms des observateurs.
Formentera.	38°.39'.46"	196m	0,7412061	0,7412517	Arago, Chaix, Biot.
Figeac.	44 .36 .45	220	0,7415730	0,7416243	Mathieu, Biot.
Bordeaux.	44 .50 .25	0	0,7416151	0,7416151	Mathieu, Biot.
Clermont.	46 .48 . 4	406	0,7416211	0,7417157	Mathieu, Biot.
Paris.	48 .50 .14	80	0,7419076	0,7419262	Bouvard, Mathieu, Biot.
Dunkerque.	51 . 2 . 8	0	0,7420865	0,7420865	Mathieu, Biot.

Les intensités de la pesanteur varient dans le même rapport que les longueurs précédentes. En effet soient l' l'' les longueurs du pendule simple, observées dans des lieux différens où les intensités de la pesanteur sont,

représentées par g' et g''. On aura, d'après les formules que nous avons données,

$$1'' = \pi \sqrt{\frac{l'}{g'}}, \qquad 1'' = \pi \cdot \sqrt{\frac{l''}{g''}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{l'}{l''} = \frac{g'}{g''}.$$

Les observations montrent que les longueurs observées croissent avec les latitudes. Il en résulte donc que la pesanteur terrestre s'accroît de l'équateur au pôle, dans le même rapport que ces longueurs.

On démontre par la théorie de l'attraction, qu'en supposant la terre elliptique, la longueur du pendule simple varie proportionnellement au carré du sinus de sa latitude, de sorte qu'en nommant la latitude L, et l la longueur du pendule à secondes, la valeur de l est exprimée par une fonction de la forme

$$l = A + B \sin^2 L,$$

A et B étant deux constantes, dont la première représente la longueur du pendule à l'équateur où L est nul, et la seconde est l'excès du pendule au pôle sur le pendule à l'équateur. Ces deux constantes peuvent se déterminer par deux observations du pendule faites à deux latitudes connues, car soient l' l'' les longueurs observées, et L' L'' les latitudes, on aura

Par la 1re..... $l' = A + B \sin^2 L'$,

Par la 2e..... $l'' = A + B \sin^2 L''$,

en soustrayant ces équations l'une de l'autre, on en tire

$$B = \frac{l'' - l'}{\sin^2 L'' - \sin^2 L'} = \frac{l'' - l'}{(\sin L'' + \sin L')(\sin L'' - \sin L')}$$
$$= \frac{l'' - l'}{\sin\{L'' + L'\}\sin\{L'' - L'\}}.$$

Connaissant B on substituera sa valeur dans les deux équations précédentes, et on aura celle de A par une quelconque de ces équations.

Si l'on applique ces formules aux observations de Formentera et de Dunkerque, on trouve

$$A = 0^m,7397310, \quad B = 0^m,0038962,$$

alors la formule générale devient

$$l = 0^m,7397310 + 0^m,0038962 \sin^2 L.$$

En calculant l'observation de Paris par cette formule ainsi déterminée, et comparant le résultat du calcul à celui des expériences, on trouve

Par le calcul.....	$0^m,7419393$,
Par l'expérience.....	0, 7419145,
Différence....	$0^m,0000248$.

La différence est de l'ordre des erreurs que comportent les observations les plus exactes.

Mais au lieu de partir de deux observations seulement, il est plus avantageux de chercher les valeurs qui représentent le mieux l'ensemble des observations. C'est ce que M. Mathieu a fait, d'après la méthode des moindres carrés, et voici ses calculs qu'il a bien voulu me communiquer.

Si l'on forme les valeurs de $\sin^2 L$ pour tous les lieux où les observations sont faites, l'expression analytique $A + B \sin^2 L$ représentera dans chaque lieu la longueur du pendule en retranchant cette expression de la longueur observée, les différences que nous nommerons $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$...., représenteront les erreurs de l'hypothèse elliptique ; on formera ainsi les six équations de condition suivantes :

$$0{,}7412517 - A - B.0{,}3903417 = E',$$
$$0{,}7416[illegible] - A - B.0{,}4932370 = E'',$$
$$0{,}7416[illegible] - A - B.0{,}4972122 = E''',$$
$$0{,}7417157 - A - B.0{,}5136117 = E^{IV},$$
$$0{,}7419262 - A - B.0{,}5667721 = E^{V},$$
$$0{,}7420865 - A - B.0{,}6045628 = E^{VI}.$$

On déterminera les valeurs de B et de A par le principe des moindres carrés, c'est-à-dire, de manière que la somme des carrés des erreurs E', E'', E''', etc., soit la plus petite possible. Pour cela, il faudra, d'après la règle rapportée à la page 302 du texte (tom. II), et démontrée dans la note de la page suivante, former les équations du *minimum* par rapport à A et B. Comme le coefficient de A est l'unité dans toutes les équations de condition, la condition du *minimum*, par rapport à cette inconnue, sera donnée par leur somme divisée par 6 et égalée à zéro. On trouve ainsi,

$$0{,}7417032[illegible] - A - B.0{,}5109625 = 0.$$

En multipliant chaque équation de condition par le coefficient de B dans cette équation ; on aura les résultats suivans :

$$-0{,}28934145 + A.0{,}3903417 + B.0{,}15236664,$$
$$-0{,}36579654 + A.0{,}4932370 + B.0{,}24328274,$$
$$-0{,}36874007 + A.0{,}4972122 + B.0{,}24721997,$$
$$-0{,}38095386 + A.0{,}5136117 + B.0{,}26379698,$$
$$-0{,}42050307 + A.0{,}5667721 + B.0{,}32123061,$$
$$-0{,}44863789 + A.0{,}6045628 + B.0{,}36549618.$$

La somme de toutes ces quantités divisée par 6 et égalée à zéro, donnera

$$-0{,}37899548 + A.0{,}51095625 + B[illegible] = 0,$$

c'est l'équation du *minimum* par rapport à B. L'élimination de B entre cette équation et la précédente conduira à celle-ci

$$+0{,}00033207 - A.0{,}00448923 = 0,$$

d'où l'on tire

$$A = 0^m{,}73970326.$$

C'est la longueur du pendule à l'équateur. Lorsqu'on aura substitué cette valeur de A dans la première équation, on trouvera

$$B = 0^m{,}00391368 92.$$

La longueur absolue du pendule déduite des expériences précédentes sera donc, en général,

$$l = 0^m{,}73970326 + 0^m{,}00391368 92 \sin^2 L.$$

D'après la théorie de l'attraction, l'applatissement de la terre est égal au nombre 0,00865 moins la valeur du coefficient B divisé par la longueur du pendule à l'équa-

teur. Ici nous avons trouvé cette longueur égale à... 0,739703526 et $B = 0,003913689 2$; nous aurons donc

$$\frac{B}{A} = \frac{0,003913689 2}{0,739703526} = 0,005290 89 ;$$

par conséquent si l'on nomme α l'applatissement, on aura

$$\alpha = 0,00865 - 0,005291 = 0,003359 ,$$

ou en renversant la fraction

$$\alpha = \frac{1}{297,7} .$$

Cette valeur diffère bien peu de l'applatissement qui est donné par la théorie de la lune, et par la mesure comparée des degrés en France et sous l'équateur. Ces résultats qui n'étaient pas encore calculés lors de l'impression du premier livre, détruisent la différence que j'y avais annoncée page 109, entre les valeurs de l'applatissement données par les observations du pendule et par les mesures des degrés de latitude ; différence que l'ensemble des observations du pendule faites par d'autres observateurs avait jusqu'ici paru indiquer.

NOTE.

J'ai promis de démontrer la formule rapportée page 154, pour la correction des amplitudes ; voici cette démonstration.

Nommons $2a$ l'arc dans lequel le pendule oscille, en sorte que a soit l'angle qu'il décrit de part et d'autre de la verticale. Pendant le tems qu'il emploie à faire une oscillation entière dans cet arc, il ferait un peu plus d'une oscillation infiniment petite ; il en ferait $1 + \frac{\sin^2 a}{16}$; ceci est un résultat de mécanique.

Supposons donc, qu'en partant de cette amplitude, on laisse le pendule osciller dans l'air; l'arc a diminuant continuellement, deviendra a', a''.... $a^{(n)}$; les nombres correspondans d'oscillations infiniment petites seront $1+\frac{\sin^2 a'}{16}$, $1+\frac{\sin^2 a''}{16}$, et ainsi de suite; en sorte qu'après un nombre n d'oscillations finies, écoulées depuis l'époque où l'écart du pendule était a, le nombre des oscillations infiniment petites correspondantes sera la somme de tous les termes précédens, c'est-à-dire,

$$n+\frac{\sin^2 a'}{16}+\frac{\sin^2 a''}{16}+\frac{\sin^2 a'''}{16}+\ldots\ldots+\frac{\sin^2 a^{(n)}}{16};$$

ainsi pour obtenir ce nombre en termes finis, il faut sommer la série qui s'ajoute à n. Pour cela nous nous appuierons sur ce principe d'expérience que les arcs a', a'', décroissent en progression géométrique quand le nombre des oscillations croît en progression arithmétique. Comme ces arcs sont fort petits, on pourra établir la même loi entre leurs sinus, c'est-à-dire, qu'en partant de l'instant où l'écart du pendule était a, on aura, après n oscillations,

$$\sin a^{(n)}=\frac{\sin a}{K^n},$$

K étant un coefficient constant pour le même pendule et dépendant de sa longueur, de sa forme et de ses autres qualités physiques. Cette loi, que Borda avait remarquée et que nous avons vérifiée par l'expérience, pourrait aussi se déduire de la théorie, en supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vîtesse; peut-être n'aurait-elle plus lieu pour de très-grands angles; mais il nous suffit qu'elle soit exacte dans le cas où nous voulons l'employer. D'après cela, on peut exprimer chacun des termes de la série en fonction du premier; et en représentant leur somme par S, on aura

$$S=\frac{\sin^2 a}{16}\left\{\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}+\frac{1}{K^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{K^n}\right\}.$$

Les termes compris entre les parenthèses formant une progression géométrique, on peut les sommer; et l'on a alors

$$S=\frac{\sin^2 a}{16}\cdot\frac{K^n-1}{(K-1)K^n}.$$

On peut éliminer K, et ne laisser dans la formule que le premier terme a et le dernier $a^{(n)}$; en effet, on a

$$\sin a^{(n)} = \frac{\sin a}{K^n} \text{ par conséquent } K^n = \frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} \text{ et } K = \sqrt[n]{\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}};$$

d'où l'on tire

$$S = \frac{\sin a \left\{ \sin a - \sin a^{(n)} \right\}}{16. \left\{ \left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\}}$$

La résistance de l'air est très-petite dans nos expériences, parce que notre boule de platine est très-pesante, et que le fil qui la soutient présente très peu de surface; cela fait que l'amplitude décroît avec beaucoup de lenteur; de sorte qu'en général, les arcs a et $a^{(n)}$ sont toujours peu différens. On peut profiter de cette circonstance pour extraire la racine n^e. de $\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}$ par approximation. Cela peut se faire aisément par le moyen des logarithmes; car on a, dans les logarithmes ordinaires,

$$\left\{ \frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} \right\}^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{+\log \left\{ \frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} \right\}}{n}};$$

or, en développant le second membre,

$$\left\{ \frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} \right\}^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{M}{n} \cdot \log \frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} + \frac{M^2}{1.2.n^2} \log^2 \frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} + \text{etc.},$$

M étant le module des tables logarithmiques, ou 2,302585. Mais comme $\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}$ diffère très-peu de l'unité, on peut se borner à la première puissance de son logarithme; et en introduisant ce résultat dans l'expression de S, il vient

$$S = \frac{n \sin a \cdot \left\{ \sin a - \sin a^{(n)} \right\}}{M\, 16. \log \frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}};$$

par conséquent, la somme des oscillations infiniment petites correspondantes à n oscillations finies du pendule sera

$$n\left\{1+\frac{\sin a\,.\left\{\sin a-\sin a^{(n)}\right\}^2}{16.M.\log\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}}\right\}.$$

La petitesse des arcs a, $a^{(n)}$ dans les expériences, permet de les substituer à leurs sinus, et, par conséquent, d'écrire $\sin\left\{a-a^{(n)}\right\}$ au lieu de $\sin a-\sin a^{(n)}$. On aura ainsi la formule que j'ai énoncée dans le texte. Borda substituait de plus l'arc moyen $\frac{a+a^{(n)}}{2}$ au lieu de l'arc a, dans le premier facteur; ce qui est, en effet, permis, puisque l'on néglige le carré de $a-a^{(n)}$; et comme au lieu de $\sin\left\{\frac{a-a^{(n)}}{2}\right\}$ il mettait $\frac{1}{2}\sin\left\{a+a^{(n)}\right\}$, l'expression de la correction était

$$\frac{n\sin\left\{a+a^{(n)}\right\}\sin\left\{a-a^{(n)}\right\}}{32\,M\,.\log\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}},$$

C'est ainsi qu'il l'a donnée, sans démonstration, dans son beau Mémoire sur la Mesure du pendule, inséré dans les volumes de la *Méridienne*. La différence de cette formule avec la nôtre sera nulle dans les applications; ces corrections s'éleveront tout au plus à deux ou trois oscillations sur 100000, si l'on ne fait pas les arcs trop grands.

Il ne me reste plus qu'à donner la formule dont nous nous sommes servis pour réduire le centre de figure de la boule à son centre d'oscillation, pour faire les corrections relatives au poids du fil, de la calotte, à la pesanteur de l'air, en un mot, pour ramener le pendule observé à l'état du pendule simple. Notre formule diffère un peu de celle que Borda employait, et qu'il a consignée dans son Mémoire sur le pendule, parce qu'en opérant avec un appareil quatre fois plus court que le sien, nous avons dû pousser un peu plus loin l'approximation relativement à certaines quantités qui auraient pu devenir sensibles dans nos expériences, quoiqu'elles ne le fussent pas dans son appareil. Comme la formule renferme un assez grand nombre de quan-

tités, je vais, pour fixer les idées, rapporter, avec les lettres qui les désignent, leurs significations et les valeurs numériques qu'elles avaient dans nos appareils; cela pourra servir de guide à ceux qui voudraient faire de semblables observations. Les longueurs sont exprimées en parties du mètre, et les poids en grammes.

Distance de l'axe de suspension au centre de la boule de platine..... $= L$

Rayon de la boule de platine à la température de 0°..... $= R = 0^m,01826014$

Poids de la boule de platine en grammes. $= M = 5265,457$

Distance de l'axe de suspension jusqu'au bas de la boule..... $= \Lambda$

Distance de l'axe de suspension au commencement du fil..... $= b = 0^m,02343$

Distance du centre de gravité de la calotte au centre de la boule..... $= D = 0^m,0200985$

Poids de la calotte en grammes..... $= m = 6^g,168$

Poids du fil en grammes. Variable.... $= p = \frac{\{\Lambda - b - 2R\}}{2,007}\ 0^g,2465$

Le nombre $0^g,2465$ était le poids d'une longueur de notre fil égale à $2^m,007$.

Quand toutes ces quantités seront connues par l'observation, le pendule simple synchrone avec le pendule observé, aura pour longueur dans le lieu,

$$l = L\left\{1 + \frac{2R^2}{5L^2}\right\} - Q,$$

en supposant

$$Q = \frac{\frac{p}{6M}\left\{L+b+R+\frac{2(bR-R^2-b^2)}{L}\right\} + \frac{m}{M}\left\{D-\frac{D^2}{L}\right\} + \frac{pR^2}{5ML^2}\left\{L+b-R\right\} - \frac{2mR^2}{5ML^2}\left\{L-D\right\}}{1 + \frac{p}{2M}\left\{1+\frac{b-R}{L}\right\} + \frac{m}{M}\left\{1-\frac{D}{L}\right\}}.$$

En calculant l'influence des erreurs que peuvent introduire la conformation de l'appareil et les diverses approximations que l'on est obligé de faire pour appliquer le calcul à ses diverses parties, je me suis assuré qu'aucune de ces erreurs ne peut influer dans la formule pour plus de $\frac{1}{1000}$ de millimètre dans les cas les plus défavorables.

NOTE.

Description et usage du Comparateur.

Le comparateur est un instrument qui sert, comme son nom l'indique, pour comparer entre elles des longueurs peu différentes les unes des autres, et son but est d'indiquer leurs plus petites différences avec une extrême précision.

Il est essentiellement composé d'une règle métallique TR, pl. 5 et 6, qui doit être bien droite et assez forte pour se fléchir difficilement. Cette règle, à l'une de ses extrémités, porte un talon T, qui sert à appuyer un des bouts des mesures que l'on compare. Un châssis mobile RR parcourt la surface de la règle, et peut se fixer à volonté sur un quelconque de ses points, au moyen de deux fortes vis de pression RR.

Ce châssis forme la partie essentielle du comparateur; il porte un tourillon fixe c autour duquel tourne le levier coudé bcb', dont les deux branches b b' ont des longueurs inégales, qui sont entre elles comme 1 à 10. Il suit de là que si l'on pousse le sommet b du petit bras d'une quantité égale à x, le bout du grand bras b' décrit autour du centre commun, un angle dix fois plus considérable, par conséquent égal à $10x$. Pour mesurer ce mouvement, on applique sur le châssis un arc circulaire DD, divisé en cinquièmes de millimètres, et l'on fixe à l'extrémité du grand bras b' un vernier qui permet d'évaluer les dixièmes de cette division, par conséquent les cinquantièmes de millimètre; et comme les mouvemens du point V sont décuples de ceux du point b, on voit que chaque partie indiquée par le vernier répond en b à deux millièmes de millimètre.

Maintenant, quand on veut comparer avec cet instrument les longueurs de deux règles B, B' très-peu différentes l'une de l'autre, on place l'une d'elles, B par exemple, sur le comparateur, de manière qu'elle repose librement sur sa surface, et que l'une de ses extrémités soit appuyée contre le talon T; puis on amène le châssis vers l'autre extrémité de B, et on le presse contre cette extrémité jusqu'à ce que le vernier V réponde à-peu-près au milieu de la

division. Cela fait, on serre les vis de pression du châssis, et on s'écarte de l'appareil pendant quelque tems pour lui laisser reprendre la température du lieu. Il est bon d'avoir un thermomètre placé sur la surface même de la règle ou du comparateur.

Quand on pense que la température du lieu s'est rétablie dans l'appareil, on se rapproche et on lit la division à laquelle répond le vernier; puis sans déplacer le châssis du comparateur, on ôte la règle B, on lui substitue la règle B', et on laisse encore la température se rétablir. Alors on revient lire de nouveau l'indication du vernier. Si la division est la même que pour la règle B, les deux règles sont égales en longueur; si la division est différente, l'arc parcouru par le vernier indique en cinq-centièmes de millimètre, la différence des longueurs.

Nous avons supposé que la température de l'appareil reste constante pendant toute l'opération. Il faut toujours s'efforcer d'atteindre cette condition en se plaçant à l'ombre, dans de grandes salles où la température varie peu. Mais si, malgré toutes ces précautions, il survenait quelques changemens dans la température, on réduirait les longueurs mesurées et l'intervalle TT' du comparateur à la même température, au moyen des dilatations connues des métaux. Lorsque le comparateur et les règles que l'on compare sont de même métal, ces corrections sont inutiles, parce qu'alors l'intervalle TT' du comparateur se dilate exactement comme la règle qui est posée sur sa surface, et par conséquent, leur différence reste constante, malgré le changement de leur température. Comme les métaux les plus employés sont le cuivre et le fer, je joindrai ici leur dilatation pour 1° du thermomètre centésimal, et pour une longueur égale à l'unité,

$$\text{Dilatation du cuivre.....} \quad C = 0{,}0000178,$$
$$\text{du fer.....} \quad F = 0{,}0000114.$$

Lorsque l'on veut se servir d'un comparateur, il faut commencer par vérifier les divisions de son vernier, ou du moins il faut les rapporter, ainsi que toutes les autres divisions dont on fait usage, à un étalon bien connu, que l'on puisse toujours retrouver et vérifier lui-même. Je donnerai plus bas le moyen qu'il faut employer pour cet objet.

Je me bornerai à dire ici que toutes les observations, toutes les

mesures dont je viens de parler, ne doivent pas se faire à l'œil nu, mais avec une forte loupe qui permette de lire exactement les divisions. Il est aussi extrêmement important que le contact des règles avec le talon du comparateur et avec le petit levier soit bien établi, et l'on ne saurait y donner trop d'attention.

De la règle qui sert à mesurer la longueur du pendule, et de la manière la plus avantageuse de la diviser.

La règle qui sert à mesurer le pendule devant être elle-même mesurée sur le comparateur, il faut que ses deux extrémités soient parfaitement libres. Cependant il faut aussi pouvoir la suspendre à la place du pendule, de manière que son extrémité supérieure se trouve dans le plan même de suspension. On atteint ces deux conditions au moyen du couteau percé représenté dans la planche 5. Quand on veut mesurer le pendule, on ajuste ce couteau sur la tête de la règle, on le serre par le moyen d'une vis, et l'on examine s'il est bien en contact avec elle. L'opération faite, on ôte le couteau et on porte la règle sur le comparateur. Il faut que la tête de la règle soit d'acier trempé, afin que le tranchant du couteau ne puisse pas y pénétrer; car si cela arrivait, le sommet de la règle se trouverait élevé au-dessus du plan de suspension, et la longueur mesurée serait plus grande que celle du pendule.

Le couteau étant fixé sur la règle, et celle-ci étant suspendue à la place du pendule, on pousse doucement sa languette jusqu'à ce qu'elle touche le petit plan d'acier que l'on avait précédemment amené en contact avec la boule de platine. Nous avons expliqué cette opération, pag. 157. Le contact établi et vérifié, on serre la vis d'arrêt de la languette, on retire la règle et on la porte sur le comparateur.

C'est ici le cas de dire qu'avant de faire sortir la languette, l'artiste a tracé sur la règle et sur la languette des divisions égales qui les traversent l'une et l'autre, et qui sont marquées par ordre 0, 1, 2, 3, ... etc.; ainsi on peut juger que la languette est rentrée complètement, lorsque sa division 0 coïncide avec la division 0 de la règle, et qu'il en est de même de toutes les autres divisions correspondantes. Mais si le n°. 0 de la languette coïncide avec le n°. 1 du vernier, le n°. 2 avec le n°. 3, et ainsi de suite, on doit conclure que la languette est sortie d'une division, et en général, la

différence des numéros des divisions coïncidentes indique la quantité dont la languette a marché ; par conséquent, si l'on connaît la longueur absolue de la règle lorsque la languette est rentrée, et si l'on connaît aussi la valeur des divisions, la somme de la règle et des divisions donnera directement la longueur totale qu'il s'agissait de mesurer.

Cela suffirait si la quantité dont on fait sortir la languette répondait toujours à un nombre exact de divisions ; mais cette exactitude est comme impossible. Il arrive presque toujours que la coïncidence n'est point exacte, et que la languette sort d'un certain nombre de divisions, plus ou moins une fraction qu'il s'agit de déterminer.

C'est alors que le comparateur est utile. On y porte la règle et on amène le châssis mobile en contact avec l'extrémité de la languette, de manière que le vernier réponde à-peu-près au milieu des divisions ; puis, lorsque la température uniforme s'est rétablie, on lit ce vernier ; et l'on fait ensuite marcher la languette de manière à compléter la coïncidence des divisions. La marche du vernier indique la quantité de ce mouvement. C'est précisément la fraction que l'on voulait déterminer. On l'ajoute à la longueur absolue de la règle et au nombre de divisions entières de la languette ; la somme est la longueur totale cherchée.

Dans une des règles qui a servi à nos expériences, les divisions marquaient des cinquièmes de millimètre. La longueur absolue de cette règle, la languette étant rentrée, était $0^m,6999828$, à la température de la glace fondante, ou en millimètres 699,9828 ; nous nommerons ce nombre β. Le 27 février 1809, la longueur du pendule d'expérience se trouva égale à β plus 300 divisions entières, plus une fraction qu'il s'agissait de déterminer, et que nous représenterons par x. L'expression de la longueur cherchée était donc, en millimètres, $\beta + 60 + x$; on la porta sur le comparateur, le vernier marqua 117 parties et $\frac{2}{10}$, ou $117,2 \cdot p$; ainsi, en désignant par A la longueur constante, mais inconnue, qui aurait ramené le vernier à zéro, on avait

$$\beta + 60 + x = A + 117,2 \cdot p ;$$

mais après avoir amené la languette à la coïncidence la plus voisine, qui était la 301e., le vernier a marqué 121 parties ; on avait donc alors

$$\beta + 60,2 = A + 121,0\, p ,$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on en tire

$$x - 0^{m},^{m},2 = -3,8.p \quad \text{ou} \quad x = 0^{m}\,^{m},2 - 3,8.p.$$

Puisque chaque partie du vernier vaut $\frac{2}{1000}$ de millimètre, ou $0^{mm},002$, $3,8.p$ valent $0^{mm},0076$, par conséquent, $x = 0^{mm},1924$ et la longueur totale devient

$$\beta + 60 + 0,9924 \text{ ou } 760^{m},^{m},1752.$$

N'oublions pas que toutes ces observations de coïncidences doivent se faire avec le plus grand soin et avec des microscopes très-forts, afin de donner plus d'exactitude au résultat. Il est presque impossible que les divisions soient assez régulières pour qu'on puisse les faire coïncider toutes à-la-fois; mais on tâche de satisfaire le mieux possible à leur ensemble; et comme leur nombre est considérable, puisqu'elles doivent être fort petites, cette compensation donne aux coïncidences une constance singulière, que l'on peut éprouver par le vernier du comparateur lui-même; car en détruisant et rétablissant la coïncidence sur les mêmes divisions, on le voit toujours revenir au même point.

C'est par la même méthode que l'on peut vérifier les divisions de la languette et celles du vernier, en les comparant à un étalon bien connu. Commençons par les premières. On déterminera d'abord le nombre de divisions de la languette et du vernier [illegible], pris ensemble, égalent l'étalon dont il s'agit. Cette comparaison s'opère en posant la règle sur le comparateur avec la languette, et plaçant l'étalon sur son prolongement. Puis, quand on a lu le vernier, on ôte l'étalon, et on fait sortir la languette d'un nombre de divisions entières, le plus approchant de la longueur de l'étalon; le reste de la différence s'évalue en parties du vernier. Cela fait, on détermine combien une division de la languette vaut de parties du vernier, en voyant de combien elle le fait marcher. Ces deux comparaisons donnent deux équations du premier degré, qui déterminent la valeur des divisions de la languette et du vernier en parties de l'étalon, auquel on les a comparées.

NOTE II.

Calcul numérique des réductions qu'il faut faire à la longueur mesurée du pendule pour en déduire celle du pendule à secondes.

La première de ces réductions concerne la mesure même. Supposons que des coïncidences du pendule et de l'horloge aient été observées à la température t, et que le contact du plan d'acier ait eu lieu à la température t', en sorte que $t' - t$ soit l'excès de la seconde sur la première. Si l'on nomme C la dilatation du fil métallique du pendule que nous avons toujours pris de cuivre, sa longueur primitive étant supposée égale à A lors des coïncidences, sera augmentée A $C(t' - t)$ à l'instant du contact. Il faudra donc la diminuer de cette quantité; de plus, nous avons supposé que la longueur β de la règle divisée était connue pour la température de la glace fondante. Par conséquent si la mesure de la longueur a été faite avec cette règle à la température t'', chacune de ses parties a dû se dilater d'une quantité Ft'', en représentant sa dilatation propre par F, pour l'unité de longueur. Il faut donc augmenter, dans cette proportion, le nombre des divisions qu'elle indique pour la ramener au terme de la glace fondante auquel on a évalué sa longueur; mais comme ces corrections sont toujours très-petites, on peut les faire sur la longueur même du pendule que la règle indique, c'est-à-dire, que si l'on trouve cette longueur égale à A, il faut lui substituer..... $A\{1 - C(t' - t) + Ft''\}$ ou $A - AC(t' - t) + AFt''$. Le premier terme représente la mesure même et les deux autres les corrections de dilatation. Nommons A' cette valeur ainsi corrigée.

La réduction précédente étant faite, on connaît la longueur totale du pendule composé, depuis le plan de suspension jusqu'au bas de la boule de platine. Il en faut retrancher le rayon de cette boule pour avoir la distance du centre au plan de suspension. Je nommerai cette distance L. Soit R le rayon de la boule à la température de la glace fondante; appelons P la dilatation du platine pour 1° du thermomètre centésimal. Nous avons déjà nommé t la température lors

des coïncidences ; ainsi le rayon de la boule était alors égal à $R\{1+Pt\}$, c'est donc cette quantité qu'il faut retrancher de A pour avoir L, ce qui donne

$$L = A' - R\{1+Pt\},$$

suivant les expériences de Borda, on a

$$P = 0{,}000008565.$$

On démontre, en mécanique, que lorsqu'une sphère pesante oscille à l'extrémité d'un fil sans masse, le centre d'oscillation est au-dessous du centre de la sphère d'une quantité égale à $\frac{2R^2}{5L}$. Il faut donc ajouter cette quantité à L pour réduire le pendule composé à l'état du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même tems. De plus, comme le fil et la calotte ne sont pas dépourvus de pesanteur, il faut encore faire une petite correction pour avoir égard à leur poids. Nous avons donné la formule de cette correction dans la page 173. En la représentant par Q nous aurons

$$\text{longueur du pendule dans l'air, } L' = A' - R(1+Pt) - \frac{2R^2}{5L} - Q.$$

Pour réduire cette longueur à ce qu'elle serait dans le vide, il faut savoir que, à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^m{,}76$, la densité du platine peut être évaluée à 15910, celle de l'air étant 1. Par conséquent sous la pression p et à la température t observée lors des coïncidences la densité de l'air a dû être

$$\frac{p}{0^m{,}76\{1+t.0{,}00375\}15910},$$

celle du platine étant l'unité. La longueur L' doit donc être augmentée dans cette proportion, ce qui donne

$$\text{long. du pend. dans le vide } L'' = L' + \frac{L'p}{0^m{,}76\{1+t.0{,}00375\}15910}.$$

Il est maintenant facile de déduire de ces résultats la longueur du pendule à secondes qui ferait N' oscillations dans un jour solaire, car

en supposant que le pendule observé eu fasse $N'+n$, on aura par la formule de la page 159,

$$\text{long. du pend. à secondes } L''' = L'' + \frac{2L''n}{N'} + \frac{L''n^2}{N'^2},$$

enfin il ne reste plus qu'à réduire ces observations au niveau de la mer. Soit h la hauteur de la station en mètres, a le rayon de la terre aussi en mètres; le pendule réduit au niveau de la mer sera $L''' + \frac{2hL'''}{a}$.

Pour compléter le tableau de ces opérations, j'en joindrai ici un exemple numérique.

Calcul de la longueur du pendule à secondes observée à Dunkerque, le 27 février 1809, *par MM. Mathieu et Biot.*

Observations des coïncidences.

Coïncidence n°. 2, n'existe pas à $7^h.53'.35''$ Mathieu.
7 53 40 Biot.

exacte à.... $7^h.54'.45''$ Mat.
54 10 Biot. } $7^h.54'.27'',5$

passée à.... $7^h.55'.35''$ Mathieu.
55 0 Biot.

Bar. $0^m,77425$. Therm. Bar. $= +9°,1$. Therm. Air $= +7,23$.
Demi-amplitude mesurée sur l'éch. horis. $A' = 4^{par.},6 = 1°.8'.33''$

Le pendule va *moins vite* que l'horloge.

Coïncidence n°. 3, n'existe pas à $9^h.50'.30''$
50 40

exacte à.... $9^h.51'.20''$
51 30 } $9^h.51'.25''$

passée à.... $9^h.52'.35''$
52 45.

Bar. $0^m,77405$. Ther. Bar $= +9°,6$. Ther. Air $= +7°,78$.
Amplitude. $2^{par.}$, $8 = 0°,41'.44''$.

Ce tableau renferme plusieurs résultats qui ont besoin d'explications. Notre règle divisée est destinée à la mesure du pendule à secondes décimales ; et avec la languette qui la termine, elle n'a pas plus de $0^m,77$. Il fallait donc faire le pendule à-peu-près décimal, et comme il ne doit pas différer beaucoup de l'horloge, on conçoit qu'il nous fallait une horloge décimale. Comme nous n'en avions point à notre disposition, on en prit une sexagésimale ; mais on changea le balancier et on lui en substitua un autre propre à battre les secondes décimales ; ce nouveau balancier étant compensé par un artifice à-peu-près pareil à celui que l'on emploie dans les chronomètres. Nous avons déterminé la marche de notre horloge par un grand nombre d'observations astronomiques ; et à l'époque de l'observation que je viens de rapporter, elle faisait 100035,265 oscillations dans un jour solaire moyen. D'ailleurs le tableau de sa marche diurne rapportée page 161, montre qu'elle était parfaitement régulière.

La manière dont nous observions les coïncidences est celle que j'ai décrite pag. 154; mais afin de les fixer avec plus de justesse, nous établissions les limites entre lesquelles elles se trouvaient comprises, et nous pouvions alors compter davantage sur l'instant où chacun de nous séparément avait cru devoir les fixer ; on prenait ensuite la moyenne de ces deux indications.

D'après ces observations, on peut trouver le nombre d'oscillations que le pendule aurait faites dans un jour moyen. Nous avons expliqué la méthode pag. 156.

1re. coïncidence	$7^h.54'.27'',5$
2e.	$9\ 51\ .25\ ,0$
Différence ou intervalle de deux coïncidences. . .	$1^h.56'.57'',5$

ce qui forme un nombre d'oscillations égal à 7017,5.

Pendant ce tems, le pendule a perdu deux oscillations sur l'horloge, c'est-à-dire, qu'il en a fait 7015,5 ; ainsi, pendant que l'horloge ferait 100000 oscillations, il en perdrait proportionnellement un nombre exprimé par $\frac{2.100000}{7017,5} = 28'',50$.

Mais la correction due à l'amplitude des arcs étant calculée par la formule de la page 154, donne $1'',575$ à ajouter par jour au nombre d'oscillations finies du pendule, pour les réduire au cas de l'infiniment

petit. Cette quantité doit donc être soustraite de son retard diurne 28″, 50, ce qui le réduit à 26″.93.

Ainsi, pendant que l'horloge faisait 100000 oscillations, ce pendule aurait fait un nombre d'oscillations infiniment petites égal à 100000 — 26,93 ; or, en un jour solaire moyen, l'horloge faisait un nombre d'oscillations égal à 100000 + 35,265, par conséquent, le nombre d'oscillations faites par le pendule en un jour moyen se trouvera par la proportion suivante : 100000 oscillations de l'horloge sont à 100000 — 26,93 oscillations du pendule, comme la marche de l'horloge en un jour moyen ou 100000 + 35,265 est à la marche du pendule en un jour moyen. Ce dernier nombre sera ainsi égal à $\frac{\{100000 - 26''.93\}\{100000 + 35'',265\}}{100000}$ ou

$$100000 + 35,265 - 26,93 - \frac{26.93 \cdot 35.265}{100000}$$
$$= 100000 + 8,335 - 0,009 = 100008,326,$$

le dernier terme — 0,009 étant toujours très-petit dans ces expériences, on peut le regarder comme constant dans le même lieu, et alors tout le calcul se réduit à une simple soustraction.

Venons maintenant à la mesure de la longueur : c'est celle que nous avons rapportée pag. 177, et elle a été trouvée de 760^{mm},1752 depuis le plan de suspension jusqu'au bas de la boule. Nous avons nommé A cette longueur.

La tempér. moyenne lors des coïncidences était.	$t = +7°,54$
lors du contact du plan . . .	$t' = +8°,22$
Excès de la température lors du contact. . .	$t' - t = +0°,68$
Température lors du contact de la barre . .	$t'' = +8°,49$

Or, le fil du pendule était de cuivre et la règle était de fer ; ainsi la longueur A corrigée de la dilatation de ces deux métaux, sera

$$A' = 760,1752 + 760,17\{-C.0°,68 + F.8°,49\};$$

nous emploierons, d'après Borda,

la dilatation du cuivre.... $C = 0,0000178$,

du fer..... $F = 0,0060114$,

avec ces données on trouve

$$A' = 760{,}1752 + 0{,}064373 = 760{,}239573.$$

La même mesure faite avec une autre barre donnait 760,229953, on a pris la moyenne des deux résultats, et l'on a eu. . $A' = 760{,}234763$

Otez le rayon de la boule $R\{1 + P.7^{o},54\}$. . . . . $18{,}26013$

$L = 741{,}974250$

Réduction au centre d'oscillation. . . . . $\frac{2R^2}{5L} = +0{,}179734$

$742{,}153984$

Correction pour le poids du fil et de la calotte, calculée par la formule de la pag. 173 . . . . $+0{,}249586$

Longueur du pendule simple dans l'air. . . . . $L' = 741{,}904398$

Réduction au vide pag. 180 . . . . . $+0{,}046117$

Longueur du pendule dans le vide . . . . . $L'' = 741{,}950515$

Réduction au pendule à secondes. . . . . $+0{,}121239$

Longueur du pendule à secondes dans le vide. . $L''' = 742{,}071754$

ou en mètres . . . . . $0^{m},7420718$

La réduction au niveau de la mer est insensible, parce que la station de Dunkerque n'était élevée que de 2 ou 3 mètres au-dessus de ce niveau.

MÉTHODE GÉNÉRALE

POUR

DÉTERMINER LES ORBITES DES COMÈTES.

PAR M. LAPLACE (*).

CETTE méthode sera divisée en deux parties ; dans la première, nous donnerons le moyen d'avoir à-peu-près la distance périhélie, et l'instant du passage de la comète par ce point; dans la seconde, nous déterminerons exactement tous les élémens de l'orbite, en supposant ceux-ci à-peu-près connus.

Détermination approchée de la distance périhélie, et de l'instant du passage de la comète par ce point.

1°. On choisira trois ou quatre ou cinq, etc., observations de la comète, également éloignées les unes des autres autant qu'il sera possible; on pourra embrasser, avec quatre observations, un intervalle de 30 degrés; avec cinq observations, un intervalle de 36 ou 40 degrés, et ainsi du reste;

(*) Cette addition importante est textuellement tirée du bel ouvrage de M. Laplace, intitulé : *Théorie du mouvement et de la figure des Planètes.* Cet ouvrage étant devenu aujourd'hui extrêmement rare, j'ai obtenu de l'auteur la permission d'insérer ici l'extrait de la méthode qu'il y avait donnée pour la détermination des orbites des comètes; ce qui complètera de la manière la plus utile l'ensemble des méthodes que je me suis proposé d'offrir pour le calcul de toutes les observations astronomiques.

mais il faudra toujours que l'intervalle compris entre les observations, soit d'autant plus grand qu'elles sont en plus grand nombre, afin de diminuer l'influence de leurs erreurs.

Cela posé, soient β, β', β'', β''', etc., les longitudes géocentriques successives de la comète; γ, γ', γ'', γ''', etc., les latitudes boréales correspondantes, les latitudes australes devant être supposées négatives. On divisera la différence $\beta' - \beta$ par le nombre des jours qui séparent la seconde de la première observation; on divisera pareillement la différence $\beta'' - \beta'$ par le nombre des jours qui séparent la troisième de la seconde observation; on divisera encore la différence $\beta''' - \beta''$ par le nombre des jours qui séparent la quatrième de la troisième observation, et ainsi de suite; soit $\delta\beta$, $\delta\beta'$, $\delta\beta''$, $\delta\beta'''$, etc., la suite des ces quotiens.

On divisera la différence $\delta\beta' - \delta\beta$ par le nombre des jours qui séparent la troisième de la première observation; on divisera pareillement la différence $\delta\beta'' - \delta\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la quatrième de la seconde observation; on divisera encore la différence $\delta\beta''' - \delta\beta''$ par le nombre des jours qui séparent la cinquième de la troisième observation, et ainsi du reste; soit $\delta^2\beta$, $\delta^2\beta'$, $\delta^2\beta''$, etc., la suite de ces quotiens.

On divisera la différence $\delta^2\beta' - \delta^2\beta$ par le nombre des jours qui séparent la quatrième de la première observation; on divisera pareillement la différence $\delta^2\beta'' - \delta^2\beta'$ par le nombre des jours qui séparent la cinquième de la seconde observation, et ainsi du reste; soit $\delta^3\beta$, $\delta^3\beta'$, etc., la suite de ces quotiens. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on parvienne à former $\delta^{n-1}.\beta$, n étant le nombre des observations employées. Cela fait,

2°. On prendra une époque moyenne, ou à-peu-près moyenne entre les instans des deux observations extrêmes,

et en nommant i, i', i'', i''', etc., le nombre des jours dont elle précède chaque observation; i, i', etc., devant être supposés négatifs pour toutes les observations antérieures à cette époque; la longitude de la comète après un petit nombre z de jours comptés depuis l'époque, sera exprimée par la formule

$$\beta - i.\delta\beta + i.i'.\delta^2.\beta - i.i'.i''\,\delta^3.\beta + i.i'.i''.i'''.\delta^4.\beta - \text{etc.}$$
$$+ z.\left\{\begin{array}{l}\delta.\beta - (i+i').\delta^2.\beta + (i.i'+i.i''+i'.i'').\delta^3.\beta \\ \quad - (i\,i'i''+i\,i'i'''+i.i''.i'''+i'.i''.i'''').\delta^4.\beta \\ \quad + \text{etc.}\end{array}\right\} \ldots (p)$$
$$+ z^2.\left\{\begin{array}{l}\delta^2\beta - (i+i'+i'').\delta^3.\beta + (i.i'+i.i''+i.i''' \\ \quad + i'.i''+i'.i'''+i''.i''').\delta^4\beta - \text{etc.}\end{array}\right\}$$

Les coefficiens de $-\delta.\beta$, $+\delta^2\beta$, etc., dans la partie indépendante de z, sont : 1°. le nombre i; 2°. le produit des deux nombres i et i'; 3°. le produit des trois nombres i, i', i'', etc.

Les coefficiens de $-\delta^2.\beta$, $+\delta^3.\beta$, $-\delta^4.\beta$, etc., dans la partie multipliée par z, sont : 1°. la somme des deux nombres i et i'; 2°. la somme des produits deux à deux, des trois nombres i, i', i''; 3°. la somme des produits trois à trois, des quatre nombres i, i', i'', i''', etc.

Les coefficiens de $-\delta^3.\beta$, $+\delta^4.\beta$, $-\delta^5.\beta$, etc., dans la partie multipliée par z^2, sont : 1°. la somme des trois nombres i, i', i''; 2°. la somme des produits deux à deux, des quatre nombres i, i', i'', i'''; 3°. la somme des produits trois à trois, des cinq nombres i, i', i'', i''', i'''', etc.

En opérant de la même manière sur les latitudes de la comète, sa latitude, après le nombre z de jours depuis l'époque, sera exprimée par la formule suivante :

$$\gamma - i.\delta\gamma + i.i'.\delta^2.\gamma - i.i'.i''.\delta^3.\gamma + i.i'.i''.i'''.\delta^4\gamma - \text{etc.}$$

$$+ z.\left\{\begin{array}{l}\delta\gamma - (i+i').\delta^2\gamma + (i.i'+i.i''+i'.i'').\delta^3\gamma \\ \quad -(i.i'.i''+i.i'.i'''+i.i''.i'''+i'.i''.i''').\delta^4\gamma \\ \quad + \text{etc.}\end{array}\right\} \ldots (q)$$

$$+ z^2.\left\{\begin{array}{l}\delta^2.\gamma - (i+i'+i'').\delta^3.\gamma + (i.i'+i.i''+i'.i'' \\ \quad +i'.i''+i'.i'''+i''.i''').\delta^4\gamma - \text{etc.}\end{array}\right\}$$

Cela posé, on aura α égal à la partie indépendante de z, dans la formule (p).

En réduisant en secondes le coefficient de z, et en retranchant du logarithme de ce nombre de secondes, le logarithme 3,5500072, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par a.

En réduisant en secondes le coefficient de z^2, en prenant ensuite le logarithme du double de ce nombre de secondes, et en retranchant de ce logarithme le suivant, 1,7855894, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par b.

On aura ensuite θ égal à la partie indépendante de z, dans la formule (q).

En réduisant en secondes le coefficient de z, dans cette formule, et en en retranchant 3,5500072, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par h.

En réduisant en secondes le coefficient de z^2 dans cette même formule, et en retranchant 1,7855894 du logarithme du double de ce nombre de secondes, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par l.

C'est de la précision des valeurs de a, b, h, et l, que dépend l'exactitude de la méthode suivante, et comme leur formation est très-simple, il faut choisir et multiplier les observations, de manière à les obtenir avec toute la rigueur que ces observations comportent. Ces quantités sont les dif-

férentielles $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$; $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$; $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, que nous avons exprimées, pour plus de simplicité, par les lettres précédentes.

Si le nombre des observations est impair, on pourra fixer l'époque à l'instant de l'observation moyenne, ce qui dispensera de calculer les parties indépendantes de z, dans les deux formules précédentes; car il est visible que ces parties sont respectivement égales à la longitude et à la latitude de l'observation moyenne.

Pour éclaircir ce qui vient d'être dit, par un exemple, nous choisirons la seconde comète que M. Méchain a découverte, en 1781, et dont il a calculé l'orbite d'après cette méthode; les observations que ce savant astronome a choisies pour cet objet, sont rapportées à la même heure du jour, savoir à 8 heures 29′ 44″ tems moyen à Paris: voici ces observations.

	Longitude géocentrique de la comète.	*Latitude boréale.*
1781. Nov. 14	$307°.14'.45'' = \beta$	$55°.17'.\ 9'' = \gamma$
17	$306°.57'.32'' = \beta'$	$44°.17'.12'' = \gamma'$
19	$306°.51'.26'' = \beta''$	$39°.14'.48'' = \gamma''$
22	$306°.44'.53'' = \beta'''$	$33°.49'.\ 1'' = \gamma'''$
25	$306°.41'.37'' = \beta''''$	$29°.58'.43'' = \gamma''''$

En prenant pour époque l'instant de l'observation moyenne, c'est-à-dire, le 19 novembre à $8^h.29'.44''$, on a

$$i = -5,\quad i' = -2;\quad i'' = 0,\quad i''' = 3,\quad i'''' = 6,$$

ce qui donne

$\delta\beta = -5'.44'',33$	$\delta\gamma = -3°.39'.59'',0$
$\delta\beta' = -3'.3'',0$	$\delta\gamma' = -2°.31'.12'',0$
$\delta\beta'' = -2'.11'',0$	$\delta\gamma'' = -1°.48'.35'',667$
$\delta\beta''' = -1'.5'',53$	$\delta\gamma''' = -1°.16'.46'',0$
$\delta^2\beta = 32'',266$	$\delta^2\gamma = 13'.45'',4$
$\delta^2\beta' = 10'',4$	$\delta^2\gamma' = 8'.31'',267$
$\delta^2\beta'' = 10'',945$	$\delta^2\gamma'' = 5'.18'',2[illegible]$
$\delta^3\beta = -2'',733$	$\delta^3\gamma = -39'',2666$
$\delta^3\beta' = 0'',0681$	$\delta^3\gamma' = -24'',1236$
$\delta^4\beta = 0'',2546$	$\delta^4 = 1'',3766$

La formule (p) donnera donc pour la longitude géocentrique de la comète après le petit nombre x de jours comptés depuis l'époque,

$$306°.51'.26'' - 153'',46.x + 10'',54.x^2,$$

et la formule (q) donnera pour l'expression de sa latitude,

$$39°.14'.48'' - 7855'',16.x + 535'',4.x^2,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 306°.51'.26'',$$
$$a = -0,0432501, \quad b = 0,345366,$$
$$\theta = 39°.14'.48'',$$
$$h = -2,213844, \quad l = 17,54354.$$

2°. On déterminera par les tables astronomiques la longitude de la terre vue du soleil, à l'instant que l'on a choisi pour époque : soit A cette longitude, R la distance corres-

pondante de la terre au soleil, et R' la distance qui répond à la longitude $90° + A$, de la terre ; on formera les quatre équations

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta} + 2Rx.\cos(A-\alpha) + R^2 \ldots (1)$$

$$y = \frac{R.\sin(A-\alpha)}{2}.\left\{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right\} - \frac{bx}{2a} \ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} r = &- x.\left\{h.\tang\theta + \frac{l}{2h} + \frac{a^2.\sin\theta.\cos\theta}{2h}\right\} \\ &+ \frac{R.\sin\theta.\cos\theta}{2h}.\cos(A-\alpha).\left\{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right\} \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = &y^2 + a^2.x^2 + \left\{y.\tang\theta + \frac{hx}{\cos^2.\theta}\right\}^2 \\ &+ 2y.\left\{(R'-1).\cos(A-\alpha) - \frac{\sin(A-\alpha)}{R}\right\} \\ &+ 2ax.\left\{(R'-1).\sin(A-\alpha) + \frac{\cos(A-\alpha)}{R}\right\} \\ &+ \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r}. \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Pour tirer de ces équations les valeurs des trois inconnues x, y et r, on commencera par considérer si, abstraction faite du signe, b est plus grand ou moindre que l; dans le premier cas, on fera usage des équations (1), (2) et (4); on formera une première hypothèse pour x, en le supposant, par exemple, égal à l'unité; et l'on en tirera, au moyen des équations (1) et (2), les valeurs de r et de y; on substituera ensuite ces valeurs dans l'équation (4), et si le reste est nul, ce sera une preuve que la valeur de x a été bien choisie; mais si ce reste est négatif, on augmentera la valeur de x, et on la diminuera, si le reste est positif. On aura ainsi, au moyen d'un petit nombre d'essais, les véri-

tables valeurs de x, y et r; mais comme ces inconnues peuvent être susceptibles de plusieurs valeurs, il faudra choisir celle qui satisfait exactement ou à-peu-près à l'équation (3).

Dans le second cas, c'est-à-dire, si l'on a $l > b$, on fera usage des équations (1), (3) et (4), et alors ce sera l'équation (2) qui servira de vérification.

Ayant ainsi les valeurs de x, y et r, on formera la quantité

$$P = \frac{x}{\cos^2\theta}.\{y + hx.\tang\theta\} + Ry.\cos(A-\omega)$$
$$+ x\left\{(R'-1).\cos(A-\omega) - \frac{\sin(A-\omega)}{R}\right\}$$
$$+ Rax.\sin(A-\omega) + R.(R'-1).$$

La distance périhélie D de la comète sera

$$D = r - \tfrac{1}{2}.P^2;$$

le cosinus de l'anomalie v de la comète, sera donné par l'équation

$$\cos^2\tfrac{1}{2}v = \frac{D}{r};$$

d'où l'on conclura par la table du mouvement des comètes, le tems employé à parcourir l'angle v (*). Pour avoir l'instant

(*) Nommons, comme ci-dessus, D la distance périhélie de la comète, U son anomalie, c'est-à-dire l'angle formé par son rayon vecteur avec l'axe de la parabole qu'elle décrit, enfin t le tems écoulé depuis le passage au périhélie. Cela posé, d'après les lois du mouvement parabolique, le tems t et l'anomalie U sont liés ensemble par la relation suivante

$$(1) \ldots\ t = \frac{D^{\frac{3}{2}}\,T}{\pi\sqrt{2}}\left\{\tang\tfrac{1}{2}U + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}U\right\},$$

dans laquelle π est la demi-circonférence, ou 3,14159265, et T la

du passage par le périhélie, il faudra ajouter ce tems à l'époque, si P est négatif, et le soustraire si P est positif, parce que dans le premier cas, la comète s'approche du périhélie, et que, dans le second cas, elle s'en éloigne.

Relativement à la seconde comète de 1781, l'époque [illegible] fixée comme ci-dessus, au 19 novembre à $8^h.29'.44''$, on a, à cette époque,

$$A = 57°.57'.4'',$$

$$R = 0{,}987248, \quad R' = 0{,}988820,$$

les équations (1), (2), (3) et (4) deviennent ainsi

$$r^2 = 1{,}66[illegible]387.x^2 - 0{,}7106137.x + 0{,}974653\ldots(1)$$

$$y = -11{,}0665 + \frac{10{,}6484}{r^3} + 3{,}9927.x\ldots(2)$$

$$y = 5[illegible]71014.x + \frac{0{,}03931687}{r^3} - 0{,}04086053\ldots(3)$$

$$0 = y^2 + 0{,}00187057.x^2$$
$$+ \{0{,}[illegible]169372.y - 3{,}691334.x\}^2 - 1{,}8820446.y\ldots(4)$$
$$+ [illegible]0324357.x + 1{,}026006 - \frac{2}{r}.$$

Comme on a dans ce cas particulier $l > b$, il faut employer les équations (1), (3) et (4). Ces trois équations donnent

---

durée de la révolution sydérale de la terre, ou 365j,256383. U étant donné, il est facile de calculer t par cette formule. Mais si t est donné, la recherche de tang $\frac{1}{2}U$ exige la résolution de ces équations du 3e. degré. Pour éviter cette difficulté, les astronomes ont formé une table des valeurs de t dans une parabole où D serait égal à l'unité, et de cette table une fois calculée, on peut tirer les valeurs de U; t étant connu. C'est ce que nous nommons une table du mouvement des comètes. On peut suppléer à cette table en résolvant l'équation (1) par des essais.

$$x = 0,39107,$$

$$y = 2,258355,$$

$$r = 0,9755798,$$

Ces valeurs satisfont à l'équation (2), aussi bien qu'on doit l'attendre d'une équation qui ne peut être fort exacte à cause du peu de mouvement de la comète en longitude. En les substituant dans l'expression de P, on trouve

$$P = -0,185628.$$

Le signe négatif de P fait connaître que la comète n'a pas encore atteint son périhélie. On trouve ensuite la distance périhélie $D = 0,9583509$, et l'anomalie v de la comète, égale à $15°.16'.24''$, ce qui répond à $10^j.40334$; d'où il suit que le passage au périhélie a eu lieu le 29 novembre à $18^h.10'.34''$, tems moyen à Paris. Ayant ainsi à-peu-près la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point, on pourra les corriger par la méthode suivante, qui a l'avantage d'être indépendante de la connaissance approchée des autres élémens de l'orbite.

Détermination exacte des élémens de l'orbite, lorsque l'on connaît à-peu-près la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point.

3°. On choisira trois observations éloignées de la comète; en partant ensuite de la distance périhélie et de l'instant du passage par ce point, déterminés par ce qui précède, on calculera facilement les trois anomalies de la comète, et les trois rayons vecteurs correspondans aux instans des trois observations; soient v, v' et v'' ces anomalies, celles qui précèdent le passage de la comète par le périhélie devant être supposées négatives; soient, de plus, r, r', r'', les rayons vecteurs correspondans de la comète, $v' - v$ et

$v'' - v$ seront les angles compris entre r et r', et entre r et r''; soit U le premier de ces angles et U' le second.

Nommons encore α, α', α'', les trois longitudes géocentriques observées de la comète; θ, θ', θ'', ses trois latitudes géocentriques, les latitudes australes devant être supposées négatives; C, C', C'', les trois longitudes correspondantes du soleil; R, R', R'', ses trois distances à la terre; β, β', β'', les trois longitudes héliocentriques de la comète; ϖ, ϖ', ϖ'', ses trois latitudes héliocentriques. Cela posé;

On imaginera la lettre S au centre du soleil, la lettre T au centre de la terre, la lettre C au centre de la comète, et la lettre C' à sa projection sur le plan de l'écliptique, on aura l'angle STC', en prenant la différence des longitudes géocentriques du soleil et de la comète; en ajoutant ensuite le logarithme du cosinus de cet angle avec celui du cosinus de la latitude géocentrique θ de la comète, on aura le logarithme du cosinus de l'angle STC; on connaîtra donc dans le triangle STC, le côté ST ou R, le côté SC ou r, et l'angle STC; on aura ainsi, par la trigonométrie rectiligne, l'angle CST; on aura ensuite la latitude héliocentrique ϖ de la comète au moyen de l'équation

$$\sin \varpi = \frac{\sin \theta . \sin CST}{\sin CTS}.$$

L'angle TSC' est le côté d'un triangle sphérique rectangle, dont l'hypothénuse est l'angle TSC, et dont un des côtés est l'angle ϖ; de là on tirera facilement l'angle TSC', et par conséquent la longitude héliocentrique β de la comète.

On aura de la même manière ϖ', β', ϖ'' et β'', et les valeurs de β, β', β'', feront connaître si le mouvement de la comète est direct ou rétrograde.

Si l'on conçoit les deux arcs de latitude ϖ et ϖ' réunis

au pôle de l'écliptique, ils y formeront un angle égal à $\beta' - \beta$; et dans le triangle sphérique formé par cet angle, et par les côtés $90° - \varpi$ et $90° - \varpi'$, le côté opposé à l'angle $\beta' - \beta$ sera l'angle au soleil compris entre les deux rayons vecteurs r et r'. On le déterminera facilement par les analogies connues de la trigonométrie sphérique, ou par la formule suivante,

$$\cos V = \cos(\beta' - \beta).\cos\varpi.\cos\varpi' + \sin\varpi.\sin\varpi',$$

dans laquelle V représente cet angle.

En nommant pareillement V' l'angle formé par les deux rayons vecteurs r et r'', on aura

$$\cos V' = \cos(\beta'' - \beta).\cos\varpi.\cos\varpi'' + \sin\varpi.\sin\varpi''.$$

Maintenant, si la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point étaient exactement déterminés, on aurait

$$V = U \quad \text{et} \quad V' = U';$$

mais comme cela n'arrivera presque jamais, on supposera

$$m = U - V; \quad n = U' - V'.$$

Nous observerons ici que le calcul du triangle STC, donne pour l'angle CST, deux valeurs différentes, savoir CST et $180° - 2.STC - CST$. On aura ainsi deux valeurs différentes pour chacune des quantités β, ϖ, ϖ', β'', ϖ''. Le plus souvent, la nature du mouvement de la comète fera connaître la valeur de CST, dont on doit faire usage, sur-tout si ces deux angles sont fort différens; car alors l'un d'eux placera la comète plus loin que l'autre de la terre, et il sera facile de reconnaître par le mouvement apparent de la comète, à l'instant de l'observation, lequel des deux doit être préféré. Dans un grand nombre de cas, l'un d'eux sera négatif, et devra, par conséquent,

être rejeté; mais s'il restait de l'incertitude à cet égard, on pourra toujours déterminer les véritables valeurs de β, β', β'', en observant de prendre pour β et β', les deux angles qui rendent V très-peu différent de U; et de prendre pour β et β'' les deux angles qui rendent V' très-peu différent de U'.

On fera ensuite une seconde hypothèse, dans laquelle, en conservant le même instant du passage par le périhélie que ci-dessus, on fera varier la distance périhélie d'une petite quantité, par exemple, de la cinquantième partie de sa valeur, et l'on cherchera, dans cette hypothèse, les valeurs de $U - V$ et de $U' - V'$; soit alors

$$m' = U - V, \quad n' = U' - V';$$

enfin, on formera une troisième hypothèse dans laquelle, en conservant la même distance périhélie que dans la première, on fera varier d'un demi-jour ou d'un jour, plus ou moins, l'instant du passage par le périhélie. On cherchera, dans cette nouvelle hypothèse, les valeurs de $U - V$ et de $U' - V'$; soit alors

$$m'' = U - V, \quad n'' = U' - V';$$

cela posé, si l'on nomme u le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance périhélie, pour avoir la véritable, et t le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le périhélie, pour avoir ce véritable instant; on aura les deux équations

$$u(m - m') + t(m - m'') = m,$$
$$u(n - n') + t(n - n'') = n,$$

d'où l'on tirera u et t, et par conséquent la distance périhélie corrigée, et le véritable instant du passage de la comète par ce point.

La correction précédente suppose que ces élémens déterminés par la première approximation, sont assez exacts, pour traiter comme infiniment petites leurs différences d'avec les véritables ; mais si la seconde approximation ne paraissait pas encore suffisante, on pourrait recourir à une troisième, en opérant sur les élémens déja corrigés, comme on a fait sur les premiers ; il faut seulement avoir l'attention de leur faire subir de plus petites variations. Mais le plus souvent, cette troisième approximation sera inutile, surtout si dans la première, on fait usage de quatre ou cinq observations bien choisies.

On pourra encore, dans la correction des premiers élémens, faire usage des secondes différences, de la manière suivante. Au lieu de calculer les valeurs de U, U', V et V' dans les trois hypothèses, on les calculera dans cinq hypothèses, savoir : 1°. avec les élémens trouvés par la première approximation ; 2°. en faisant varier d'une très-petite quantité la distance périhélie ; 3°. en la faisant varier du double de cette quantité ; 4°. en conservant la même distance périhélie que dans la première hypothèse, et en faisant varier d'un petit intervalle, l'instant du passage par le périhélie ; 5°. en faisant varier le même instant du double de cet intervalle. Soient m, m', m'', m''', m'''', les valeurs de $U-V$, n, n', n'', n''', n'''', les valeurs de $U'-V'$; pour déterminer alors les valeurs de u et de t, on formera les deux équations

$$(4m'-3m-m'').u+(m''-2m'+m).u^2+(4m'''-3m-m'''').t$$
$$+(m''''-2m'''+m).t^2+2m=0,$$

$$(4n'-3n-n'').u+(n''-2n'+n).u^2+(4n'''-3n-n'''').t$$
$$+(n''''-2n'''+n).t^2+2n=0.$$

Les valeurs de u et de t, qui satisfont à ces équations, seront plus précises que les précédentes. Quoique le plus

souvent cette plus grande précision soit inutile, il est cependant indispensable de former ces équations, toutes les fois que les termes dépendant des secondes différences seront du même ordre que ceux qui dépendent des premières différences, ce qui arrivera, par exemple, lorsque dans une des observations, le rayon vecteur de la comète sera presque perpendiculaire au rayon visuel de la terre à la comète.

Ayant ainsi la vraie distance périhélie, et le véritable instant du passage de la comète par ce point, on en conclura les autres élémens de cette manière.

Soit j la position du nœud qui serait ascendant, si le mouvement de la comète était direct; et φ, l'inclinaison de l'orbite; on aura les six équations suivantes,

$$\text{tang } j = \frac{\text{tang } \varpi \sin \zeta' - \text{tang } \varpi' \sin \zeta}{\text{tang } \varpi \cos \zeta' - \text{tang } \varpi' \cos \zeta}$$

$$\text{tang } j = \frac{\text{tang } \varpi \sin \zeta'' - \text{tang } \varpi'' \sin \zeta}{\text{tang } \varpi \cos \zeta'' - \text{tang } \varpi'' \cos \zeta} \quad \ldots (e)$$

$$\text{tang } j = \frac{\text{tang } \varpi' \sin \zeta'' - \text{tang } \varpi'' \sin \zeta'}{\text{tang } \varpi' \cos \zeta'' - \text{tang } \varpi'' \cos \zeta'},$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{\text{tang } \varpi}{\sin (\zeta - j)}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{\text{tang } \varpi'}{\sin (\zeta' - j)}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{\text{tang } \varpi''}{\sin (\zeta'' - j)} \quad \ldots (e');$$

On peut choisir à volonté parmi ces formules; mais il sera plus exact d'employer celles dont les numérateurs et les dénominateurs sont les plus grands.

Supposons par exemple, que l'on emploie les deux formules (e) et (e'); il est visible que la tangente de j peut également appartenir aux deux angles j, et $180° + j$, j,

étant le plus petit des angles positifs auxquels elle puisse appartenir. Pour déterminer celui des deux qu'il faut choisir, on observera que φ, et $\tang\varphi$, doivent être positifs, et qu'ainsi, $\sin(\zeta''-j)$ doit être de même signe que $\tang\varpi''$; cette condition déterminera l'angle j, et cet angle sera la position du nœud ascendant, si le mouvement de la comète est direct; mais si ce mouvement est rétrograde, il faut lui ajouter 180°, pour avoir la position de ce nœud.

L'hypothénuse du triangle sphérique rectangle dont $\zeta''-j$ et ϖ'', sont les côtés, est la distance de la comète à son nœud ascendant dans la troisième observation; et la différence entre cette hypothénuse et ρ'', est l'intervalle entre le nœud et le périhélie, compté sur l'orbite.

Appliquons ces résultats à la seconde comète de 1781, dont nous avons déja déterminé par une première approximation, la distance périhélie, et l'instant du passage par ce point. Pour cela, nous ferons usage des observations du 9 octobre 1781, et des 17 novembre et 20 décembre de la même année; ces observations donnent

Tems moyen à Paris.

1781. 9 oct. à $16^h.50'.\ 0''$, $\alpha = 124°.27'.42''$,
$\theta = 0°.11'.40''$,

17 nov. à $8^h.29'.44''$, $\alpha' = 306°.57'.32''$,
$\theta' = 44°.17'.12''$,

20 déc. à $6^h.\ 6'.30''$, $\alpha'' = 306°.17'.59''$,
$\theta'' = 17°.34'.25''$,

on a de plus

$C = 197°.13'.44''$, $\log R = 9{,}998864$,
$C' = 235°.55'.43''$, $\log R' = 9{,}994602$,
$C'' = 269°.20'.35''$, $\log R'' = 9{,}992748$.

Cela posé; on formera une première hypothèse dans laquelle la distance périhélie sera, comme on l'a trouvée ci-dessus, égale à 0,958359, et l'instant du passage par le périhélie a eu lieu le 29 novembre à $18^h.10'.34''$; on trouvera dans cette hypothèse,

$$\varphi = \ldots 6°.18'.3'', \quad \varphi' = -18°.7'.12'', \quad \varphi = 29°.8'.15'',$$

ce qui donne

$$U = 43°.10'.41'', \quad U' = 90°.26'.18'';$$

on trouvera ensuite

$$\mathfrak{C} = 77°.5'.\ldots'', \quad \mathfrak{C}' = 37°.26'.37'', \quad \mathfrak{C}'' = 346°.49'.52'',$$

$$\ldots°.10'.3\ldots'', \quad \varpi' = 18°.6'.32''\tfrac{1}{2}, \quad \varpi'' = 27°.12'.57'',$$

d'où l'on tire

$$V = 42°.53'.2'', \quad V' = 90°.9'.22'',$$

partant

$$m = 17'.49'', \quad n = 16'.56''.$$

La suite des valeurs de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, indique visiblement un mouvement rétrograde.

On formera ensuite une seconde hypothèse, dans laquelle en conservant l'instant précédent du passage par le périhélie, on augmentera la distance périhélie de 0,003. On trouvera dans cette hypothèse,

$$m' = -33'.53'', \quad n' = -12'.54.$$

Enfin, on formera une troisième hypothèse dans laquelle, en conservant la même distance périhélie que dans la première, on fera varier de $0^j,25$, l'instant du passage par le périhélie, que l'on fixera ainsi au 29 novembre à $12^h.10'.31''$; cette hypothèse donnera,

$$m'' = 48'.16'', \quad n'' = 27'.13'';$$

on tirera de ces valeurs, les deux équations suivantes,

$$3102.u - 1829.t = 1069,$$
$$1760.u - 617.t = 1016,$$

ce qui donne

$$u = 0{,}881406, \quad t = 0{,}910400;$$

d'où l'on conclut,

la vraie distance périhélie $= \rho, 960995$,

et le véritable instant du passage par le périhélie, le 29 novembre à $12^h.42'.46''$, tems moyen à Paris.

Pour s'assurer si ces élémens sont fort approchés, on pourra calculer les valeurs correspondantes de m, et voir si elles sont nulles ou très-petites; or on trouvera que dans le cas présent, ces valeurs ne montent qu'à un petit nombre de secondes; car les élémens corrigés donnent par exemple, pour la première et la dernière observation,

$$\varphi = -60°.56'.37'', \quad \varphi'' = 29°.19'.22'',$$
$$\varpi = 10'.33''\tfrac{1}{2}, \quad \varpi'' = 27°.11'.56''\tfrac{3}{4},$$
$$\mathfrak{C} = 77°.2'.22'', \quad \mathfrak{C}'' = 346°.38'.53'';$$

d'où l'on tire

$$U' = 90°.15'.59'', \quad V' = 90°.16'.3''\tfrac{1}{2},$$

et par conséquent $m = -4''\tfrac{1}{2}$. Ces élémens étant fort approchés, on en tirera au moyen des formules (e) et $(\mathfrak{e}')$, la position j, du nœud ascendant, et l'inclinaison de l'orbite, et l'on trouvera

Lieu du nœud ascendant $= 77°.22'.55''$.

Inclinaison de l'orbite $= 27°.12'.4''$.

Pour déterminer le lieu du périhélie, on observera que

$\zeta'' - j = 269°.15'.58''$, d'où l'on tire $269°.20'.50''$, pour la distance de la comète à son nœud, comptée sur l'orbite, au moment de la troisième observation ; en ajoutant à cette distance, l'anomalie v'', que la comète a parcourue d'un mouvement rétrograde depuis son passage par le périhélie, on aura $298°.40'.12''$, pour la distance du périhélie comptée sur l'orbite, à son nœud ascendant ; en ajoutant ensuite à cette distance, la longitude de ce nœud, on aura pour la position du périhélie sur l'orbite, $376°.3'.7''$, ou plus simplement $16°.3'.7''$. En rassemblant donc tous ces élémens on aura pour les véritables élémens de l'orbite de la seconde comète de 1781,

Distance périhélie. . . . 0,9609951.
29 nov. 1781. Tems moyen à Paris du passage au périhélie..... $12^h.42'.46''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite... $16°.\ 3'.\ 7''$.
Lieu du nœud ascendant..... $77°.22'.55''$.
Inclinaison de l'orbite..... $27°.12'.\ 4''$.

Le mouvement de la comète est rétrograde.

La supposition du mouvement parabolique des comètes n'est pas rigoureuse ; elle est même infiniment peu probable, vu le nombre infini des cas qui donnent un mouvement elliptique ou hyperbolique, relativement à ceux qui déterminent le mouvement parabolique. Une comète mue dans une orbe soit parabolique, soit hyperbolique, ne serait visible qu'une seule fois ; ainsi l'on peut supposer avec vraisemblance que les comètes qui décrivent ces courbes, s'il en existe quelques-unes, ont depuis longtems disparu, de sorte que nous n'observons aujourd'hui, que celles qui mues dans des orbes rentrantes, sont ramenées sans cesse à des intervalles plus ou moins grands, dans les régions voisines du soleil. Si elles ont été

observées avec précision, et que l'arc visible de leurs orbites soit considérable, on pourra déterminer à-peu-près par la méthode suivante, le tems de leur révolution.

Pour cela supposons que l'on ait quatre excellentes observations qui embrassent à-peu-près toute la partie visible de l'orbite; et que l'on ait déja déterminé par l'article précédent, la parabole qui satisfait à-peu-près à ces observations. Soient v, v', v'', v''', les anomalies correspondantes à ces observations; r, r', r'', r''', les rayons vecteurs correspondans; soit encore,

$$v' - v = U, \quad v'' - v = U', \quad v''' - v = U''.$$

Cela posé, on calculera par l'article précédent, avec la parabole qui représente à-peu-près ces observations, les valeurs de U, U', U'' et celles de V, V', V'',; soit

$$U - V = m, \quad U' - V' = m', \quad U'' - V'' = m''.$$

On fera ensuite varier d'une très-petite quantité, la distance périhélie dans cette parabole; soit alors,

$$U - V = n, \quad U' - V' = n', \quad U'' - V'' = n''.$$

On formera une troisième hypothèse dans laquelle, en conservant la même distance périhélie que dans la première, on fera varier d'une très-petite quantité, l'instant du passage par le périhélie; soit dans cette hypothèse,

$$U - V = p, \quad U' - V' = p', \quad U'' - V'' = p''.$$

Cela posé, avec la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point, trouvés dans la première hypothèse, on calculera l'angle v et le rayon vecteur r, dans la supposition d'une ellipse fort excentrique, de sorte qu'en nommant e le rapport de l'excentricité de cette ellipse à son demi grand axe, la différence $1 - e$ soit égale à une très-

petite quantité, par exemple, à $\frac{1}{60}$. Pour avoir l'angle v, dans cette supposition, il suffira d'ajouter à l'anomalie v, calculée dans la parabole, un petit angle dont le sinus est

$$\frac{1}{10}(1-e).\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v.(4-3.\cos^2\tfrac{1}{2}v-6.\cos^4\tfrac{1}{2}v);$$

La nouvelle anomalie v étant ainsi connue, on la substituera dans l'équation

$$r=\frac{D}{\cos^2\frac{1}{2}v}\left(1-\frac{1-e}{2}\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}v\right)$$

qui est l'expression du rayon vecteur dans une ellipse très-excentrique: par ce moyen l'on aura le rayon vecteur r, correspondant. On calculera de la même manière v', r'; v'', r''; v''', r'''; de là l'on tirera U, U', U'', V, V', V''; soit dans ce cas

$$U-V=q,\quad U'-V'=q',\quad U''-V''=q''.$$

Nommons enfin, u, le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance périhélie, pour avoir la véritable; t le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le périhélie, et δ le nombre par lequel on doit multiplier la valeur supposée pour $1-e$; on formera les trois équations

$$u.(n-m)+t.(p-m)+\delta.(q-m)+m=0,$$
$$u.(n'-m')+t.(p'-m')+\delta.(q'-m')+m'=0,$$
$$u.(n''-m'')+t.(p''-m'')+\delta.(q''-m'')+m''=0.$$

On aura au moyen de ces équations, les valeurs de u, t et δ, d'où l'on tirera la vraie distance périhélie, le véritable instant du passage par ce point, et la vraie valeur de $1-e$. Soit D, la distance périhélie, et

a le demi grand axe ; on aura $a = \frac{D}{1-e}$; d'où il est aisé de conclure, que le tems de la révolution de la comète sera égal au nombre d'années sydérales exprimé par $\frac{D^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}$. On aura, comme dans la pag. 199, l'inclinaison de l'orbite et les positions du nœud ascendant et et du périhélie.

Lorsque l'arc observé de l'orbite d'une comète est considérable, et sur-tout lorsqu'il s'étend au-delà de 90° d'anomalie, où l'ellipticité commence à devenir sensible ; il serait à desirer que l'on eût quatre observations faites avec toute la précision que l'on doit attendre de l'astronomie moderne, en ayant soin de vérifier la position des étoiles auxquelles on rapporte le mouvement de la comète.

Quelque précision que l'on apporte dans ces observations, elles laisseront toujours de l'incertitude sur le tems de la révolution des comètes ; la méthode la plus précise pour le déterminer, est de comparer les observations d'une comète dans deux apparitions consécutives ; la ressemblance des élémens des deux orbites paraboliques déterminées par ces observations, fera connaître l'identité de la comète, et l'on aura par la différence des instans du passage par le périhélie, le tems de sa révolution et son grand axe. C'est ainsi que l'on a déterminé la période de la comète observée en 1531, 1607, 1682 et 1759 ; période qui est un peu inégale, à raison des attractions des planètes, comme M. Clairaut l'a fait voir, en soumettant à l'analyse les perturbations que cette comète a éprouvées de la part de Jupiter et de Saturne.

Addition aux formules données page 31 du second livre, pour la réduction au solstice (par M. Mathieu).

Si, dans la relation $\sin D = \sin\omega \sin L$, qui existe entre la déclinaison du soleil, sa longitude et l'obliquité de l'écliptique, on met $\omega - D'$ pour D, et $100^\circ - L'$ pour L, et qu'on divise ensuite par $\cos\omega$, on obtiendra cette nouvelle relation,

$$\tang\omega \cos D' - \sin D' = \tang\omega \cos L'.$$

Ensuite si l'on substitue pour $\cos D'$, $\sin D'$ et $\cos L'$, les valeurs équivalentes $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}D'$, $2\sin\frac{1}{2}D'\cos\frac{1}{2}D'$, $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}L'$, le terme $\tang\omega$ se détruit dans les deux membres ; et en changeant les signes et divisant par 2, il reste

$$\tang\omega \sin^2\tfrac{1}{2}D' + \sin\tfrac{1}{2}D'\cos\tfrac{1}{2}D' = \tang\omega \sin^2\tfrac{1}{2}L'.$$

Si l'on divise cette équation par $\cos^2\frac{1}{2}D'$ et par $\tang\omega$, et que l'on mette ensuite pour $\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}D'}$ sa valeur $1 + \tang^2\frac{1}{2}D'$, on aura en réunissant les termes semblables, et en divisant encore par $1 - \sin^2\frac{1}{2}L'$ ou $\cos^2\frac{1}{2}L'$,

$$\tang^2\tfrac{1}{2}D' + \frac{\tang\frac{1}{2}D'}{\tang\omega\cos^2\frac{1}{2}L'} = \tang^2\tfrac{1}{2}L' ;$$

on tirera aisément de cette équation du second degré, en développant le radical en série,

$$\tang\tfrac{1}{2}D' = \tang\omega\sin^2\tfrac{1}{2}L' - \tang^3\omega\sin^4\tfrac{1}{2}L'\cos^2\tfrac{1}{2}L' + 2\tang^5\omega\sin^6\tfrac{1}{2}L'\cos^4\tfrac{1}{2}L' - \text{etc.}$$

Cette valeur de $\tang\frac{1}{2}D'$ est très-exacte, et les trois premiers termes seront toujours suffisans. Mais comme l'arc $\frac{1}{2}D'$ est ordinairement fort petit, on pourra le substituer à sa tangente, et en appelant R'' le rayon réduit en secondes, on aura directement

$$D' = 2R''\tang\omega\sin^2\tfrac{1}{2}L' - 2R''\tang^3\omega\sin^4\tfrac{1}{2}L'\cos^2\tfrac{1}{2}L'.$$

Toutes les valeurs de D' données par ces deux termes sont très-exactes jusqu'à 20° du solstice, et même au-delà. Le troisième terme, qui vaut 0″,9 à 22 grades, se trouve très-sensiblement égal à l'erreur qui résulte de la substitution de $\frac{1}{2}D'$ à la place de $\tang\frac{1}{2}D'$, du moins tant que le soleil n'est pas à plus de 20 ou 25° du solstice. Les réductions seraient trop fortes de ce terme si l'on voulait en tenir compte.

Errata pour le tome second.

P. 137, l. 3 et suiv., *lisez* : 1er. terme.	0,0024792097	0,00247921
2e. terme.	— 0,0000023339	— 0,00000138
$\sin D'$	0,0024778758	0,00247788

Pour les observations faites au cercle de Borda.

ou valeurs de $\frac{2.\sin^2 \frac{1}{2} p^t}{\sin 1^{tt}}$

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

SEC.	0^t	1^t	2^t	3^t	4^t	5^t	6^t	
0	$0^{tt}0$	$2^{tt}0$	$7^{tt}8$	$17^{tt}7$	$31^{tt}4$	$49^{tt}1$	$70^{tt}7$	$96^{tt}2$
1	0.0	2.0	8.0	17.9	31.7	49.4	71.1	96.9
2	0.0	2.1	8.1	18.1	31.9	49.7	71.5	97.1
3	0.0	2.2	8.2	18.3	32.2	50.1	71.9	97.[illegible]
4	0.0	2.3	8.4	18.5	32.5	50.4	72.3	[illegible]
5	0.0	2.3	8.5	18.7	32.7	50.7	72.7	98.5
6	0.0	2.4	8.7	18.9	33.0	51.1	73.1	99.0
7	0.0	2.4	8.8	19.1	33.3	51.4	73.5	99.4
8	0.0	2.5	8.9	19.3	33.5	51.7	73.9	99.9
9	0.0	2.6	9.1	19.5	33.8	52.1	74.3	100.4
10	0.1	2.7	9.2	19.7	34.1	52.4	74.7	100.8
11	0.1	2.7	9.4	19.9	34.4	52.7	75.1	101.3
12	0.1	2.8	9.5	20.1	34.6	53.1	75.5	101.8
13	0.1	2.9	9.6	20.3	34.9	53.4	75.9	102.3
14	0.1	3.0	9.8	20.5	35.2	53.8	76.3	102.7
15	0.1	3.1	9.9	20.7	35.5	54.1	76.7	103.2
16	0.1	3.1	10.1	20.9	35.7	54.5	77.1	103.7
17	0.2	3.2	10.2	21.2	36.0	54.8	77.5	104.2
18	0.2	3.3	10.4	21.4	36.3	55.1	77.9	104.6
19	0.2	3.4	10.5	21.6	36.6	55.5	78.3	105.1
20	0.2	3.5	10.7	21.8	36.9	55.8	78.8	105.6
21	0.3	3.6	10.8	22.0	37.2	56.2	79.2	106.1
22	0.3	3.7	11.0	22.3	37.4	56.5	79.6	106.6
23	0.3	3.8	11.1	22.5	37.7	56.9	80.0	107.0
24	0.3	3.8	11.3	22.7	38.0	57.3	80.4	107.5
25	0.3	3.9	11.5	22.9	38.3	57.6	80.8	108.0
26	0.4	4.0	11.6	23.1	38.6	58.0	81.3	108.5
27	0.4	4.1	11.8	23.4	38.9	58.3	81.7	109.0
28	0.4	4.2	11.9	23.6	39.2	58.7	82.1	109.5
29	0.5	4.3	12.1	23.8	39.5	59.0	82.5	110.0
30	0.5	4.4	12.3	24.0	39.8	59.4	83.0	110.4

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

SEC.	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′
30	0″5	4″4	12″3	24″0	39″8	59″4	83″0	110″4
31	0.5	4.5	12.4	24.3	40.1	59.8	83.4	110.9
32	0.6	4.6	12.6	24.5	40.3	60.1	83.8	111.4
33	0.6	4.7	12.8	24.7	40.6	60.5	84.2	111.9
34	0.6	4.8	12.9	25.0	40.9	60.8	84.7	112.4
35	0.7	4.9	13.1	25.2	41.2	61.2	85.1	112.9
36	0.7	5.0	13.3	25.4	41.5	61.6	85.5	113.4
37	0.7	5.1	13.4	25.7	41.8	61.9	86.0	113.9
38	0.8	5.2	13.6	25.9	42.1	62.3	86.4	114.4
39	0.8	5.3	13.8	26.2	42.5	62.7	86.8	114.9
40	0.9	5.4	14.0	26.4	42.8	63.0	87.3	115.4
41	0.9	5.6	14.1	26.6	43.1	63.4	87.7	115.9
42	1.0	5.7	14.3	26.9	43.4	63.8	88.1	116.4
43	1.0	5.8	14.5	27.1	43.7	64.2	88.6	116.9
44	1.1	5.9	14.7	27.4	44.0	64.5	89.0	117.4
45	1.1	6.0	14.8	27.6	44.3	64.9	89.5	117.9
46	1.2	6.1	15.0	27.9	44.6	65.3	89.9	118.4
47	1.2	6.2	15.2	28.1	44.9	65.7	90.3	118.9
48	1.3	6.4	15.4	28.3	45.2	66.0	90.8	119.5
49	1.3	6.5	15.6	28.6	45.5	66.4	91.2	120.0
50	1.4	6.6	15.8	28.8	45.9	66.8	91.7	120.5
51	1.4	6.7	15.9	29.1	46.2	67.2	92.1	121.0
52	1.5	6.8	16.1	29.4	46.5	67.6	92.6	121.5
53	1.5	7.0	16.3	29.6	46.8	68.0	93.0	122.0
54	1.6	7.1	16.5	29.9	47.1	68.3	93.5	122.5
55	1.6	7.2	16.7	30.1	47.5	68.7	93.9	123.1
56	1.7	7.3	16.9	30.4	47.8	69.1	94.4	123.6
57	1.8	7.5	17.1	30.6	48.1	69.5	94.8	124.1
58	1.8	7.6	17.3	30.9	48.4	69.9	95.3	124.6
59	1.9	7.7	17.5	31.1	48.8	70.3	95.7	125.1
60	2.0	7.8	17.7	31.4	49.1	70.7	96.2	125.7

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

SEC.	8′	9′	10′	11′	12′	13′	14′	15′
0	125″7	159″0	196″3	237″5	282″7	331″8	384″7	441″6
1	126.2	159.6	197.0	238.3	283.5	332.6	385.6	442.6
2	126.7	160.2	197.6	239.0	284.2	333.4	386.5	443.6
3	127.2	160.8	198.3	239.7	285.0	334.3	387.5	444.6
4	127.8	161.4	198.9	240.4	285.7	335.2	388.4	445.6
5	128.3	162.0	199.6	241.2	286.5	336.0	389.3	446.5
6	128.8	162.6	200.3	241.9	287.4	336.9	390.2	447.5
7	129.4	163.2	200.9	242.6	288.2	337	391.1	448.5
8	129.9	163.8	201.6	243.3	289.0	.6	392.1	449.5
9	130.4	164.4	202.2	244.1	289.8	.4	393.0	450.5
10	131.0	165.0	202.9	244.8	290.6	.3	393.9	451.5
11	131.5	165.6	203.6	245.5	291.4	341.2	394.8	452.5
12	132.0	166.2	204.2	246.2	292.2	342.0	395.8	453.5
13	132.6	166.8	204.9	247.0	293.0	342.9	396.7	454.5
14	133.1	167.4	205.6	247.7	293.8	343.7	397.6	455.5
15	133.6	168.0	206.3	248.5	294.6	344.6	398.6	456.5
16	134.2	168.6	206.9	249.2	295.4	345.5	399.5	457.5
17	134.7	169.2	207.6	249.9	296.2	346.3	400.5	458.5
18	135.3	169.8	208.3	250.7	297.0	347.2	401.4	459.5
19	135.8	170.4	208.9	251.4	297.8	348.1	402.3	460.5
20	136.4	171.0	209.6	252.2	298.6	349.0	403.3	461.5
21	136.9	171.6	210.3	252.9	299.4	349.8	404.2	462.5
22	137.4	172.2	211.0	253.6	300.2	350.7	405.1	463.5
23	138.0	172.9	211.6	254.4	301.0	351.6	406.0	464.5
24	138.5	173.5	212.3	255.1	301.8	352.5	407.0	465.5
25	139.1	174.1	213.0	255.9	302.6	353.3	408.0	466.5
26	139.6	174.7	213.7	256.6	303.5	354.2	408.9	467.5
27	140.2	175.3	214.4	257.4	304.3	355.1	409.9	468.5
28	140.7	175.9	215.1	258.1	305.1	356.0	410.8	469.5
29	141.3	176.6	215.8	258.9	305.9	356.9	411.7	470.5
30	141.8	177.2	216.4	259.6	306.7	357.7	412.7	471.5

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

SEC.	8′	9′	10′	11′	12′	13′	14′	15′
30	141″8	177″2	216″4	259″6	306″7	357″7	412″7	471″5
31	142.4	177.8	217.1	260.4	307.5	358.6	413.6	472.6
32	143.0	178.4	217.8	261.1	308.4	359.5	414.6	473.6
33	143.5	179.0	218.5	261.9	309.2	360.3	415.6	474.6
34	144.1	179.7	219.2	262.6	310.0	361.2	416.6	475.6
35	144.6	180.3	219.9	263.4	310.8	362.1	417.5	476.6
36	145.2	180.9	220.6	264.1	311.6	363.0	418.4	477.6
37	145.8	181.6	221.3	264.9	312.5	363.9	419.4	478.7
38	146.3	182.2	222.0	265.7	313.3	364.8	420.3	479.7
39	146.9	182.8	222.7	266.4	314.2	365.7	421.3	480.7
40	147.5	183.4	223.4	267.2	315.0	366.5	422.2	481.7
41	148.0	184.1	224.1	267.9	315.8	367.5	423.2	482.8
42	148.6	184.7	224.8	268.7	316.6	368.4	424.2	483.8
43	149.2	185.4	225.3	269.5	317.4	369.3	425.1	484.8
44	149.7	186.0	226.2	270,2	318.3	370.2	426.1	485.8
45	150.3	186.6	226.9	271.0	319.1	371.1	427.0	486.9
46	150.9	187.3	227.6	271.8	319.9	372.0	428.0	487.9
47	151.5	187.9	228.3	272.6	320.8	372.9	429.0	488.9
48	152.0	188.5	229.0	273.3	321.6	373.8	430.0	490.0
49	152.6	189.2	229.7	274.1	322.4	374.7	430.9	491.0
50	153.2	189.8	230.4	274.9	323.3	375.6	431.9	492.0
51	153.8	190.5	231.1	275.6	324.1	376.5	432.8	493.1
52	154.4	191.1	231.8	276.4	325.0	377.4	433.8	494.1
53	154.9	191.8	232.5	277.2	325.8	378.3	434.8	495.2
54	155.5	192.4	233.3	278.0	326.7	379.2	435.7	496.2
55	156.1	193.1	234.0	278.9	327.5	380.2	436.7	497.2
56	156.7	193.7	234.7	279.5	328.4	381.1	437.7	498.2
57	157.3	194.4	235.4	280.3	329.2	382.0	438.7	499.2
58	157.8	195.0	236.1	281.1	330.0	382.9	439.6	500.3
59	158.4	195.7	236.8	281.9	330.9	383.8	440.6	501.4
60	159.0	196.3	237.5	282.7	331.8	384.7	441.6	502.5

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

S	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	502.5	567.1	635.8	708.3	784.9	865.3	949.6	1037.8	1129.9	1225.9
1	503.5	568.2	636.9	709.5	786.2	866.6	951.0	1039.3	1131.4	1227.5
2	504.6	569.3	638.1	710.8	787.5	868.0	952.4	1040.8	1133.0	1229.2
3	505.6	570.4	639.3	712.1	788.8	869.4	953.8	1042.3	1134.6	1230.8
4	506.7	571.6	640.5	713.4	790.1	870.8	955.3	1043.8	1136.2	1232.5
5	507.7	572.7	641.7	714.6	791.4	872.1	956.7	1045.3	1137.8	1234.1
6	508.8	573.8	642.9	715.9	792.7	873.5	958.2	1046.8	1139.3	1235.7
7	509.8	574.9	644.1	717.1	794.0	874.9	959.6	1048.3	1140.9	1237.3
8	510.9	576.1	645.3	718.4	795.4	876.3	961.1	1049.8	1142.5	1239.0
9	511.9	577.2	646.4	719.6	796.7	877.6	962.5	1051.3	1144.0	1240.6
10	513.0	578.3	647.6	720.9	798.0	879.0	963.9	1052.8	1145.6	1242.3
11	514.0	579.4	648.8	722.1	799.3	880.4	965.4	1054.3	1147.2	1243.9
12	515.1	580.6	650.0	723.4	800.7	881.8	966.9	1055.9	1148.8	1245.6
13	516.1	581.7	651.2	724.6	802.2	883.2	968.3	1057.4	1150.4	1247.2
14	517.2	582.8	652.4	725.9	803.3	884.6	969.8	1058.9	1152.0	1248.6
15	518.3	583.9	653.6	727.1	804.6	886.0	971.2	1060.4	1153.6	1249.9
16	519.4	585.1	654.8	728.4	806.0	887.4	972.7	1062.0	1155.2	1252.2
17	520.4	586.2	656.0	729.6	807.3	888.8	974.1	1062.5	1156.8	1253.8
18	521.4	587.3	657.2	730.9	808.6	890.2	975.5	1065.0	1158.3	1255.5
19	522.5	588.4	658.4	732.2	809.9	891.6	977.0	1066.5	1159.9	1257.1
20	523.6	589.6	659.6	733.5	811.3	893.0	978.5	1068.1	1161.5	1258.8
21	524.6	590.7	660.8	734.7	812.6	894.4	979.9	1069.6	1163.1	1260.4
22	525.7	591.9	662.0	736.0	813.9	895.8	981.4	1071.1	1164.1	1262.1
23	526.8	593.0	663.2	737.2	815.2	897.2	982.9	1072.6	1166.3	1263.7
24	527.9	594.1	664.4	738.5	816.6	898.6	984.4	1074.2	1167.9	1265.4
25	528.9	595.2	665.6	739.7	817.9	900.0	985.8	1075.7	1169.5	1267.0
26	530.0	596.4	666.8	741.0	819.2	901.4	987.3	1077.2	1171.1	1268.7
27	531.1	597.5	668.0	742.3	820.5	902.8	988.8	1078.7	1172.7	1270.3
28	532.2	598.7	669.2	743.6	821.9	904.2	990.3	1080.3	1174.3	1272.1
29	533.2	599.8	670.4	744.8	823.2	905.6	991.8	1081.8	1175.9	1273.7
30	534.3	601.0	671.6	746.1	824.0	907.0	993.2	1083.3	1177.5	1275.4

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

Sec.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
31	535.4	602.1	672.8	747.4	825.9	908.4	994.7	1084.8	1179.1	1277.1
32	536.5	603.3	674.1	748.7	827.3	909.8	996.2	1086.4	1180.7	1278.8
33	537.5	604.4	675.3	749.9	828.6	911.2	997.6	1087.9	1182.3	1280.4
34	538.6	605.6	676.5	751.2	829.9	912.6	999.1	1089.5	1183.9	1282.1
35	539.7	606.7	677.7	752.5	831.2	914.0	1000.6	1091.0	1185.5	1283.8
36	540.8	607.9	678.9	753.8	832.6	915.5	1002.1	1092.6	1187.1	1285.5
37	541.9	609.0	680.1	755.0	833.9	916.9	1003.5	1094.1	1188.7	1287.1
38	543.0	610.2	681.3	756.3	835.3	918.3	1005.0	1095.7	1190.3	1288.8
39	544.1	611.3	682.5	757.6	836.6	919.7	1006.5	1097.2	1191.9	1290.5
40	545.2	612.5	683.8	758.9	838.0	921.1	1008.0	1098.8	1193.5	1292.2
41	546.2	613.6	685.0	760.2	839.3	922.5	1009.4	1100.3	1195.1	1293.8
42	547.3	614.8	686.2	761.5	840.7	923.9	1010.9	1101.9	1196.7	1295.5
43	548.4	615.9	687.6	762.8	842.0	925.3	1012.4	1103.4	1198.3	1297.2
44	549.5	617.1	688.7	764.4	843.4	926.8	1013.9	1105.0	1199.9	1298.9
45	550.6	618.2	689.9	765.3	844.7	928.2	1015.4	1106.5	1201.5	1300.5
46	551.7	619.4	691.1	766.6	846.1	929.6	1016.9	1108.1	1203.1	1302.2
47	552.8	620.5	692.3	767.9	847.5	931.0	1018.4	1109.6	1204.7	1303.9
48	553.9	621.7	693.6	769.2	848.9	932.4	1019.9	1111.2	1206.4	1305.6
49	555.0	622.8	694.8	770.5	850.2	933.8	1021.4	1112.7	1208.0	1307.3
50	556.1	624.0	696.0	771.8	851.6	935.2	1022.8	1114.3	1209.6	1309.0
51	557.2	625.1	697.2	773.1	852.9	936.6	1024.3	1115.8	1211.2	1310.7
52	558.3	626.4	698.4	774.5	854.3	938.1	1025.8	1117.4	1213.9	1312.4
53	559.4	627.5	699.6	775.8	855.6	939.5	1027.3	1118.9	1214.5	1314.1
54	560.5	628.7	700.9	777.1	856.0	940.9	1028.8	1120.5	1216.1	1315.7
55	561.6	629.9	702.2	778.4	858.4	942.3	1030.3	1122.0	1217.7	1317.4
56	562.7	631.1	703.5	779.7	859.8	943.8	1031.8	1123.6	1219.4	1319.1
57	563.8	632.2	704.7	781.0	861.1	945.2	1033.3	1125.1	1221.0	1320.8
58	564.9	633.4	705.9	782.3	862.5	946.6	1034.8	1126.7	1222.6	1322.5
59	566.0	634.6	707.1	783.6	863.9	948.1	1036.3	1128.3	1224.2	1324.2
60	567.1	635.8	708.3	784.9	865.3	949.6	1037.8	1129.9	1225.9	1325.9

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

S	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
0	1325.9	1429.7	1537.5	1649.0	1764.6	1881.0	2007.4	2134.6	2265.6	2400.6
1	1327.6	1431.4	1539.3	1650.3	1766.6	1886.0	2009.4	2136.8	2267.8	2402.9
2	1329.3	1433.2	1541.1	1652.8	1768.5	1888.0	2011.5	2138.9	2270.0	2405.2
3	1331.0	1434.9	1542.9	1654.7	1770.5	1890.0	2013.6	2141.1	2272.2	2407.5
4	1332.7	1436.8	1544.8	1656.6	1772.4	1892.1	2015.5	2143.2	2274.5	2409.8
5	1334.4	1438.3	1546.6	1658.5	1774.8	1894.1	2017.8	2145.3	2276.7	2412.0
6	1336.1	1440.3	1548.4	1660.4	1776.3	1896.1	2019.9	2147.5	2278.9	2414.3
7	1337.8	1442.1	1550.2	1662.3	1778.3	1898.1	2022.0	2149.7	2281.2	2416.6
8	1339.5	1443.9	1552.1	1664.2	1780.3	1900.2	2024.1	2151.8	2283.4	2418.9
9	1341.2	1445.6	1553.9	1666.1	1782.3	1902.2	2026.2	2153.9	2285.6	2421.2
10	1342.9	1447.4	1555.8	1668.0	1784.2	1904.3	2028.3	2156.1	2287.8	2423.5
11	1344.6	1449.2	1557.6	1669.9	1786.2	1906.3	2030.5	2158.3	2290.0	2425.8
12	1346.3	1451.0	1559.5	1671.9	1788.2	1908.4	2032.5	2160.5	2292.3	2428.1
13	1348.0	1452.8	1561.3	1673.8	1790.1	1910.4	2034.6	2162.6	2294.5	2430.4
14	1349.7	1454.5	1563.2	1675.7	1792.1	1912.4	2036.7	2164.8	2296.8	2432.7
15	1351.4	1456.3	1565.0	1677.6	1794.1	1914.4	2038.8	2166.9	2299.0	2435.0
16	1353.2	1458.1	1566.9	1679.5	1796.1	1916.5	2040.9	2169.1	2301.3	2437.3
17	1354.9	1459.9	1568.7	1681.4	1798.1	1918.5	2043.0	2171.2	2303.6	2439.6
18	1356.6	1461.6	1570.5	1683.3	1800.0	1920.6	2045.1	2173.4	2305.8	2441.9
19	1358.3	1463.4	1572.4	1685.2	1802.0	1922.6	2047.2	2175.6	2308.0	2444.2
20	1360.1	1465.2	1574.3	1687.2	1804.0	1924.7	2049.3	2177.8	2310.2	2446.5
21	1361.8	1466.9	1576.1	1689.1	1805.9	1926.7	2051.4	2179.9	2312.4	2448.8
22	1363.5	1468.7	1578.0	1691.0	1807.9	1928.8	2053.5	2182.1	2314.7	2451.1
23	1365.2	1470.5	1579.8	1692.9	1809.9	1930.8	2055.7	2184.3	2316.9	2453.4
24	1367.0	1472.3	1581.7	1694.8	1811.9	1932.9	2057.8	2186.5	2319.2	2455.7
25	1368.7	1474.0	1582.5	1696.7	1813.1	1935.0	2059.9	2188.6	2321.5	2458.0
26	1370.4	1475.9	1585.3	1698.6	1815.8	1937.0	2062.0	2190.8	2323.7	2460.3
27	1372.1	1477.7	1587.2	1700.5	1817.8	1939.0	2064.1	2193.0	2325.9	2462.6
28	1373.9	1479.5	1589.1	1702.5	1819.8	1941.1	2066.2	2195.2	2328.2	2464.9
29	1375.6	1481.3	1590.9	1704.4	1821.8	1943.1	2068.3	2197.3	2330.4	2467.2
30	1377.4	1483.1	1592.7	1706.3	1823.8	1945.2	2070.4	2199.5	2332.7	2469.5

ARGUMENT. Angle horaire en tems.

Sec.	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
31	1379.0	1484.9	1594.6	1708.2	1825.8	1947.2	2072.6	2201.7	2334.9	2471.8
32	1380.8	1486.7	1596.5	1710.2	1827.8	1949.3	2074.7	2203.9	2337.2	2474.2
33	1382.5	1488.5	1598.3	1712.1	1829.8	1951.3	2076.8	2206.1	2339.4	2476.5
34	1384.2	1490.3	1600.2	1714.0	1831.8	1953.4	2078.9	2208.3	2341.7	2478.8
35	1385.9	1492.1	1602.1	1716.0	1833.8	1955.5	2081.0	2210.5	2343.9	2481.1
36	1387.7	1493.9	1604.0	1717.9	1835.8	1957.6	2083.2	2212.7	2346.2	2483.5
37	1389.4	1495.7	1605.9	1719.8	1837.8	1959.6	2085.3	2214.9	2348.5	2485.8
38	1391.2	1497.5	1607.7	1721.7	1839.8	1961.7	2087.4	2217.1	2350.7	2488.1
39	1392.9	1499.3	1609.6	1723.6	1841.8	1963.7	2089.6	2219.3	2353.0	2490.4
40	1394.7	1501.1	1611.5	1725.6	1843.8	1965.8	2091.7	2221.5	2355.2	2492.8
41	1396.4	1502.9	1613.3	1727.5	1845.8	1967.8	2093.8	2223.7	2357.5	2495.1
42	1398.2	1504.7	1615.2	1729.5	1847.8	1969.9	2095.9	2225.9	2359.7	2497.4
43	1399.9	1506.5	1617.1	1731.5	1849.8	1972.0	2098.0	2228.1	2361.9	2499.7
44	1401.7	1508.4	1619.0	1733.4	1851.8	1974.1	2100.2	2230.3	2364.2	2502.1
45	1403.4	1510.2	1620.8	1735.3	1853.8	1976.1	2102.3	2232.5	2366.4	2504.4
46	1405.2	1512.0	1622.7	1737.7	1855.8	1978.2	2104.5	2234.7	2368.7	2506.7
47	1407.9	1513.8	1624 6	1739.2	1857.8	1983.3	2106.6	2236.9	2371.0	2509.0
48	1408.7	1515.6	1626.5	1741.2	1859.8	1982.4	2108.8	2239.1	2373.3	2511.4
49	1410.4	1517.4	1628.3	1743.1	1861.8	1984.4	2110.9	2241.3	2375.5	2513.7
50	1412.2	1519.2	1630.2	1745.1	1863.8	1986.5	2113.1	2243.5	2377.8	2516.1
51	1413.9	1521.0	1632.1	1747.0	1865.8	1988.6	2115.2	2245.7	2380.1	2518.4
52	1415.7	1522.9	1634.0	1749.0	1867.8	1990.7	2117.4	2247.9	2382.4	2520.8
53	1417.4	1524.7	1635.9	1750.9	1869.8	1992.7	2119.6	2250.6	2384.6	2523.1
54	1419.2	1526.5	1637.7	1752.9	1871.8	1994.8	2121.7	2252.3	2386.9	2525.4
55	1420.9	1528.3	1639.6	1754.8	1873.8	1996.9	2123.8	2254.5	2389.2	2527.7
56	1422.7	1530.2	1641.5	1756.8	1875.9	1999.0	2126.0	2256.7	2391.5	2530.1
57	1424.4	1532.0	1643.3	1758.7	1877.9	2001.0	2128.1	2258.9	2393.7	2532.4
58	1426.2	1533.8	1645.2	1760.7	1879.9	2003.1	2130.3	2261.1	2396.0	2534.8
59	1427.9	1535.6	1647.1	1762.6	1882.0	2005.3	2132.4	2263.4	2398.3	2537.1
60	1429.7	1537.5	1649.0	1764.6	1884.0	2007.4	2134.6	2265.6	2400.6	2539.5

TRAITÉ

DES CALCULS

DE L'ASTRONOMIE NAUTIQUE,

AVEC DES TABLES

DESTINÉES A EN FACILITER L'USAGE.

PAR M. DE ROSSEL.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires, et moyens de trouver les données des calculs dans la Connaissance des Tems.

1. L'ASTRONOMIE enseigne à calculer les mouvemens des corps célestes, et à prédire le lieu qu'ils doivent occuper dans le ciel à tous les instans. L'astronomie nautique est une des branches les plus utiles de cette vaste science; son objet est de donner aux navigateurs les moyens de connaître la position que leur zénith doit avoir dans le ciel par rapport aux astres dont les astronomes ont fait connaître la situation. Elle prescrit des règles simples et faciles, à l'aide desquelles ils peuvent en conclure leur position sur le globe, ou leur latitude et leur longitude.

2. La latitude d'un lieu est l'arc du méridien terrestre compris entre ce lieu et l'équateur; elle est, par conséquent, la mesure en degrés de sa distance à l'équateur. On lui donne la dénomination de *latitude nord*, si le lieu est situé dans l'hémisphère Nord; et celle de *latitude sud*, s'il est situé dans l'hémisphère Sud.

3. La longitude est l'arc de l'équateur compris entre le méridien d'un lieu quelconque et le méridien d'un autre lieu qu'on appelle *premier méridien*. Elle est ordinairement comptée en allant vers l'Est ou vers l'Ouest, sur une des deux moitiés de l'équateur, depuis 0° jusqu'à 180°. La longitude de tous les méridiens qui sont à l'Est du

premier méridien, est nommée *longitude orientale* ; et celle des méridiens qui sont à l'Ouest, reçoit le nom de *longitude occidentale.*

Il ne se trouve sur la terre aucun cercle dont la position soit fixe comme celle de l'équateur, et d'où l'on puisse commencer à compter les longitudes ; on peut donc prendre pour premier méridien celui de tel lieu que l'on veut. Les différentes nations de l'Europe ont adopté le méridien du principal lieu où l'on observe les mouvemens des corps célestes, et auquel chacune d'elles est dans l'usage de rapporter leurs positions ; c'est, généralement, celui pour lequel les éphémérides sont calculées. Les Français comptent les longitudes du méridien de Paris, et les Anglais du méridien de l'Observatoire de Greenwich. Il n'y a donc pas de longitude absolue proprement dite ; nous ne pouvons connaître que des différences en longitude, lesquelles sont égales, ainsi qu'on vient de le dire, à l'arc de l'équateur compris entre les méridiens des deux lieux dont on compare la position, ou bien encore à l'angle sphérique formé par les méridiens de ces deux lieux.

4. Les astronomes calculent ordinairement la position des astres par rapport à l'écliptique ; mais les observations ne peuvent la donner directement que relativement à l'équateur : on est également obligé, lorsqu'on fait le calcul des observations, d'employer les élémens qui servent à fixer la position des astres, par rapport à l'équateur ; et l'on ne fait usage dans l'astronomie nautique, que de leurs déclinaisons et de leurs ascensions droites.

5. La déclinaison est la distance d'un astre à l'équateur, mesurée sur un grand cercle qui est perpendiculaire à l'équateur, et qu'on appelle cercle de déclinaison.

Elle peut être envisagée comme une *latitude céleste*, et pourrait en porter le nom. La déclinaison est Nord, si l'astre est dans l'hémisphère Nord; elle est Sud, si l'astre est dans l'hémisphère Sud.

Les cercles de déclinaison étant perpendiculaires à l'équateur, doivent passer par les pôles de ce cercle, et avoir, dans le ciel, des positions analogues et correspondantes à celles que les méridiens ont sur le globe. Ainsi, lorsqu'un astre passe au méridien d'un lieu quelconque, son cercle de déclinaison est immédiatement au-dessus du méridien de ce lieu, et se trouve dans le même plan. Si, à cet instant, on mesure l'arc du cercle de déclinaison ou du méridien compris entre l'astre et le zénith de l'observateur, ou bien encore si l'on observe la hauteur qui est le complément de la distance au zénith, il sera facile d'en conclure la latitude. En effet, la déclinaison de l'astre, ou sa distance à l'équateur étant donnée dans la Connaissance des tems, il est clair que la distance de l'observateur au même cercle, ou sa latitude, sera égale à cette déclinaison plus ou moins la distance de l'astre au zénith de ce même observateur. On peut aussi employer la hauteur que l'on obtient directement par l'observation, au lieu de la distance au zénith : le calcul est un peu différent, comme on le verra dans la suite; mais le résultat sera le même.

6. L'ascension droite est l'arc de l'équateur céleste, compris entre le cercle de déclinaison d'un astre quelconque et le point de l'écliptique où le soleil commence sa révolution et coupe l'équateur : ce point s'appelle l'équinoxe du printems. L'ascension droite peut donc être considérée comme une *longitude céleste*, avec cette différence que l'on trouve dans le ciel un point donné par la nature, à partir duquel on peut la compter; au

lieu que sur le globe, on est obligé de prendre arbitrairement le premier méridien d'où l'on compte les longitudes terrestres. Mais l'analogie est exacte entre les différences en longitude et les différences en ascension droite ; car ces dernières sont égales à l'arc de l'équateur compris entre deux cercles de déclinaison, ou *méridiens célestes*, ou bien à l'angle sphérique formé par ces deux cercles. La différence en longitude entre deux lieux situés à volonté sur la surface du globe, est donc égale à la différence des ascensions droites des deux cercles de déclinaison qui correspondent aux méridiens de ces deux lieux, et qui sont, par conséquent, dans les mêmes plans que ces deux méridiens.

7. Cette dernière considération fournit un nouveau moyen de mesurer les longitudes terrestres ; il est tiré du mouvement de la terre sur son axe, ou du mouvement diurne. On sait que la durée d'un jour, ou 24 heures, est le tems que la terre emploie à faire une de ses révolutions par rapport au soleil, lequel est égal au tems qui s'écoule entre le passage du soleil à un méridien et son retour à ce même méridien : 24 heures répondent donc à 360° de longitude ou d'ascension droite. A présent, je suppose que le soleil soit au premier méridien, tous les lieux situés sur ce méridien compteront midi en même tems ; mais les autres lieux qui se trouvent sur la moitié du même grand cercle diamétralement opposée à celle qui forme le premier méridien, c'est-à-dire, les lieux qui sont sur un autre méridien éloigné du premier de 180°, compteront, au même instant, minuit, ou 12 heures de moins : 180° de longitude répondent donc à 12 heures. Le grand cercle qui passe par les pôles et est perpendiculaire au premier méridien, forme deux méridiens, dont l'un est à 90° dans l'Ouest du premier,

et l'autre à 90° dans l'Est. Tous les lieux placés sur celui qui est à l'Ouest, compteront six heures de moins que l'on ne compte sur le premier méridien ; le jour astronomique ne sera pas encore commencé pour eux, et ils ne seront effectivement qu'à la 18me. heure du jour précédent. Les lieux situés sur le méridien qui est à 90° dans l'Est du premier, compteront 6 heures de plus, et seront à la 6me. heure du jour qui vient de commencer pour eux : 90° de longitude répondent donc à 6 heures. On peut imaginer les 90°, ou le quart de l'équateur, divisés en six parties, qui seront chacune de 15°, et l'on en conclura que 15° répondent à une heure ; dès lors, 1° répond à la quinzième partie d'une heure, ou à 4′ de tems. On trouvera, en continuant la subdivision, que 15′ de degrés répondent à 1′ de tems, et 15″ de degrés à 1″ de tems. Ainsi, la longitude, ou la différence en longitude, peut être comptée en tems à raison de 15° par heure.

8. Les lieux situés sur un méridien éloigné de 90° dans l'Ouest du premier méridien, compteront, comme on vient de le voir, 6 heures de moins que l'on ne compte sur ce premier méridien ; les lieux qui seront à 75° dans l'Ouest, compteront 5 heures de moins, et ceux qui ne seront qu'à 15°, n'en compteront qu'une. En général, dans tous les lieux dont la longitude est occidentale, on compte de moins que sur le premier méridien, un nombre d'heures et de minutes égal à la longitude de ces lieux convertie en parties du tems. Dès lors, toutes les fois qu'il s'agit de connaître l'heure que l'on doit compter sur un méridien situé dans l'Ouest de celui du lieu où l'on se trouve, il faut retrancher la différence en longitude de ces deux méridiens réduite en tems, de l'heure que l'on compte dans le lieu où l'on est.

9. Les lieux situés sur le méridien éloigné de 90° dans l'Est du premier méridien, compteront 6 heures, lorsqu'il sera midi sur ce premier méridien, ils compteront donc 6 heures de plus. Ainsi, pour avoir l'heure que l'on compte sur le méridien éloigné de 90° dans l'Est, il faut ajouter la longitude réduite en tems à l'heure du premier méridien. En général, lorsqu'on veut connaître l'heure que l'on doit compter sur des méridiens placés à l'Est de celui sur lequel on se trouve, il faut ajouter les différences en longitudes correspondantes à chacun d'eux, avec l'heure du lieu où l'on est.

10. Le problême des longitudes consiste donc à trouver directement, par l'observation, l'heure du lieu où l'on est, et l'heure que l'on compte sur le premier méridien, ou sur tout autre méridien dont la longitude est connue. Il est facile de se procurer l'heure du lieu par le moyen des hauteurs des astres; on obtiendra l'heure du premier méridien par les observations des distances de la lune au soleil ou aux étoiles. On pourra encore se procurer l'heure du premier méridien ou de tout autre méridien par des montres marines; mais comme ces machines sont sujettes à éprouver de légers dérangemens dans leurs mouvemens; on ne peut y compter que pendant un certain laps de tems, et il faudra les vérifier le plus souvent qu'il sera possible. En général, elles seront plus propres à donner les différences en longitude des lieux peu éloignés les uns des autres, que les longitudes absolues.

On donnera, dans la suite, le détail des diverses opérations que l'on doit faire pour calculer la latitude, l'heure du lieu où l'on a fait les observations, ainsi que sa longitude : on parlera aussi des moyens de se procurer les azimuths qui servent à faire connaître la déclinaison de l'aiguille aimantée. Les hauteurs des astres et leurs

distances, sont les seules données que l'observation puisse procurer directement avec précision ; mais elles ne suffisent pas pour faire le calcul des quantités que l'on cherche : on est obligé d'y employer en outre, les déclinaisons ou les ascensions droites qui servent à fixer la position des astres dans le ciel, ainsi que plusieurs autres élémens que l'on trouve dans la Connaissance des tems. Il faut donc s'occuper d'abord des moyens de les calculer. Ces diverses quantités changent de valeur à tous les instans, et ne sont prédites que pour l'heure que l'on compte sur le premier méridien, ou à l'Observatoire de Paris ; il est donc nécessaire de calculer cette heure. On doit remarquer, d'après ce qui vient d'être dit, que l'on est obligé de supposer, avant de commencer les calculs, que la longitude du lieu des observations est connue. Les déclinaisons et les ascensions droites, ainsi que les autres élémens que l'on prend dans la Connaissance des tems participeront, à la vérité, de l'erreur de la longitude qui a été employée à calculer l'heure de Paris ; mais celle des résultats sera toujours si petite, qu'elle pourra être considérée comme nulle. On suivra les règles qui ont été données art. 8 et 9 pour calculer l'heure de Paris : nous allons donner des moyens faciles de convertir la longitude en tems lorsqu'on la connaît en degrés ; ils en faciliteront beaucoup l'application. On ajoutera d'autres règles pour convertir en degrés la longitude ou les parties de l'équateur lorsqu'on les connaît en tems. Cette dernière opération est aussi utile que la précédente, et est souvent mise en usage.

Moyen de réduire les degrés en tems.

11. Lorsque le nombre des degrés est au-dessus de 100°, servez-vous des tables qui sont dans la Connaissance des tems.

On demande de réduire en tems.... 133°.17′.30″, prenez successivement

Pour 135°	8ʰ.52′
Pour 0°.17′	0 . 1 . 8″
Pour 0°. 0′.30″	0 . 0 . 2
Somme	8 .53 .10

la somme est la réduction demandée.

12. Lorsque le nombre de degrés est au-dessous de 100°, il est plus commode de se servir de la règle suivante.

Multipliez les secondes, les minutes et les degrés par quatre, et comptez les secondes du produit pour des tierces, les minutes pour des secondes, et les degrés pour des minutes.

On demande de réduire en tems. . . 43°.17′.33″

Effectuez la multiplication par . . 4

Produit . . . . . 2ʰ.53′.10″.12‴

Divisez les tierces par 6, et vous aurez une fraction décimale de seconde qui, dans ce cas, est 0″,2; la réduction sera 2ʰ.53′.10″,2.

Moyen de réduire le tems en degrés.

13. Cette réduction s'opère avec le secours des tables qui sont dans la Connaissance des tems.

Il s'agit de réduire en degrés . . . . . $5^h.53'.3''$, prenez successivement

Pour 5^h	$75°.0'.0''$
Pour $0^h.53'$	$13.15.0$
Pour $0^h.0'.3''$	$0.0.45$
Somme.	$88°.15'.45''$

la somme est la réduction demandée.

Lorsque le nombre proposé contient des dixièmes de seconde, multipliez ces dixièmes par 6, le produit sera des tierces, avec lesquelles vous chercherez les parties de degré qui leur correspondent.

S'il faut réduire en degrés . . . . . $3^h.21'.11'',7$

prenez pour 3^h	$45°.0'.0''$
pour $0.21'$	$5.15.0$
pour $0.0.11''$	$0.2.45$
pour $0.0.0,7 \times 6 = 42'''$ . . .	$0.0.10,5$
réduction demandée, somme.	$50°.17'.55'',5$

14. Dans le cas où le nombre proposé ne contient que des minutes et des secondes, il sera plus expéditif de suivre l'inverse de la seconde méthode qui a été donnée, pour réduire les degrés en parties du tems.

Prenez le quart des minutes et des secondes, comptez les minutes du quotient comme des degrés, et les secondes comme des minutes.

On veut réduire en degrés . . . . . 59′.44″
le quart est. . . . . 14°.56′

Si le nombre proposé contient des dixièmes de seconde, convertissez-les en tierces en les multipliant par 6; vous compterez le quart des tierces comme des secondes.

Soit à réduire en degrés . . . . . 45′.35″,4
écrivez. . . . . 45′.35″.24‴
dont le quart est. . . . . 11°.23′.51″

Moyens de calculer les données que l'on trouve dans la Connaissance des tems pour un instant proposé.

15. Lorsque les quantités que l'on cherche dans la Connaissance des tems doivent changer lentement, on les trouve calculées de 24 heures en 24 heures; celles dont les changemens sont plus rapides ont été calculées de 12 heures en 12 heures: on trouve la déclinaison de la lune calculée de 6 heures en 6 heures. Il serait inutile de donner un exemple particulier pour chaque élément que l'on peut être obligé de se procurer, parce que toutes les opérations qu'il faut faire sont les mêmes, et se trouvent renfermées dans les règles suivantes. On se contentera de réunir dans plusieurs exemples les principales difficultés qui peuvent se présenter dans la pratique.

16. Calculez, d'après les règles des art. 8 et 9, l'heure de Paris correspondante à l'instant proposé, ou à celui de l'observation: ensuite, prenez, dans la Connaissance des tems, la déclinaison, l'ascension droite, ou tout autre élément correspondant à l'époque la plus prochaine qui précède cet instant; prenez également le même élé-

ment correspondant à l'époque la plus prochaine qui le suit. La différence des deux quantités que l'on aura ainsi trouvée, sera le changement que la déclinaison, l'ascension droite, ou l'élément que l'on cherche, a éprouvé dans l'intervalle des deux époques pour lesquelles ces quantités ont été calculées. Retranchez l'heure de la première époque de l'heure de Paris, et vous aurez un second intervalle; ensuite, cherchez, par des parties proportionnelles, le changement qui lui correspond. Si les quantités de la Connaissance des tems vont en augmentant, ajoutez le changement calculé à la quantité correspondante à la première époque; si elles diminuent, vous retrancherez le changement calculé de la quantité correspondante à la première époque.

Exemple Ier.

Le 15 mars 1810, étant par 51°.13′ de longitude orientale, on demande la déclinaison du soleil, lors de son passage au méridien, ou à midi.

Réduisez, par les règles de l'art. 12, la longitude en tems, vous aurez $3^h.24'.52''$; et en négligeant les secondes $3^h.25'$. Le méridien de Paris est à l'Ouest de celui de l'observation, et il n'est pas encore midi à Paris; retranchez donc $3^h.25'$, ou la différence en longitude, de l'heure de Paris, qui est 0 heure ou 24 heures. Le reste, $20^h.35'$, est l'heure pour laquelle il faut calculer la déclinaison du soleil. Mais le 15 mars n'est pas encore commencé à Paris; il faut donc faire le calcul pour le 14 à $20^h.35'$. L'époque précédente la plus prochaine est celle du 14 à midi, et l'époque suivante est le 15 à la même heure.

Le 14 mars à midi. . . . . 2°.40′.10″ *S.*

Le 15 mars à midi. . . . . 2°.16′ 32″ *S.*

Changement en 24 heures, différence. 23′.38″

24h.	23′.38″
12	11′.49″
6	5 .54 ,5
3	2 .57 ,2
1	0 .59 ,0

pour 12h. . . . . 11′.49″

pour 6 . . . . . 5 .54 ,5

pour 1 . . . . . 0 .59 ,0

pour 1 . . . . . 0 .59 ,0

pour 0 .35′. . . . 0 .34 ,4

pour 20h.35′ Somme 20′.15″,9

Faites, de la manière suivante, une petite table semblable à celle qui se trouve ci-dessus à gauche : dites, la moitié de 24h. est 12h. ; la moitié du changement en 24h. est 11′,49″, qui correspondent à 12h. La moitié de 12 est 6, et celle de 11′.49″, ou 5′.54″,5 est le changement en 6h. On aura, en suivant la même méthode, le changement en 3h., qui est 2′.57″,2. Le changement, pour une heure, sera le tiers de ce nombre. On peut voir, à côté de la petite table dont on vient de parler, les quantités qu'il faut ajouter ensemble pour avoir le changement en déclinaison qui répond à 20h.35′ ; il est de 20′.16″, lesquelles doivent être retranchées de la déclinaison correspondante à la première époque, ou de 2°.40′.10″, parce que la déclinaison du soleil va en diminuant, et l'on aura la déclinaison cherchée.

Le 14 mars à midi. . . . . 2°.40′.10″ *S.*

Changement en 20h.35′. . . . . 20 .16

DÉCLINAISON le 14 mars à 20h.35′, diff. 2°.20′.54″ *S*

Si les déclinaisons prises dans la Connaissance des tems ne sont pas de même dénomination, c'est-à-dire, si l'une est Sud et l'autre Nord, ce sera une preuve que le soleil a passé sur l'équateur, entre les deux époques auxquelles ces déclinaisons correspondent. Le changement en déclinaison pendant 24^h., au lieu d'être égal à la différence des deux déclinaisons prises dans la Connaissance des tems, sera égal à leur somme. L'exemple suivant fera connaître la manière dont on doit opérer dans cette circonstance.

Exemple II.

Le 21 mars 1810, à $7^h.12'$ du matin, tems civil, ou le 20 mars à $19^h.12'$, tems astronomique, étant par $41°.22'$ de longitude occidentale, on veut calculer la déclinaison du soleil.

La longitude, réduite en tems, est $2^h.45'$, en négligeant les secondes : le méridien de Paris est à l'Est du méridien du lieu de l'observation, et il est à Paris, plus de $19^h.12'$; ajoutez donc à cette heure la différence des méridiens, et vous aurez $21^h.57'$ pour l'heure de Paris.

Déclinaison du soleil le 20 mars à midi .	$0°.18'.8''$ *S.*
Déclinaison du soleil le 21 mars à midi .	$0.5.33$ *N.*
Changement en $24^h.$, somme	$23'.41''$

$24^h.$	$23'.41''$	pour 12^h	$11'.50'',5$
$12^h.$	$11'.50'',5$	. 6	5 .55 ,2
6	5 .55 ,2	3	2 .57 ,6
3	2 .57 ,6	0 .57	0 .56 ,2
1	$0'.59'',2$	pour $21^h.57''$ Somme	$21'.39'',5$

Depuis le 20 mars à midi, jusqu'au 21 à la même heure, la déclinaison a diminué progressivement, et enfin elle a été nulle; ensuite elle a changé de dénomination, et a augmenté jusqu'à devenir égale à $0°.5'.33''N$. qui est celle de la seconde époque. Puisque le changement en déclinaison qui a eu lieu entre le 20 mars à midi et l'instant demandé, est plus grand que la déclinaison du 20 mars, c'est une preuve qu'à cet instant le soleil avait déja traversé l'équateur, et que la déclinaison avait changé de dénomination. Dans ce cas, retranchez la déclinaison de la première époque, qui est le 20 mars, du changement en déclinaison calculé; le reste sera la déclinaison cherchée, laquelle aura une dénomination différente de celle de la déclinaison de la première époque.

Déclinaison le 20 mars à midi . . . . . $0°.18'.8''$ *S*

Changement en déclinaison pour $21''.57'$. 0 .21 .39

DÉCLINAISON du soleil le 20 mars à $21^h.57'$. $0°.3'.31''N$

Si le changement en déclinaison calculé, s'était trouvé plus petit que la déclinaison de la première époque; le soleil n'aurait pas encore été dans l'hémisphère Nord; alors il eût fallu retrancher le changement en déclinaison de la déclinaison de la première époque, et le reste

eût été la déclinaison cherchée, qui aurait conservé la même dénomination que celle de la première époque.

EXEMPLE III.

Le 10 avril 1810, étant par 161°.31′ de longitude orientale, on demande quelle est la déclinaison de la lune à 8h.15′ du soir, tems civil, ou 8h.15′ tems astronomique.

L'heure du lieu est 8h.15′, ou, en y ajoutant 24h., elle est 32h.15′ : retranchez-en 10h.46′, qui est la longitude réduite en tems, et l'heure de Paris sera 21h.29′; mais comme on a été obligé d'ajouter 24h. à l'heure proposée, le 10 avril n'était pas encore commencé à Paris, et l'époque cherchée est le 9 avril à 21h.29′.

Déclinaison de la ☾ le 9 avril à 18h.	18°.19′N
Déclinaison de la ☾ le 10 avril à midi	18 .12
Changement en 6h. : différence.	7′

6h.	7′		18h.	
		pour	3 .	0°. 3,5
3	3,5		0 .29′	0°. 0,6
1	1,2	pour	21h.29′	0°. 4,1

Déclinaison de la ☾ le 9 avril à 18h	18°.19′N
La déclinaison diminue, *retranchez*	0 . 4′
DÉCLINAISON le 9 avril à 21h.29′	18°.15′N

EXEMPLE IV.

Le 13 mars à $4^h.30'$ du soir, étant par $91°.49'$ de longitude occidentale, on demande quelle était l'ascension droite de la lune.

La longitude réduite en tems est $6^h.7'$; il faut l'ajouter à l'heure du lieu, et l'on trouvera que l'époque proposée est, par rapport au méridien de Paris, le 13 mars à $10^h.37'$.

Ascension droite de la lune le 13 à midi . . . $86°.12'$

Ascension droite de la lune le 13 à minuit . . $94°.27'$

Changement en douze heures : différence. . . $8°.15'$

$12^h.$	$8°.15'$
$6^h.$	$4°.\ 7',5$
3	2 . 3 ,7
1	0 .41 ,2

pour	$6^h.$	$4°.\ 7',5$
	3 .	2 . 3 ,7
	1 .	0 .41 ,2
	0 .37′	0 .25 ,4
pour	$10^h.37'$	$7°.17',8$

Ascension droite de la ☾, le 13 à midi. . . . $86°.12'$

L'ascension droite augmente, *ajoutez*. . . . . 7 .18

ASCENSION DROITE demandée . . . . . $93°.30'$

La déclinaison de la lune et son ascension droite ne sont données, dans la Connaissance des tems, qu'en degrés et en minutes. On se contentera de tenir compte des dixièmes de minutes en calculant les parties proportionnelles, et l'on emploiera la somme sans fraction. Au-dessous de $0'',5$, on négligera entièrement les dixièmes, et

au-dessus, comme dans le derniers cas, on écrira une minute de plus.

Les exemples précédens suffisent pour faire connaître la manière de calculer les quantités qui servent à fixer les positions que le soleil, la lune et les planètes occupent dans le ciel. On calculera, par des moyens absolument analogues, les autres élémens des calculs qui éprouvent des changemens, comme le tems moyen à midi vrai, les demi-diamètres du soleil et de la lune, et la parallaxe de la lune. On calculera aussi de la même manière l'heure du passage de la lune au méridien, pour tout autre méridien que celui de Paris.

17. On peut supposer, dans les calculs de l'astronomie nautique, que les étoiles n'ont aucun mouvement apparent, et qu'elles conservent, les unes par rapport aux autres, toujours la même position ; c'est-à-dire, que leurs distances respectives restent les mêmes. Il sera donc inutile d'avoir égard aux petits changemens périodiques connus sous les noms de nutation et d'aberration, qui ne sont que d'un très-petit nombre de secondes. Mais il est indispensable d'avoir égard aux variations annuelles des étoiles en ascension droite et en déclinaison. Ces derniers changemens ne résultent pas d'un mouvement qui leur soit propre, ils proviennent d'une autre cause, ainsi qu'on va l'expliquer. On doit se rappeler ce qui a été dit, art. 6, que l'ascension droite est l'arc de l'équateur compris entre le cercle de déclinaison d'un astre quelconque et le point de l'écliptique où le soleil commence sa révolution et coupe l'équateur. Ce point, qu'on appelle équinoxe du printems, a un mouvement rétrograde et très-lent, en vertu duquel il est transporté de l'est à l'ouest, c'est-à-dire dans un sens contraire à

celui dans lequel on compte les ascensions droites : ces dernières doivent donc augmenter progressivement d'une certaine quantité; par conséquent, la variation annuelle est toujours additive. Le mouvement de l'équinoxe paraît se faire sur l'écliptique; mais il provient réellement du mouvement de l'axe de la terre, et de ce que, par suite du même mouvement, le plan de l'équateur, qui conserve à-peu-près le même degré d'inclinaison par rapport au plan de l'écliptique, éprouve, à l'égard des étoiles fixes, un léger déplacement qui a toujours lieu dans le même sens : le plan de l'équateur doit donc tendre à se rapprocher de certaines étoiles tandis qu'il s'éloigne des autres. La déclinaison d'une partie des étoiles doit, par cette raison, augmenter, et leur variation annuelle en déclinaison être additive : la variation annuelle en déclinaison des étoiles qui se trouvent rapprochées du plan de l'équateur doit être soustractive. Dans les catalogues des étoiles, on donne leurs ascensions droites et leurs déclinaisons pour une époque ordinairement peu éloignée de celle où on les publie; les variations annuelles se trouvent dans la colonne qui suit immédiatement celle qui contient ces quantités. Les variations annuelles en ascension droite sont toujours additives, comme on vient de le dire, pour les époques postérieures à celles du catalogue, et soustractives pour les époques antérieures. Les variations annuelles en déclinaison qui sont additives pour les époques postérieures à celles du catalogue, sont précédées du signe +, et celles qui sont soustractives le sont du signe —. Toutes les fois que l'on calcule la déclinaison d'une étoile pour une époque antérieure à celle du catalogue dont on se sert, il faut employer la variation annuelle avec un signe contraire.

18. Si vous voulez calculer l'ascension droite d'une

étoile pour une époque postérieure à celle du catalogue de la Connaissance des tems, multipliez la variation annuelle en ascension droite par le nombre d'années révolues depuis l'époque pour laquelle ce catalogue a été calculé.

Cherchez ensuite les parties proportionnelles pour les mois et les jours de la manière suivante. Réduisez les jours en parties décimales du mois, en les divisant par trois, et vous multiplierez le douzième de la variation annuelle par le nombre de mois et de parties décimales de mois que vous aurez ainsi trouvé. La somme de ce produit, plus le changement en ascension droite pour les années, est ce qu'il faut ajouter à l'ascension droite du catalogue, pour avoir l'ascension droite qui répond à l'époque proposée.

Il faut opérer de la même manière pour calculer la déclinaison, avec cette différence que la somme des mouvemens pour les années et pour les mois, doit être ajoutée à la déclinaison du catalogue, si cette déclinaison est précédée du signe +, et qu'elle doit être retranchée si la déclinaison est précédée du signe —.

EXEMPLE.

On demande l'ascension droite et la déclinaison d'*Antarès*, pour le 16 avril 1808.

Ascension droite le 1er. janvier 1805 . . .	244°.22′.6″
Déclinaison le 1er. janvier 1805.	25 .59 .0 *S*
Variation annuelle en ascension droite	54″,6
Du 1er. janvier 1805 au 1er. janvier 1808. . .	3 ans.
Produit. Parties proportionn. pour les années.	2.43″,8

Parties proportionn. pour les années..... 2.43″,8

Variation annuelle . . 54″,6

Douzième. . . . . 4″,5

Le 16 avril . . . . . 3 ,5

13″,5

2 ,3

Parties proportionnell.
pour les mois . . . . . 15″,8 . . . . . 15″,8

Somme. 3′.0″

Ascension droite du catalogue. . . . . 244°.22′.6″

ASCENSION DROITE demandée. . . . . 244°.25′.6″

Variation annuelle en déclinaison . . . . . + 8″,8

Du 1er. janvier 1805 au 1er. janvier 1808. . . 3 ans.

Produit. Parties proportionnelles pour les ans. + 26″,4

Variation annuelle . . + 8″,8

Douzième. . . . . + 0″,7

Le 16 avril . . . . . 3 ,5

2″,1

0 ,4

Parties proportionnell.
pour les mois. . . . . 2″,.5 . . . + 2″,5

Somme. + 28″,9

Déclinaison du catalogue . . . . . 25°.59′. 0 *S*

DÉCLINAISON demandée . . . . . 25°.59′.29″ *S*

CHAPITRE II.

Des Corrections que l'on doit faire à toutes les Hauteurs observées du Soleil, de la Lune et des Étoiles.

19. LES hauteurs observées doivent subir plusieurs corrections avant d'être employées dans les calculs. Il faut d'abord les corriger de la dépression de l'horison, et y joutet ou en retrancher le demi-diamètre, selon que 'on a mesuré la hauteur du bord inférieur ou du bord upérieur du soleil et de la lune; ensuite il faut encore es corriger des effets produits par la réfraction et la paralaxe. Les hauteurs du soleil et de la lune doivent presque oujours subir toutes ces corrections. Les étoiles n'ayant i diamètre, ni parallaxe, leurs hauteurs ne doivent tre corrigées que de la dépression de l'horison et de 'effet de la réfraction. On va entrer dans le détail des rincipales causes qui rendent ces corrections nécessaires, t l'on donnera les moyens de se les procurer.

De la Dépression de l'horison.

20. On a vu, dans l'Astronomie physique, art. 328, ue les hauteurs observées en mer sont égales à l'arc du ertical compris entre l'astre et l'horison visuel. Elles eraient exactement les mêmes que les hauteurs vraies, abstraction faite des autres quantités dont on vient de parler, i les rayons visuels qui vont aboutir au cercle qui termine

la partie visible de la surface de la mer, se trouvaient dans un plan horisontal ; alors elles ne devraient éprouver aucune correction. Mais ces rayons visuels sont inclinés au-dessous du plan horisontal, et forment, avec ce plan, un angle qu'on appelle dépression de l'horison, dont la valeur est d'autant plus grande que l'œil de l'observateur est plus élevé au-dessus de la surface de la mer. Toutes les hauteurs observées sont donc trop grandes, et il faut en retrancher la dépression de l'horison. On trouvera dans la table Ire., les dépressions de l'horison qui conviennent à divers degrés de hauteur, depuis 0 mètre 5 décimètres, ou 1 pied 6,5 pouces, jusqu'à 42 mètres, ou 129 pieds 3,5 pouces. L'élévation de l'œil de l'observateur au-dessus de la surface de la mer y est indiquée en mètres et en pieds, et l'on trouve à côté la dépression de l'horison qui lui correspond. Lorsque la hauteur de l'œil se trouve entre deux nombres consécutifs des premières colonnes, on calculera la dépression par des parties proportionnelles de la manière suivante.

EXEMPLE.

On demande la dépression de l'horison lorsque l'œil de l'observateur est élevé de 4^m^,34 au-dessus de la surface de la mer.

Dépression pour 4^m^.	3′.33″
Dépression pour 4 ,5.	3 .46
Différence	.13″
Dépression pour 4^m^.	3′.33″
Parties proportionnelles pour 0^m^,34.	9
DÉPRESSION pour 4^m^,34.	3′.42″

21. Les rayons visuels qui vont aboutir à l'horison de

la mer, ne sont autre chose que des tangentes menées de l'œil de l'observateur à la surface de la terre; or, ces tangentes iront la toucher d'autant plus loin que l'œil sera plus élevé : l'horison visuel sera donc d'autant plus éloigné de l'observateur, que ce dernier sera placé à une plus grande hauteur. Si l'on observe de la partie la plus élevée des œuvres mortes d'un très-grand vaisseau, sa distance pourra être de 5 milles à 6 milles, ou de une lieue $\frac{2}{3}$ à 2 lieues. Ainsi, lorsqu'on navigue près de terre, il peut arriver que le rivage soit plus proche du vaisseau que ne le devrait être le cercle qui termine l'horison : c'est ce que les marins expriment lorsqu'ils disent que l'horison est borné par la terre. Alors, les rayons visuels qui vont aboutir au rivage sont plus inclinés au-dessous du plan horisontal que ceux par lesquels on appercevrait l'horison ; les dépressions de la table Ire. sont, dans ce cas, trop petites, et ne peuvent corriger qu'une partie des erreurs des hauteurs. On a écrit, dans la quatrième colonne, les distances de l'horison qui correspondent à différens degrés de hauteur. Toutes les fois que la distance à laquelle on juge que l'on peut être du rivage, est plus grande ou égale à la distance de la table Ire. qui correspond à la hauteur de l'œil, la dépression que l'on trouve dans la même table pourra être employée à corriger la hauteur. Il est essentiel de remarquer qu'une erreur de un mille, qui est celle que l'on peut commettre dans l'estime de la distance du rivage, ne doit ordinairement pas occasionner, sur la hauteur, une erreur de plus d'un quart de minute et jamais de plus d'une minute. Quand la dépression de l'horison sera affectée de quelque erreur de cette nature, la hauteur corrigée sera toujours trop grande. Si la distance estimée entre l'observateur et la terre est moindre de plus

d'une minute que la distance prise dans la table, ce sera une preuve que l'horison est borné par la terre ; alors la dépression de la table Ire. ne pourra plus être employée à corriger la hauteur. Il serait utile de s'en assurer quelque tems avant de faire l'observation, afin de pouvoir s'éloigner du rivage et s'en tenir à une distance convenable. En général, lorsque l'élévation de l'œil n'est pas de plus de 8 mètres, ou 24 pieds $\frac{1}{2}$, on n'aura jamais à craindre, sur la hauteur, une erreur de plus d'une minute, si l'on se tient au moins à une lieue de terre, ou 3 milles.

22. On trouve dans plusieurs livres de navigation fort estimés, et qui méritent à juste titre de l'être, des moyens de déterminer directement par l'observation, l'inclinaison du rayon visuel qui va aboutir au rivage par lequel l'horison se trouve borné. Il y est prescrit d'observer, au même instant, la hauteur du soleil de deux lieux situés exactement dans la même ligne verticale, et dont les degrés d'élévation seraient très-différens. Mais les méthodes que l'on donne pour calculer les corrections sont longues et pénibles, ou bien ce ne sont que des méthodes d'approximation qui ne comportent pas assez de précision. Il serait cependant facile de donner à ces dernières l'exactitude la plus rigoureuse, par le moyen d'une petite table dont l'usage n'augmenterait pas beaucoup les calculs ; néanmoins on a cru devoir la supprimer, parce que les moyens que l'on a donnés d'éviter les erreurs de la dépression de l'horison, sont suffisans et beaucoup plus commodes dans la pratique. Lorsqu'on voudra obtenir les hauteurs avec toute la précision dont ce genre d'observation est susceptible, il vaudra toujours mieux s'éloigner de terre, et s'en tenir à la distance indiquée par la table Ire.

23. Les dépressions de cette table ont été calculées d'après les dimensions du globe terrestre, conclues de la nouvelle mesure de l'arc du méridien qui a été faite pour fixer la longueur du mètre. Pour les corriger des effets de la réfraction, qui élève ordinairement les objets, elles ont été diminuées de $\frac{8}{100}$, quantité ou coefficient que M. Delambre a trouvé par un très-grand nombre d'observations, et qui a depuis été confirmé par MM. Biot et Arago, dans les observations qu'ils ont faites en Espagne pour prolonger la méridienne.

24. Il est inutile, dans la pratique de la navigation, d'avoir égard aux variations que les réfractions ordinaires peuvent faire subir à la dépression de l'horison, ces quantités sont assez petites et peuvent être négligées. On se contentera de parler ici de quelques phénomènes extraordinaires que M. Biot a constatés par les observations les plus délicates, et dont il a donné le premier une explication satisfaisante, en les soumettant aux calculs rigoureux de l'analyse. Les bornes que l'on a été obligé de se prescrire dans ce Traité, ne permettent pas de le suivre dans ses savantes recherches ; on se contentera d'en extraire les résultats les plus utiles à la navigation. Leur importance ne peut manquer d'être sentie par les marins, qui y trouveront un nouveau moyen de perfectionner leur art.

Les grandes erreurs que les réfractions peuvent occasionner sur la dépression de l'horison, proviennent des différences qui doivent presque toujours exister entre la température de l'eau de la mer, prise à sa surface, et celle de l'air mesurée à plusieurs mètres au-dessus. Les expériences ont fait connaître que la région où elles sont le plus sensibles, est depuis la surface de l'eau jusqu'à 9 et 10 mètres, ou 27 à 30 pieds d'élévation. Le rayon visuel qui part de l'œil d'un observateur placé

sur le pont d'un vaisseau, et qui rapporte la hauteur des astres à l'horison, traverse donc toujours cette région; et il importe de connaître les circonstances dans lesquelles les plus grandes erreurs ont lieu, afin de pouvoir se tenir en garde contre celles dont les observations doivent alors être affectées. Ces erreurs sont sujètes à varier très-fréquemment par les changemens qu'un rayon de soleil peut occasionner subitement dans la température de l'air, soit que cet astre vienne à se dégager d'un nuage, ou bien même qu'il vienne à se cacher. Il est probable qu'on ne pourra jamais parvenir à en connaître exactement la valeur; ou du moins les attentions qu'il faudrait avoir pour l'obtenir, seraient trop minutieuses, et ne pourraient pas être d'un grand usage dans l'astronomie nautique; on se contentera donc d'en donner une valeur approchée, et de faire connaître dans quel sens elles doivent influer sur les hauteurs : on aura l'attention de ne se servir que d'indications faciles à saisir, et qui soient à la portée de tout le monde.

25. Les causes qui font varier extraordinairement la réfraction de l'horison visuel sont les mêmes que celles qui produisent ces phénomènes, que les marins appellent généralement mirage; ainsi, toutes les fois qu'un des phénomènes du mirage viendra à se manifester, la dépression de l'horison sera très-incertaine pendant toute sa durée.

Le sens dans lequel les erreurs de la dépression de l'horison et, par conséquent, celles des hauteurs ont lieu, dépend des circonstances où la mer est plus chaude que l'air, et de celles où elle est plus froide.

1°. Si la mer est plus chaude que l'air, la hauteur corrigée par la dépression prise dans les tables sera trop grande.

2°. Si la mer est plus froide que l'air, la hauteur corrigée sera trop petite.

3°. Lorsque la température de la mer diffère de 4° ou 6° de celle de l'air prise à un ou 2 mètres, 3 ou 6 pieds, au-dessus de sa surface, l'erreur des hauteurs peut être de 3′ à 4′; une différence de 2° à 3° de température peut occasionner des erreurs de 1′ à 2′.

4°. L'eau de la mer est échauffée moins rapidement que l'atmosphère par la présence du soleil, elle sera donc plus froide que l'air pendant quelque tems après le lever de cet astre; alors, les hauteurs corrigées de la dépression des tables seront trop petites, et continueront à être telles, toutes choses d'ailleurs égales, tant que la chaleur du jour augmentera sensiblement. Dans la soirée, le contraire aura lieu; les hauteurs corrigées de la dépression commenceront à être trop grandes dès que la chaleur du jour décroîtra, et leurs erreurs augmenteront jusqu'au coucher du soleil. Les dépressions des tables sont corrigées de l'effet des réfractions ordinaires; ainsi, toutes les fois que les réfractions extraordinaires abaisseront l'horison au lieu de l'élever, les erreurs des hauteurs seront plus grandes; et c'est par cette raison qu'elles doivent l'être un peu plus le soir que le matin.

Les réfractions extraordinaires et accidentelles dont on vient de parler, peuvent servir à expliquer comment certaines latitudes observées en mer par des voyageurs également soigneux et exercés, diffèrent entre elles quelquefois de plusieurs minutes, tandis que la plupart du tems leurs observations se trouvent d'accord.

Des Demi-diamètres du soleil et de la lune.

26. On ne peut obtenir immédiatement, par l'observation, que la hauteur du bord inférieur ou du bord supérieur du soleil et de la lune; il faut donc, pour avoir celle du centre, y ajouter ou en retrancher le demi-diamètre de l'un ou de l'autre de ces deux astres. Ces quantités ne sont pas les mêmes à toutes les époques du mois ou de l'année; mais il sera facile de les calculer dans la Connaissance des tems pour un instant proposé.

27. Toutes les fois que vous avez observé le bord inférieur du soleil ou de la lune, ajoutez le demi-diamètre à la hauteur; si vous avez observé le bord supérieur, il faut, au contraire, le retrancher.

Lorsque vous mesurez le supplément de la hauteur du soleil, vous plongez l'image de cet astre, et vous la placez sur la surface de la mer, ensuite vous mettez en contact avec l'horison, le bord qui en paraît le plus proche, mais qui en est effectivement le plus éloigné; il faut donc retrancher le demi-diamètre du supplément de la hauteur que vous avez observée.

On trouvera, dans la suite, plusieurs exemples de ces opérations, qui sont si simples, que l'on a cru pouvoir se dispenser d'en donner ici.

28. Le demi-diamètre de la lune paraît augmenter d'une petite quantité à mesure que cet astre s'élève sur l'horison. On trouvera dans la table II, intitulée : *Augmentation du demi-diamètre*, ce qu'il faut ajouter au demi-diamètre vrai ou demi-diamètre horisontal, pour obtenir celui qui convient à la hauteur observée. Ainsi, lorsqu'on veut calculer la hauteur apparente du centre

de la lune, il faut employer le demi-diamètre corrigé de l'augmentation dont on vient de parler, ou le demi-diamètre apparent.

De la Réfraction astronomique.

29. La réfraction astronomique est la quantité dont les astres paraissent plus élevés qu'ils ne le sont réellement, après que leurs rayons lumineux ont traversé l'atmosphère. Elle doit toujours être retranchée des hauteurs observées. La plus grande réfraction a lieu lorsque les astres sont à l'horison; elle diminue à mesure que la hauteur augmente, et lorsque l'astre parvient au zénith, la réfraction est nulle.

30. La réfraction n'est pas toujours la même pour les mêmes hauteurs; elle varie en raison de la plus ou moins grande densité de l'atmosphère. En général, plus l'atmosphère est dense, plus les réfractions astronomiques sont grandes; elles sont d'autant plus petites que la densité de l'atmosphère diminue. Le froid a la propriété de condenser l'air, et la chaleur de le raréfier; la densité de l'air augmente donc par le froid et diminue par la chaleur. Il suit de là que les variations de la hauteur du mercure dans le thermomètre, peuvent servir à calculer les changemens correspondans que les réfractions astronomiques doivent éprouver. L'atmosphère est aussi d'autant plus dense que son poids est plus grand, ou qu'il soutient, dans le baromètre, une colonne de mercure plus élevée; et une moindre élévation de cette colonne indique une diminution dans la densité de l'atmosphère. Les changemens des réfractions célestes dépendent donc aussi des variations de la hauteur du mercure dans le baromètre. Les réfractions seront d'autant plus grandes

que la colonne de mercure sera plus élevée, et elles seront d'autant plus petites que son élévation diminuera.

31. Les nombres de la troisième colonne de la table V, intitulée *Réfraction des* ✶, ou des étoiles, sont les réfractions de tous les corps célestes; mais par des raisons que l'on va faire connaître, ils ne doivent être employés que pour corriger les hauteurs des étoiles. Ces réfractions sont tirées des tables publiées par le Bureau des longitudes; et elles ont été réduites à celles qui ont lieu, lorsque le thermomètre centigrade est à 14° au-dessus de zéro, et lorsque le mercure est élevé de $0^m,760$ dans le baromètre.

Les nombres de la seconde colonne, intitulée *Réfraction moins parallaxe du* ⊙, ou du soleil, sont ceux de la troisième dont on a retranché la parallaxe du soleil qui convient à la hauteur vis-à-vis de laquelle ces nombres correspondent. Ils ne doivent servir que pour corriger les hauteurs du soleil; quant aux hauteurs de la lune, on doit employer, comme on le verra bientôt, les nombres de la table VIII qui sont la parallaxe de la lune moins la réfraction. Lorsque les calculs n'exigent pas une très-grande précision, on peut se servir des nombres de la table V et de ceux de la table VIII, sans avoir égard aux variations que les réfractions doivent éprouver en raison des changemens qui ont lieu, soit dans la température, soit dans le poids de l'atmosphère.

32. Mais lorsqu'il s'agit de corriger une distance apparente de la lune au soleil ou à une étoile, il est nécessaire d'appliquer aux nombres des tables V et VIII les corrections qui conviennent à la hauteur du mercure dans le thermomètre et dans le baromètre: on les trouve par le moyen des tables VI et VII, dont on va faire connaître l'usage par un exemple.

EXEMPLE.

La hauteur apparente du centre du soleil étant de 7°.45′, le thermomètre à + 28°, et le baromètre à $0^m,750$, on demande quelle est la réfraction moins la parallaxe.

On trouve dans la deuxième colonne de la table V que, à 7°.40′ de hauteur, la réfraction moins la parallaxe est 6′.35″. La colonne intitulée *Différence*, qui est commune aux réfractions des étoiles et à celles du soleil, fait voir que la réfraction diminue de 8″ pour une augmentation de 10′ dans la hauteur; pour 5′ elle diminuera donc de 4″, et l'on fera le calcul de la manière suivante.

H. app. ⊙ 7°.40′, réfraction.		6′.35″
Parties proportionnelles pour 5′		4
H. app. ⊙ 7°.45′, réfraction.		6′.31″
Thermomètre + 28° / H. app. ⊙ 7°.45′ . .	Table VI. *Retranchez.* .	— 21
		6′.10″
Baromètre 0,750 . . / H. app. ⊙ 7°.45′ . .	Table VII. *Retranchez.*	— 5
RÉFRACTION corrigée		6′. 5″

De la Parallaxe.

33. La position de tous les astres est donnée dans la Connaissance des tems, relativement à un observateur qui serait placé au centre de la terre; ce point est donc celui où doivent être rapportées toutes les lignes qui servent à mesurer les distances angulaires. La hauteur d'un astre

quelconque, observée à la surface du globe, ne peut être égale à celle qui aurait été mesurée au centre, que dans le cas seulement où l'astre est très-éloigné, et que la distance des deux lieux d'observation, ou le rayon de la terre, peut être regardée comme à-peu-près nulle, comparativement à la distance de l'astre. En effet, la ligne qui partirait du point de la surface de la terre où s'est faite l'observation et qui irait aboutir à cet astre, serait alors parallèle à celle qui partirait du centre et irait rencontrer le même astre, ou du moins l'angle que ces deux lignes feraient entre elles, serait si petit qu'il pourrait être considéré comme nul. C'est ce qui arrive lorsqu'on observe les étoiles dont la distance à la terre est très-grande; leurs positions déterminées par un observateur placé à la surface du globe, sont les mêmes que celles qui auraient été observées au centre même de la terre : par conséquent, les étoiles n'ont point de parallaxe. Mais si l'on observe des hauteurs de la lune, qui est le plus rapproché de tous les astres, la ligne menée du point de la surface de la terre, où s'est faite l'observation, jusqu'à la lune, fera un angle avec celle qui serait menée du centre de la terre à ce même astre; alors la hauteur observée à la surface ne séra plus égale à celle qui aurait été mesurée au centre. La différence de ces deux hauteurs est ce qu'on appelle la parallaxe de hauteur.

On doit remarquer que la ligne verticale est le prolongement du rayon de la terre considérée comme sphérique, au point où se fait l'observation; par conséquent toutes les fois que la lune sera au zénith, les deux lignes menées jusqu'à cet astre, en partant du point où se fait l'observation et du centre de la terre, seront confondues en une seule ligne droite : alors la parallaxe sera nulle. Dès que la lune commence à s'éloigner de la verticale, sa hauteur di-

minue, et ces deux lignes forment entre elles un angle qui augmente à mesure que la hauteur devient plus petite. Enfin, lorsque la lune est parvenue à l'horison, la ligne menée de l'œil de l'observateur à cet astre est perpendiculaire au rayon de la terre qui joint le centre et le lieu de l'observation; et la parallaxe doit avoir sa plus grande valeur : cette valeur dépend donc de la hauteur apparente. Puisque le lieu de l'observation et le centre de la terre se trouvent toujours dans la verticale, il est clair que l'observateur est placé à une plus grande élévation que ce centre; la hauteur de la lune lui paraîtra donc toujours trop petite; la parallaxe doit donc aussi être ajoutée à toutes les hauteurs.

La plus grande parallaxe a lieu lorsque la hauteur est égale à zéro, et s'appelle parallaxe horisontale; c'est celle que l'on donne dans les tables astronomiques et dans la Connaissance des tems. Sa valeur varie assez rapidement, elle augmente souvent jusqu'à 60′ et quelques secondes; ensuite elle diminue et devient moindre que 54′. On l'a calculée de 12 heures en 12 heures dans la Connaissance des tems. Celle qui convient à un instant proposé pourra être trouvée par des règles analogues à celles qui ont été données pour se procurer les divers élémens relatifs à la position des astres.

34. Lorsque le soleil est au-dessus de l'horison, sa parallaxe de hauteur varie suivant les mêmes lois que celle de la lune; mais sa parallaxe horisontale est beaucoup plus petite et n'éprouve que de très-petits changemens. Elle n'est jamais plus grande que 8″,95, et moindre que 8″,65. On a supposé qu'elle était constamment de 8″,8, et l'on a retranché la valeur qu'elle doit avoir à différens degrés de hauteur, de la réfraction correspondante aux mêmes hauteurs; par ce moyen l'on a

obtenu les nombres de la seconde colonne de la table V, intitulée *Réfraction moins parallaxe du* ☉. Ils doivent donner directement la correction de la hauteur du soleil, en ayant égard à la réfraction et à la parallaxe.

35. Il est évident, d'après ce qui a été dit plus haut, que la parallaxe de la lune doit être d'autant plus grande que le lieu de l'observation est plus éloigné du centre du globe; et qu'elle doit être la même dans tous les lieux qui sont à égales distances de ce centre. Si la terre était sphérique, la parallaxe horisontale serait partout la même; mais comme sa forme est effectivement celle d'un sphéroïde légèrement applati vers les pôles, ses rayons, à l'équateur, sont les plus grands, et ils diminuent successivement à mesure qu'on approche des pôles : la parallaxe doit donc diminuer en même tems d'une petite quantité. On trouve dans la Connaissance des tems, la parallaxe équatoriale; et pour obtenir celle qui convient à la latitude du lieu de l'observation, on doit lui faire subir une petite correction. Avant de calculer la parallaxe de hauteur, il faut chercher dans la table VII, intitulée *Diminution de la parallaxe équatoriale*, la quantité que l'on doit retrancher de la parallaxe que l'on a trouvée dans la Connaissance des tems.

36. Les nombres de la table VIII sont les parallaxes de la lune moins la réfraction, pour tous les degrés de hauteur de 10′ en 10′, et pour toutes les parallaxes de minutes en minutes. On trouve à la suite des parties proportionnelles pour les secondes de la parallaxe. Lorsque la hauteur de la lune est au-dessous de 10°, il faut calculer les parties proportionnelles pour les minutes de la hauteur, au moyen de la différence des nombres correspondans aux deux hauteurs entre lesquelles se trouve

la hauteur observée. Au-dessus de 10 degrés on trouvera directement ces parties proportionnelles dans la dernière colonne.

37. Si l'on veut corriger une distance apparente de la lune au soleil ou à une étoile, il faut augmenter ou diminuer les nombres de la table VIII, de la valeur des corrections que l'on doit faire aux réfractions, pour avoir égard à la température et au poids de l'atmosphère. Mais il est essentiel de faire observer qu'on doit, dans ce cas, les employer en sens contraire, ainsi qu'on a eu soin de le remarquer en tête des tables VI et VII; en effet, les nombres de la table VIII étant la parallaxe de la lune moins la réfraction, plus la réfraction sera grande, et plus le nombre de cette table sera petit : une augmentation dans la réfraction tendra donc à le diminuer; de même une diminution dans la réfraction tendra à le rendre plus grand.

EXEMPLE.

Le 22 avril 1810, à $1^h.21'$ du matin, tems civil, ou le 21 à $13^h.21'$, étant par $43°.36'$ de latitude Nord, et $3°.7'$ de longitude orientale, la hauteur du centre de la lune, corrigée de la dépression de l'horison, était de $23°.44'$. On demande la hauteur vraie.

L'heure de Paris qui correspond à l'heure proposée est, le 21, à $11^h.17'$.

Parallaxe horis. équat. { le 21 à midi . . 59′.21″
le 21 à minuit . 59′.29″

Changement en 12h. . . . . 8″

12h.	8″
6h.	4″
3	2
1	0 ,6

pour 6h. 4″
3 2
1 0 ,6
1 0 ,6
0.17′ 0 ,2
pour 11h.17′ 7″,4

Parallaxe horis. équat. le 21 à midi . . . . 59′.21″
Parties proportionnelles pour 11h.17′ . . . 7
Parallaxe horis. équat. le 21 à 11h.17′ . . 59′.28″
Diminution de la parallaxe équatoriale. . . [illegible]
Parallaxe horisontale pour la latitude. . . . 59′.22″

Réfr. — parall. de la ☾ pour 23°.40′. . . . 51′.53″
pour 4′ de hauteur . . . —
pour 22″ dans la parallaxe. + 20
Parallaxe de hauteur — la réfraction . . . . 52 .12
Hauteur apparente du centre de la ☾. 23°.44′. [illegible]
Hauteur vraie de la ☾ . . . . . 24°.36′.12″

Correction de la plus petite des hauteurs prises hors du méridien, pour obtenir la Latitude.

38. La méthode que l'on donnera dans ce Traité, pour calculer la latitude par deux hauteurs du soleil prises hors du méridien et l'intervalle de tems écoulé entre les observations, exige que ces observations soient faites dans le même lieu; mais comme il arrive presque toujours que l'on a mesuré les hauteurs dans des lieux différens, il est nécessaire de faire les corrections à quelques-unes des données du calcul, afin d'obtenir celles qui auraient été obtenues, si les observations avaient été faites sur le même point du globe. Ces corrections dépendent de la direction de la route et de la longueur du chemin que le vaisseau a parcouru dans l'intervalle des observations. Il faudra d'abord chercher, par les moyens connus, la différence en latitude et la différence en longitude qui correspondent à la direction et à la longueur de la route, lesquelles seront en même tems la différence en latitude et la différence en longitude des deux lieux d'observation. Il sera bien facile d'avoir égard à la différence en longitude, ainsi qu'on le verra dans la suite. Il ne s'agit ici que de la correction qui doit être faite à la plus petite hauteur, pour tenir compte du chemin fait en latitude.

Le calcul doit donner la latitude du lieu où l'on a observé la plus grande des deux hauteurs; et il faudra toujours corriger la plus petite. Les tables XII et XIII donnent un moyen facile de trouver cette correction; il paraîtra d'autant plus avantageux, qu'il rend inutile l'observation toujours incertaine de l'azimuth du soleil.

39. Les opérations que l'on doit faire peuvent être

divisées en deux parties ; dans la première il s'agit de trouver, au moyen des tables XII et XIII, un nombre que nous appellerons multiplicateur de la différence en latitude ; la seconde partie consiste dans la manière d'employer ce multiplicateur pour trouver la correction de la petite hauteur. On va d'abord entrer dans le détail des règles que l'on doit suivre ; ensuite on donnera plusieurs exemples qui en faciliteront l'application.

4o. Cherchez, dans une des pages à gauche de la table XII, avec la latitude qui est indiquée en tête de chaque colonne et la petite hauteur que l'on a écrite dans la première colonne, un nombre qui est le premier terme, et écrivez-le séparément ; cherchez ensuite, avec les mêmes données et dans la page que vous voyez à votre droite, l'argument que vous écrirez à côté du premier terme.

Avec l'argument que vous venez de trouver, et la déclinaison du soleil, suivant qu'elle est de même dénomination que la latitude ou de dénomination différente, cherchez, dans la table XIII, le second terme, et vous l'écrirez au-dessous du premier.

Retranchez le premier terme du second augmenté s'il est nécessaire de deux unités, et vous aurez le multiplicateur cherché.

Cette première règle a lieu dans tous les cas, excepté celui où la déclinaison et la latitude étant de même dénomination, la déclinaison est plus grande que la latitude. Alors retranchez le second terme du premier, et vous aurez le multiplicateur cherché. Il faut observer que dans cette seule circonstance, le soleil passe au méridien du côté du pôle élevé, et qu'alors le second terme est toujours plus petit que le premier.

4. On trouvera la petite hauteur corrigée, en se conformant aux règles suivantes.

Si la hauteur méridienne doit être plus grande dans le lieu de la grande hauteur que dans le lieu de la petite, ajoutez la différence en latitude à la petite hauteur; ensuite retranchez de la somme le produit de cette même différence en latitude, multipliée par le nombre ou multiplicateur que vous avez trouvé précédemment.

Si la hauteur méridienne doit être plus petite dans le lieu de la grande hauteur que dans celui de la petite, retranchez la différence en latitude de la petite hauteur; ensuite ajoutez au reste le produit de la même différence en latitude, multipliée par le nombre ou multiplicateur que vous avez trouvé au moyen des tables XII et XIII.

Il faut remarquer pour rendre l'application de ces dernières règles encore plus facile, que le produit de la différence en latitude, par le multiplicateur calculé, doit toujours être employé en sens contraire de la différence en latitude elle-même, c'est-à-dire, qu'il faut retrancher le produit toutes les fois qu'on a dû ajouter la différence en latitude : il faut, au contraire, ajouter le produit lorsque la petite hauteur a été diminuée de la différence en latitude.

EXEMPLE I.

Etant par 33°.19′ de latitude estimée Nord, on a observé la hauteur du soleil, et on l'a trouvée de 31°.12′. Quelques heures après, une seconde observation a fait connaître que la hauteur du soleil était de 75°.22′. Dans l'intervalle de ces deux observations, le vaisseau avait fait 10 lieues $\frac{1}{4}$, ou 31,5 milles, au S. O. $\frac{1}{4}$ S. 5° S. La décli-

naison du soleil, à l'instant de la première observation, était de 20°.41′ N. On demande quelle eût été la plus petite de ces hauteurs, si elle avait été observée dans le lieu de la plus grande.

La méthode connue de la réduction des routes, fait connaître que la différence en longitude des deux lieux d'observation est 18′,1, et la différence en latitude de 27′,6, dont le lieu de la grande hauteur est plus au Sud que celui de la petite. Comme il n'est question ici que d'avoir égard au chemin fait en latitude, on ne fera usage que de cette dernière quantité.

Il faut en premier lieu chercher, dans la page de la table XII, qui est intitulée *Premier terme*, le nombre correspondant à 33°.19′ de latitude et à 31°.12′ de hauteur; on trouve 1,39, que l'on écrit ainsi qu'il suit. Ensuite, dans la page intitulée *Argument*, qui est à droite de la précédente, on voit que l'argument correspondant à la même latitude et à la même hauteur est 1,40, et on l'écrit à côté du premier terme. Cet argument et la déclinaison qui est de même dénomination que la latitude, servent à trouver, dans la table XIII, le second terme; il est 0,50, et il s'écrit au-dessous du premier. Comme la latitude est de même dénomination et plus grande que la déclinaison du soleil, on doit retrancher le premier terme 1,39, du second 0,50 augmenté de deux unités, ou de 2,50; le reste 1,11, est le multiplicateur cherché. Le produit de la différence en latitude des deux lieux d'observation, multipliée par 1,11, est 30′,7.

On doit faire attention que la latitude étant Nord, ainsi que la déclinaison, mais plus grande que cette dernière, le soleil passe au méridien du côté du Sud.

Puisque le lieu de la grande hauteur est au Sud de celui de la petite, la hauteur méridienne y doit être plus grande; il faudra donc ajouter le chemin fait en latitude, qui est de 27′,6, à la petite hauteur du soleil 31°.12′ et l'on aura 31°.39′,6, dont il faut retrancher, d'après les règles précédentes 30′,7, qui est le produit de la différence en latitude multipliée par le nombre que l'on a trouvé avec le secours des tables XII et XIII; la petite hauteur rapportée au lieu de la plus grande sera 31°.8′.9, ou bien en négligeant les secondes au-dessus de 50″, 31°.8′.50″. Voici comment on peut disposer les opérations.

H. ⊙. 31°.12′
Lat. *N* 33°.19′ } Ier. terme 1,39. Arg. 1,40.

Décl. 20°.41′
Arg. 1,40 } IIe. terme 2 + 0,50
IIe. term. — Ier. Multip. 1,11

Diff. en lat. 27′, 6
Multip. . . 1 ,11

27′, 6
2 , 8
0 , 3

Produit . . 30′, 7

Le soleil passe au méridien du côté du Sud, et la hauteur méridienne doit être plus grande dans le lieu de la grande hauteur que dans celui de la petite.

Petite hauteur du ⊙.	31°.12′
Ajoutez la différence en latitude. . .	27 , 6
Somme	31°.39′, 6
Retranchez le produit.	30 , 7
PETITE HAUTEUR rapportée au lieu de la grande.	31°. 8′, 9
ou	31°. 8′, 50″

Le détail des opérations que l'on a dû faire pour trouver la petite hauteur corrigée de l'exemple précédent, suffisent pour faire connaître la manière dont il faut opérer dans tous les cas; on supprimera la plupart de ces détails dans les deux exemples suivans.

EXEMPLE II.

Etant par 48°.10′ de latitude N, la petite hauteur du soleil a été observée de 12°.26′; quelques heures après, la grande hauteur a été trouvée de 28°.15′. Le vaisseau avait fait 11 lieues $\frac{1}{3}$ ou 34 milles au N.E. La déclinaison du soleil était de 4°.32′ S.

Le lieu de la grande hauteur était donc au Nord de celui de la petite de 24′.

H. ⊙. 12°.26′ } Ier. terme 1,25. Arg. 1,53.
Lat. N 48°.10′ }

Décl. S 4 .32 } IIe. terme 1,89
Arg. . 1 ,53 }
IIe. ter. — Ier. ter. Multip. 0,64

Diff. en lat. 24′, 0
Multip. . . 0,64
14′, 4
6, 9
Produit . . 15′, 3

Le soleil passe au méridien du côté du Sud; et la hauteur méridienne du lieu de la grande hauteur doit être plus petite que celle du lieu de la petite hauteur.

Petite hauteur du soleil.	12°.26′
Retranchez la différence en latitude . . .	24
différence.	12°. 2′
Ajoutez le produit.	15 ,3
PETITE HAUTEUR rapportée au lieu de la grande	12°.17′,3

ou, en ne tenant compte que des dixaines de secondes, 12°.17′.20″.

EXEMPLE III.

Etant par 3°.42′ de latitude S., la grande hauteur du soleil a été trouvée de 70°.31′. Après le passage au méridien, on a observé la petite hauteur qui était de 50°.22′. Le vaisseau avait fait 4 lieues $\frac{1}{2}$, ou 13 milles $\frac{1}{2}$ au N. N. O., dans l'intervalle des observations. La déclinaison du soleil était de 22°.30′ S.; par conséquent elle avait la même dénomination, mais était plus grande que la latitude.

Le lieu de la grande hauteur était plus au Sud que celui de la petite de 12′.5.

H. ⊙. 50°.22′ } Ier. terme 1,06. Arg. 1,57.
Lat. S 3 .42 }

Décl. S 22 .30 } IIe. terme 0,60
Arg. 1,57 }

Ier. ter. — IIe. ter. Multip. 0,46

Diff. en lat. 12′, 5
Multip. . . 0 ,46

5′, 0
0 , 8

Produit . . 5′, 8

Le soleil passe au méridien du côté du Sud; la

hauteur méridienne du lieu de la grande hauteur doit être plus grande que celle du lieu de la petite.

Petite hauteur du soleil.	50°.22′
Ajoutez la différence en latitude. . . .	12 ,5
Somme.	50°.34′,5
Retranchez le produit	5 ,8
PETITE HAUTEUR rapportée au lieu de la grande.	50°.28′,7

ou 50°.28′.40″.

CHAPITRE III.

De la Latitude.

42. On peut obtenir la latitude en mer, par trois espèces d'observations différentes. La plus usitée et la plus simple de toutes, est l'observation de la hauteur méridienne ; la seconde consiste à observer plusieurs hauteurs près du méridien et à en conclure la hauteur méridienne ; c'est celle qui comporte le plus de précision : cependant, comme le calcul en est un peu long, et qu'elle exige la connaissance de l'heure correspondante à chacune des observations de hauteur, il ne faut l'employer que dans le cas où l'on veut déterminer avec une grande précision, la latitude des lieux dont il est essentiel de faire connaître la position. Enfin, on peut obtenir la latitude par l'observation de deux hauteurs prises hors du méridien, et par l'intervalle de tems écoulé entre les observations. Quoique cette dernière méthode ne soit pas susceptible de la donner avec autant de précision que les deux autres, elle devient d'un grand secours dans l'usage de la navigation, lorsque le soleil s'est trouvé caché à midi et qu'il a été impossible d'observer la hauteur méridienne. On donnera des règles de calcul propres à chacune de ces trois méthodes.

Trouver la Latitude par la hauteur méridienne d'un astre quelconque.

43. Le calcul de la latitude peut se faire, ainsi qu'il a été dit art. 5, en ajoutant la distance méridienne au zénith de l'astre dont on a observé la hauteur, avec la déclinaison du même astre; ou bien en retranchant ces deux quantités l'une de l'autre. On a prescrit, dans les règles suivantes, l'emploi de la hauteur elle-même qui est obtenue directement par l'observation. Les opérations qui en résultent diffèrent de celles dont on fait le plus ordinairement usage; mais les éclaircissemens que nous allons donner, les rendront d'une application plus facile.

44. Lorsqu'on se trouve sur l'équateur terrestre, la latitude est zéro; alors l'équateur céleste passe au zénith, et les deux pôles sont à l'horison. Si l'on avance dans l'un ou dans l'autre hémisphère en suivant le méridien, le pôle de cet hémisphère s'élève au-dessus de l'horison d'une quantité égale au chemin que l'on fait en latitude; et la latitude est égale à la hauteur de ce pôle. Le pôle de l'autre hémisphère descend au contraire du côté opposé au-dessous de l'horison, et l'équateur céleste s'abaisse de ce côté du même nombre de degrés. L'équateur céleste est donc du côté du pôle abaissé, et son inclinaison sur l'horison est égale au complément de la latitude. On tire, de cette dernière vérité, les règles suivantes, pour calculer la latitude directement au moyen de la hauteur méridienne. Il est facile de s'appercevoir que l'inclinaison de l'équateur sur l'horison, a pour mesure l'arc du méridien compris entre ces deux cercles; c'est cet arc que nous nommerons hau-

teur de l'équateur, mais il faut faire attention que ce n'est effectivement que la hauteur du point de l'équateur céleste qui passe au méridien.

45. Calculez en premier lieu l'heure de Paris qui correspond à l'instant où l'astre que vous avez observé passait au méridien, et cherchez, dans la Connaissance des tems, quelle était alors sa déclinaison; ensuite corrigez la hauteur observée de la dépression de l'horison et de la réfraction : si vous avez pris la hauteur du soleil ou de la lune, vous aurez égard au demi-diamètre et à la parallaxe; vous obtiendrez cette dernière quantité en même tems que la réfraction, en prenant, s'il s'agit du soleil, les nombres de la seconde colonne de la table V; s'il s'agit de la lune, vous prendrez les nombres de la table VIII. Dès que vous aurez la hauteur vraie et la déclinaison, vous procéderez au calcul de la latitude.

1°. Remarquez vers quel pôle vous étiez tourné lorsque vous observiez la hauteur méridienne, c'est-à-dire, de quel côté l'astre a passé au méridien.

2°. Si la déclinaison a une dénomination différente de celle du pôle vers lequel vous étiez tourné en observant la hauteur; retranchez la déclinaison de la hauteur vraie, le reste sera la hauteur de l'équateur, dont le complément doit être égal à la latitude. L'astre, dans ce cas, a passé au méridien du côté du pôle abaissé, et la latitude aura une dénomination différente de celle du pôle vers lequel vous étiez tourné en observant la hauteur : cette règle est sans exception.

3°. Si la déclinaison est de même dénomination que le pôle vers lequel vous avez observé la hauteur méridienne, ajoutez la déclinaison à la hauteur vraie; la somme sera

la hauteur de l'équateur. Lorsque cette somme est plus petite que 90°, le soleil a été observé du côté du pôle abaissé, comme dans le cas précédent ; son complément sera la latitude demandée, dont la dénomination doit être différente de celle de ce pôle.

Lorsque la somme de la déclinaison et de la hauteur vraie, ou la hauteur de l'équateur, est plus grande que 90°, c'est une preuve que l'équateur céleste était derrière vous ou de l'autre côté du zénith, à l'instant où vous observiez la hauteur ; alors l'astre a passé au méridien du côté du pôle élevé. Retranchez 90° de la somme de la déclinaison et de la hauteur vraie, le reste sera la latitude dont la dénomination doit être la même que celle du pôle vers lequel vous étiez tourné en observant la hauteur méridienne.

EXEMPLE I. *Hauteur du soleil.*

Le 29 avril 1810, étant par 31°.10′ de longitude occidentale, le soleil a passé au méridien vers le Sud ; la hauteur méridienne du bord inférieur a été observée de 51°.25′ ; l'élévation de l'œil au-dessus de la surface de la mer était de 8 mètres ou 24 pieds 7,5 pouces.

On trouvera, par les règles de l'art. 9, que l'heure de Paris est $2^h.5'$, l'époque de l'observation est donc le 29 à $2^h.5'$; en suivant ce qui a été dit art. 16, on calculera la déclinaison du soleil : elle est de 14°.21′.57″N.

Hauteur observ. du bord inférieur du ⊙.	51°.25′. 0″
Élévation de l'œil 8m. Dépression. . . .	— 5 . 1
Reste	51°.19′.59″
Demi-diamètre du ⊙	+ 15 .54
Somme	51°.35′.53″
Réfraction — parallaxe du ⊙	— 0 .40
Hauteur vraie du ⊙ vers le *S.*	51°.35′.13″
Déclinaison du ⊙ vers le *N.*	14 .21 .57
Hauteur de l'équateur. *Différence* . . .	37°.13′.16″
Complément. LATITUDE *N.*	52°.46′.44″

EXEMPLE II. *Hauteur de la lune.*

Le 26 mars 1810, étant par 43°.7′ de longitude occidentale, et par 25°.36′ de latitude Nord, la lune a passé au méridien vers le Sud, à 4h.20′ du matin, ou le 25 à 16h.20′, la hauteur méridienne du bord supérieur était de 46°.19′ ; l'élévation de l'œil de 7 mètres, ou 21 pieds 6 pouces.

Lors du passage de la lune au méridien, il était à Paris 19h.12′ ; la lune se trouvait à cet instant par 17°.43′ de déclinaison Sud.

Hauteur du bord supérieur de la ☾	46°.19′. 0″
Élévation de l'œil 7ᵐ. Dépression	— 4 .41
Reste	46°.14′.19″
½ Diam. hor. 16′. 5″ / Augment... + 12 } Demi-diam. de la ☾.	— 16 .17
Hauteur apparente du centre :	45°.58′. 2″
Parall. hor. 58′.57″ / Diminuée 58 .55 } Parallaxe — réfract.	+ 40 . 2
Hauteur vraie de la ☾ vers le *S.*	46°.38′. 4″
Déclinaison de la ☾ vers le *S.*	17 .43 . 0
Hauteur de l'équateur. *Somme.*	64°.21′. 4″
Complément. LATITUDE *N.*	25°.38′.56″

EXEMPLE III. *Hauteur d'une étoile.*

Le 16 avril 1808, Antarès a passé au méridien vers le Sud, sa hauteur observée était de 64°.3o′, et l'élévation de l'œil de 6ᵐ,5 ou 20 pieds.

On a trouvé art. 18 que la déclinaison d'Antarès, le 16 avril 1808, était de 25°.59′.29″S.

Hauteur observée d'Antarès vers le S. . .	64°.3o′. 8″
Élévation de l'œil 6ᵐ,5. Dépression. . .	— 4 .31
Reste	64°.25′.29″
Réfraction	— 28
Hauteur vraie d'Antarès vers le *S.* . . .	64°.25′. 1″
Déclinaison vers le *S.*	25 .59 .29
Hauteur de l'équateur. *Somme.*	90°.24′.3o″
Moins 90°. LATITUDE *S.*	0°.24′.3o″

Trouver la Latitude par plusieurs hauteurs du soleil, prises très-près du méridien.

46. Lorsqu'on veut obtenir la latitude par plusieurs hauteurs prises près du méridien, il faut observer le plus grand nombre de hauteurs qu'il est possible dans l'intervalle de 14′ à 16′; on commencera les observations 7′ à 8′ avant le passage du soleil au méridien, et on les cessera 7′ à 8′ après. Les astronomes calculent par une méthode directe et rigoureuse, les quantités qu'il faut ajouter à chacune des hauteurs observées pour en conclure la valeur de la hauteur méridienne (*Voy.* art. 276 du tom. Ier.); mais comme dans l'usage de la navigation, une erreur de 2″ à 3″ est de peu d'importance, nous donnerons une méthode d'approximation qui est plus généralement usitée, parce que les calculs en sont un peu plus simples. On se procurera par cette méthode, un nombre de hauteurs méridiennes égal à celui des observations; et on en déduira la latitude avec bien plus de précision qu'il n'eût été possible de le faire par l'observation simple de la hauteur méridienne. Il est inutile, comme on le verra bientôt, de calculer la correction qui convient à chaque hauteur observée; les opérations se trouvent beaucoup abrégées, et il suffit de chercher la correction de la hauteur moyenne qui résulte de toutes ces hauteurs.

On peut supposer sans craindre d'erreurs sensibles, que dans l'intervalle de 7′ à 8′ avant le passage du soleil au méridien, et de 7′ à 8′ après, les changemens en hauteurs sont proportionnels aux carrés des tems écoulés avant ou après ce même passage. Or, il est

possible de calculer la quantité dont le soleil doit monter pendant la dernière minute qu'il emploie à parvenir jusqu'au méridien, et pendant la première minute qu'il s'en éloigne; il est donc facile d'en conclure celle dont il doit monter ou descendre dans tout autre intervalle, pourvu cependant que cet intervalle ne soit pas de plus de 7′ à 8′. Il ne s'agira que de multiplier le changement en hauteur qui correspond à la dernière minute avant, ou à la première minute après le passage, par le carré de l'intervalle correspondant à chaque observation, ou par le carré de l'angle horaire. Tel est le principe fondamental de la méthode d'approximation que nous allons donner. Elle exige la connaissance de l'heure à laquelle chaque observation a été faite; il faudra donc faire usage d'une montre à secondes, ou mieux encore d'une montre marine, dont l'avance ou le retard absolu sur le tems vrai, aurait été calculé par des observations faites le même jour dans la matinée ou dans la soirée. Nous donnerons dans la suite la manière de se procurer l'heure du lieu où l'on est, et la quantité dont une montre avance ou retarde sur le tems vrai; dans les règles suivantes, nous supposerons que cette quantité est connue.

47. La correction des hauteurs observées, sera d'autant plus petite que ces hauteurs auront été prises près du méridien, ou que l'angle horaire correspondant sera plus petit; les mêmes corrections seront d'autant plus grandes que les angles horaires correspondans seront plus grands. Si l'heure que doit marquer la montre à l'instant du passage du soleil au méridien, est affectée d'une erreur, et que cette erreur soit de nature à augmenter les angles horaires des observations faites avant le passage, il s'ensuivra que les corrections des hauteurs correspondantes seront trop grandes. La même erreur dimi-

nuera les angles horaires des observations qui ont été faites après le passage et les corrections de ces dernières hauteurs seront trop petites : dans le cas où les angles horaires des premières observations auraient été trop petits, ceux des dernières auraient été trop grands. L'erreur de l'heure de la montre influera donc en sens contraires, sur les corrections des hauteurs observées avant et après le passage du soleil au méridien ; et par conséquent sur les hauteurs méridiennes qui en auront été conclues. Il résulte de là que si l'on prend un milieu arithmétique entre toutes les hauteurs méridiennes calculées, les erreurs qui agissent dans un sens compenseront en totalité ou en partie, celles qui agissent en sens contraire ; et l'erreur de la hauteur moyenne ou de la latitude elle-même, sera toujours moins considérable que les plus grandes erreurs dont on vient de parler. On doit donc regarder comme une règle générale, qu'il faut, autant qu'il est possible, observer le même nombre des hauteurs avant et après le passage du soleil au méridien.

48. Calculez d'avance à une demi-minute près, l'heure que doit marquer la montre à l'instant de midi. Commencez les observations 7′ à 8′ avant cet instant, et marquez l'heure, la minute et la seconde qui correspond à chaque observation ; ne cessez d'observer que 7′ ou 8′ après l'heure du passage. Si vous vous servez d'un sextant, vous serez obligé de compter sur le limbe de l'instrument, l'arc marqué par l'alidade à la fin de chaque observation ; et vous l'écrirez à côté de l'heure correspondante. Dans le cas où vous faites usage du cercle à réflexion, comptez l'arc parcouru par l'alidade du grand miroir à la fin de chaque observation paire. Cette manière de compter vous donnera les moyens de pouvoir rejeter les hauteurs que vous jugerez défectueuses, soit

parce qu'elles diffèrent trop des autres, soit parce qu'il serait survenu quelqu'accident imprévu pendant l'observation.

Prenez la somme de toutes les hauteurs, si vous avez observé avec un sextant; ou l'arc parcouru par l'alidade si c'est avec un cercle, et divisez cette somme ou l'arc parcouru, par le nombre des observations; vous aurez une hauteur moyenne apparente. Corrigez cette hauteur de la dépression de l'horison, du diamètre du soleil, et des effets de la réfraction et de la parallaxe; et vous obtiendrez une hauteur moyenne vraie, qu'il ne s'agira plus que d'augmenter de la quantité que vous trouverez par les règles suivantes, afin d'en conclure la hauteur méridienne et la latitude.

1°. Je suppose que vous ayez calculé par des observations faites le matin ou le soir, l'heure que la montre devait marquer à midi, dans un lieu peu éloigné à l'Est ou à l'Ouest, de celui où vous avez observé des hauteurs près du méridien. Corrigez cette heure (art. 8 et 9), au moyen du chemin fait en longitude dans l'intervalle des observations; et vous aurez l'heure du passage du soleil au méridien, pour le lieu où les hauteurs ont été observées.

2°. Cherchez dans la table IX, avec la latitude estimée et la déclinaison, la quantité dont le soleil doit monter ou descendre, une minute avant et après son passage au méridien. Cette quantité est exprimée en secondes et en fractions de seconde; écrivez-la ainsi qu'il est indiqué dans l'exemple suivant.

3°. Prenez la différence qui existe entre l'heure que la montre marquait à l'instant de chaque observation et l'heure du passage au méridien, vous aurez l'angle horaire

correspondant à chaque hauteur. Vous trouverez dans la table X à côté de chacun de ces angles horaires, un nombre qui en est le carré, exprimé en minutes et fractions de minute, et vous l'écrirez à droite de l'angle horaire auquel il appartient. Ajoutez ensemble les carrés de tous les angles horaires, et divisez leur somme par le nombre des observations; le quotient sera un nombre avec lequel vous multiplierez la quantité trouvée dans la table IX. Le produit sera la correction qu'il faut ajouter à la hauteur moyenne vraie de toutes les observations pour en conclure la hauteur méridienne. Vous emploierez cette hauteur méridienne de la même manière que celle qui aurait été obtenue directement par l'observation, et vous aurez la latitude.

L'exemple suivant servira à éclaircir les règles que l'on vient de donner.

EXEMPLE.

Le 17 juin 1793, étant par 9°.52′ de latitude Sud, et par 148°.55′ de longitude orientale, on a observé des hauteurs du soleil près du méridien pour obtenir la latitude. Il avait été reconnu par des observations faites dans la matinée qu'à $7^h.50'$ du matin, la montre retardait de $1^h.22'.34'',2$ sur le tems vrai. Le lieu où l'on se trouvait à midi était de $4'.50''$ de degré ou de $19'',8$ de tems, à l'Ouest de celui où l'on avait observé l'heure. L'élévation de l'œil était de $6^m,17$ ou 19 pieds.

L'heure que la montre aurait marquée à midi, dans le lieu où l'on a observé l'angle horaire, serait $10^h37'25'',8$; mais le lieu de l'observation de latitude est à l'Ouest de $19'',3$ de tems, le passage au méridien arrivera donc

plus tard de la même quantité. Il faut donc ajouter 19″,3 à 10ʰ.37′.25″,8; et l'heure du passage à la montre sera en négligeant les fractions de seconde 10ʰ.37′.45″. Nous ne nous étendrons pas davantage sur les détails des calculs suivans; il sera facile de reconnaître à la simple inspection, les opérations que l'on doit faire.

L'heure que l'on comptait à Paris, à l'instant du passage au méridien, était 14ʰ.4′, mais le 17 n'était pas encore recommencé, et l'époque du passage est le 16 juin, à 14ʰ.4′, la déclinaison du soleil, correspondante est 23°.24′.29″ N.

Heure du passage au méridien 10ʰ.37′.45″.

Heures à la montre.	Intervalles.	Carré des interv. ou multiplicateurs.
10ʰ.35′.47″	1′.58″	3″, 9
36 .21	1 .24	2 , 0
38 . 9	0 .24	0 , 2
39 .10	1 .25	2 , 0
	Somme	8″, 1
Le quart. Multiplicateur.		2 ,02
Quantité dont le soleil montait 1′ avant le passage.		3 , 3
		6″, 1
		0″, 6
Nombre à ajouter à la haut. moyenn. .		6″, 7

Somme des hauteurs du bord infér. du ⊙.	226°. 1′.40″
Le quart. Haut. appar. moyenn. du ⊙ *N.*	56 .30 .25
Elévation 6m,7. Dépression.	— 4 .23
Reste	56°.26′. 2″
Demi-diamètre du ⊙.	+ 15 .46
	56°.41′.48″
Réfraction. — Parallaxe	— 33
Hauteur vraie moyenne du ⊙.	56°.41′.15″
Ajoutez	+ 7
Hauteur méridienne *N.*	56°.41′.22″
Déclinaison *N.*	23 .24 .29
Somme. Hauteur de l'équateur	80°. 5′.51″
Complément. LATITUDE *S.*	9°.54′. 9″

49. Dans l'intervalle de 14′ que peuvent durer les observations, il est possible de prendre huit, dix hauteurs et quelquefois même un plus grand nombre ; les erreurs des hauteurs se trouveront donc extrêmement atténuées sur la latitude calculée. On pourra obtenir la latitude en un seul jour, avec autant de précision que par les observations de huit ou dix hauteurs méridiennes qui auraient exigé le même nombre de jours que celui des observations ; et si l'on prend les hauteurs avec un cercle, l'exactitude sera encore plus grande.

Les plus grandes erreurs proviendront de l'incertitude des réfractions célestes, et principalement de celles qui influent sur la dépression de l'horison dont on a parlé art. 24 et 25 ; cependant, dans les cas ordinaires, on pourra se flatter d'obtenir la latitude à une minute ou

même à une demi-minute près, et quelquefois avec une plus grande précision.

Trouver la Latitude par deux hauteurs du soleil, prises hors du méridien, et par l'intervalle de tems écoulé entre les observations.

50. Le calcul de la latitude par deux hauteurs prises hors du méridien, et par l'intervalle de tems écoulé entre les observations, est assez compliqué. Les bornes que l'on a été obligé de se prescrire dans ce Traité ne permettent pas d'en donner ici la démonstration; mais on la trouvera à la fin de cet ouvrage. Le but qu'on s'est proposé est de faire connaître les opérations qui sont propres à chacune des méthodes que l'on peut employer à la mer, afin d'en rendre l'usage facile et familier. Cette raison a engagé à donner séparément, à la suite du Traité des calculs de l'astronomie nautique, les démonstrations de toutes les méthodes qui tiennent à la résolution des triangles sphériques.

51. Cette méthode exige que l'on sache si le soleil doit passer au méridien du côté du pôle abaissé ou du côté du pôle élevé; mais une pareille condition ne peut avoir aucun inconvénient dans la pratique. En effet, il est impossible d'obtenir la latitude par des hauteurs prises avant ou après midi, toutes les fois que le soleil doit passer au méridien au-dessus de 84° de hauteur, c'est-à-dire, lorsque sa distance méridienne au zénith sera moindre que 6°; or, comme il ne peut jamais y avoir une aussi grande incertitude sur la latitude estimée, dès que ce genre d'observation sera praticable, on aura la certitude de ne pas se tromper sur la dénomination du pôle vers lequel le soleil doit passer au méridien.

52. Toutes les hauteurs que l'on peut observer pendant que le soleil est sur l'horison, ne sont pas également propres à donner la latitude avec la précision qu'exige la sûreté de la navigation ; on pourrait en observer dont les résultats seraient très-défectueux, et même parmi les hauteurs que l'on prendrait dans les circonstances favorables, il y en a dont les latitudes calculées comporteraient plus de précision les unes que les autres. Ces circonstances dépendent en général de la grandeur de l'intervalle de tems écoulé entre les observations, par rapport à celle de l'angle horaire, correspondant à la hauteur la plus voisine du méridien. On peut aussi évaluer la probabilité de l'erreur dont la latitude peut être affectée par le rapport qui existe entre les azimuths correspondans à chaque hauteur ; c'est de ces derniers angles dont on fera le plus d'usage dans les règles suivantes. La méthode dont il est ici question, est discutée avec le plus grand détail dans le second volume du *Voyage de d'Entrecasteaux*; et c'est de cet ouvrage que l'on a tiré tout ce qui va être dit à ce sujet.

53. Lorsque les deux hauteurs ont été prises du même côté du méridien, c'est-à-dire, lorsqu'elles ont été observées toutes les deux le matin ou le soir, les observations sont dites être de même espèce. Si une des deux hauteurs a été observée avant le passage au méridien et l'autre après; les observations sont de différente espèce.

L'azimuth correspondant à la hauteur qui a été observée le plus près du midi, ou à la plus grande hauteur, s'appelle le petit azimuth ; celui qui correspond à la plus petite hauteur s'appelle le grand azimuth.

PRÉCEPTES GÉNÉRAUX

Pour observer la Latitude par deux hauteurs prises hors du méridien.

54. Lorsque la hauteur méridienne doit être de plus de 84°, cette méthode ne peut pas être employée.

La petite hauteur doit être de plus de 6° à 7°.

Le chemin fait dans l'intervalle des observations, ne doit pas être de plus de 12 lieues.

La montre avec laquelle on mesure l'intervalle de tems écoulé entre les observations, ne doit pas s'écarter du tems moyen, de plus de 3′ en 24 heures.

OBSERVATIONS DE MÊME ESPÈCE.

Règles pour la hauteur la plus voisine du méridien.

55. Plus l'observation de la grande hauteur est faite près de midi, plus le résultat comporte de précision.

Si l'on mesure l'intervalle avec une montre marine, le petit azimuth ne doit pas être plus grand que 40° ou 45°. Dans le cas où l'on ne pourrait obtenir cette mesure qu'avec une montre ordinaire, susceptible de s'écarter du tems moyen de 3′ en 24 heures, le petit azimuth ne doit jamais être de plus de 15°.

Règles pour la hauteur la plus éloignée du méridien.

56. L'intervalle de tems écoulé entre les observations doit toujours être plus grand que le petit angle horaire; mais comme le rapport de ces deux quantités est sujet à varier suivant que la hauteur méridienne du soleil doit

être plus ou moins grande, on ne peut déduire de règles générales que de la valeur des azimuths correspondans aux deux hauteurs.

L'azimuth correspondant à la plus petite hauteur, ou le grand azimuth, ne doit pas être moindre qu'environ deux fois et demie la valeur du petit azimuth. Lorsqu'on se sert d'une montre marine, plus le grand azimuth est grand, et plus le résultat comporte de précision, pourvu toutefois que le soleil ait plus de 6° à 7° de hauteur, et que le chemin fait dans l'intervalle des observations ne soit pas de plus de 12 lieues. Avec une montre ordinaire, le grand azimuth ne doit pas être de plus de 75°.

En suivant ces règles, on obtiendra la latitude à 3′ près.

OBSERVATIONS DE DIFFÉRENTE ESPÈCE.

57. Plus les deux hauteurs sont observées près du méridien, plus le résultat comporte de précision.

Règles pour la hauteur la plus voisine du méridien.

58. Si l'on mesure l'intervalle avec une montre marine, le petit azimuth ne doit jamais être de plus de 45°; avec une montre ordinaire, il ne doit pas être de plus de 30°.

Règles pour la hauteur la plus éloignée du méridien.

59. Le supplément du grand azimuth, ou de l'azimuth correspondant à la petite hauteur, ne doit pas être moindre que deux fois et demie la valeur du petit azimuth. Cette règle est sans exception, toutes les fois

que l'on mesure l'intervalle avec une montre marine ; mais il faut se rappeler que le soleil ne doit pas être au-dessous de 6° à 7° de hauteur, et que le chemin fait dans l'intervalle ne doit pas être de plus de 12 lieues. Si l'on se sert d'une montre ordinaire, lorsque le petit azimuth sera entre 15° et 30°, la somme des azimuths correspondans aux deux hauteurs, ou l'intervalle en azimuth, pourra être de 60°. Dans le cas où le petit azimuth serait de 15° et au-dessous, le grand ne devrait pas être plus grand que 75°.

Toutes les fois que l'on se conformera à ces règles, on obtiendra la latitude à 3′ près.

Remarque sur l'application des règles précédentes.

60. Il n'est pas nécessaire de connaître avec précision l'azimuth correspondant à chaque hauteur, pour être en état de juger du degré de précision dont une observation est susceptible ; il suffit de pouvoir l'obtenir à 2° ou 3° près. Les tables XII et XIII, dont on a enseigné l'usage art. 40 et 41, procureront ces azimuths avec l'exactitude nécessaire, au moyen d'une opération très-simple, comme on va le voir.

61. Lorsque vous avez calculé le multiplicateur de la correction que vous devez appliquer à la petite hauteur, pour avoir égard au chemin fait en latitude dans l'intervalle des observations, entrez avec ce nombre dans la table XIV, et vous trouverez à gauche, sur la même ligne, l'azimuth correspondant à la petite hauteur. Vous calculerez pareillement, au moyen des tables XII et XIII, le multiplicateur qui conviendrait à la grande hauteur, et vous trouverez, dans la table XIV, l'azimuth qui lui correspond. Les deux azimuths étant connus, il sera bien

facile, d'après les règles précédentes, de vérifier si les circonstances de l'observation sont favorables, et si le résultat doit être compris dans les limites de précision qui viennent d'être indiquées. Il est cependant essentiel de recommander de prendre les parties proportionnelles avec exactitude dans les tables XII et XIII, toutes les fois que la grande hauteur correspond à un azimuth moindre que 30°. Les mêmes tables ne sont plus propres à faire connaître la valeur de l'azimuth, même par approximation, lorsqu'il sera au-dessous de 15°; mais dans ce cas, on aura la certitude qu'il doit être très-petit, et l'azimuth correspondant à la petite hauteur pourra toujours être de 40 degrés à 45 degrés.

CALCUL DE LA LATITUDE.

62. On ne peut pas obtenir directement la latitude du lieu où l'on a observé la plus grande hauteur; on est obligé de calculer plusieurs autres quantités, 1°. il faut se procurer la distance des deux lieux que le soleil occupait dans le ciel par rapport au méridien et au cercle de l'horison, lors des observations de hauteur; nous la nommerons distance des lieux du soleil : 2°. on calcule l'angle formé par l'arc de grand cercle qui mesure cette distance et par le cercle de déclinaison correspondant à la petite hauteur; c'est le premier angle au soleil : 3°. on cherchera le second angle au soleil, qui est formé par l'arc de la distance et par le vertical de la petite hauteur : 4°. ces deux angles, ajoutés ensemble ou soustraits l'un de l'autre, feront connaître l'angle que le cercle de déclinaison faisait avec le vertical du soleil à l'instant de l'observation de la petite hauteur, ou l'angle de variation : 5°. enfin, au moyen de ce dernier angle, on calculera directement

la latitude, et ce sera celle du lieu où la plus grande hauteur a été observée.

63. Avant de commencer les calculs des quantités qui viennent d'être indiquées, il est nécessaire de se procurer les données qui doivent y être employées. Il faudra d'abord chercher, au moyen de la longitude estimée, l'heure de Paris, correspondante aux deux instans des observations de hauteur; ensuite on prendra, dans la Connaissance des tems, les deux déclinaisons qui avaient lieu à ces instans. La moitié de la somme de ces déclinaisons retranchée de 90°, si le soleil est dans le même hémisphère que le pôle élevé, sera la distance polaire dont on doit se servir dans le calcul. Lorsque le soleil se trouve dans l'autre hémisphère, on ajoute 90° à la demi-somme des deux déclinaisons correspondantes aux observations de hauteur.

64. L'intervalle de tems écoulé entre les observations, tel qu'on l'obtient avec une montre, est le même que l'intervalle qui aurait été mesuré si le vaisseau n'avait pas changé de lieu; en effet, soit qu'il reste immobile ou qu'il se meuve avec une grande vîtesse, pourvu que les instans indiqués par la montre soient les mêmes, le tems écoulé sera toujours égal à la différence des heures correspondantes à chaque observation. Mais dans le calcul, on doit employer la différence des heures que l'on comptait à l'instant des deux observations dans chacun des lieux où elles ont été faites; ainsi il faut ajouter à l'heure de la petite hauteur, la différence en longitude de ces deux lieux, réduite en tems, si le lieu de la petite hauteur est à l'Est de celui de la grande : il faudrait au contraire retrancher la différence en longitude, si le lieu de la petite hauteur était à l'Ouest de celui de la grande. On prendra la

différence qui existe entre l'heure de la petite hauteur corrigée de cette manière, et l'heure de la montre correspondante à la grande hauteur, et l'on obtiendra un intervalle en tems, dont la moitié réduite en degrés sera le demi-intervalle avec lequel on fera le calcul. Lorsque les observations sont de même espèce, c'est-à-dire, quand elles ont toutes les deux été faites le matin ou le soir, retranchez la plus petite des heures que la montre marquait à l'instant de ces observations, de la plus grande, et vous aurez l'intervalle de tems qui les sépare. Si les observations sont de différente espèce, retranchez l'heure correspondante à l'observation faite avant midi, de l'heure qui correspond à celle du soir, augmentée de 12 heures.

65. Les deux hauteurs observées doivent être corrigées de la dépression de l'horison, du demi-diamètre du soleil, et des effets de la réfraction et de la parallaxe, d'après les règles qui ont été données ; il faut de plus appliquer à la petite hauteur une autre correction, afin d'avoir égard au chemin que le vaisseau a fait en latitude dans l'intervalle des observations : on la trouvera par les moyens qui ont été indiqués art. 40 et 41.

66. Le multiplicateur qui a servi à calculer la correction de la petite hauteur, fera connaître, à l'aide de la table XIV, l'azimuth correspondant à cette hauteur. On se procurera pareillement le multiplicateur qui conviendrait à la grande hauteur, afin d'obtenir l'azimuth qui lui correspond ; il faudra ensuite comparer les deux azimuths, et le rapport de leurs valeurs fera juger (*voyez* art. 55 et suiv.), si les observations ont été faites dans des circonstances favorables.

67. Dès que l'on aura rassemblé les données du calcul, et que l'on aura acquis la certitude que le résultat doit

se trouver dans les limites de la précision requise, on cherchera la latitude en se conformant aux règles suivantes.

1°. *Distance des lieux du soleil.* Ajoutez le logarithme sinus de la moitié de l'intervalle au logarithme sinus de la distance polaire ; la somme sera le logarithme sinus de la demi-distance des lieux du soleil ; vous en prendrez le double, et vous aurez la distance entière.

2°. *Premier angle au soleil.* Ajoutez le logarithme de la cotangente de la moitié de l'intervalle avec le complément du logarithme cosinus de la distance polaire ; la somme sera le logarithme de la tangente du premier angle au soleil. La moitié de l'arc correspondant sera la moitié du premier angle au soleil.

L'arc correspondant au logarithme de la tangente du premier angle au soleil, doit être moindre que 90°, si la distance du soleil au pôle élevé est moindre que 90° ; il doit être de plus de 90°, si la distance polaire est plus grande que 90° : ainsi, dans le premier cas, l'arc que l'on trouvera dans les tables sera le premier angle au soleil ; dans le second, il faudra le retrancher de 180°.

Les données du calcul de ces deux premières quantités sont les mêmes ; on les disposera comme on le voit dans le tableau de l'exemple qui va être donné. Immédiatement après avoir pris le logarithme sinus de la moitié de l'intervalle, on prendra celui de sa cotangente, qui s'écrira à côté. Il en sera de même à l'égard de la distance polaire ; après avoir trouvé le logarithme de son sinus, on prendra le complément arithmétique de celui de son cosinus.

3°. *Second angle au soleil.* Ecrivez les unes au-dessous des autres, et dans l'ordre suivant, la grande hauteur,

la petite hauteur corrigée et la distance des lieux du soleil. Ajoutez ensemble ces trois quantités, prenez la moitié de leur somme ; et de la demi-somme, retranchez la grande hauteur.

Cherchez ensuite, dans les tables, le complément arithmétique du logarithme cosinus de la petite hauteur, et le complément arithmétique de celui du sinus de la distance des lieux du soleil. Vous trouverez de même le logarithme cosinus de la demi-somme et celui du sinus de cette demi-somme moins la grande hauteur. Ajoutez les deux complémens arithmétiques avec les deux logarithmes : la moitié de leur somme sera le logarithme sinus de la moitié du second angle au soleil; vous écrirez cette moitié du second angle au soleil au-dessous de celle du premier, que vous avez déja trouvée.

4°. *Angle de variation.* Si le soleil passe au méridien du côté du pôle abaissé, prenez la différence des deux moitiés du premier et du second angle au soleil. Dans le cas où le soleil passe au méridien du côté du pôle élevé, prenez leur somme : vous aurez la moitié de l'angle formé par le vertical du soleil et son cercle de déclinaison à l'instant de l'observation de la petite hauteur; ou la moitié de l'angle de variation.

5°. *Latitude.* Au-dessous du demi-angle de variation, écrivez la distance du soleil au pôle élevé ; et immédiatement après, la petite hauteur corrigée. Retranchez la petite hauteur de la distance polaire, et prenez la différence du reste, à 90° ; écrivez au-dessous la moitié de cette différence.

Cherchez le logarithme cosinus de la moitié de l'angle de variation ; ajoutez-y d'abord la moitié du logarithme sinus de la distance polaire, ensuite la moitié du logarithme

cosinus de la petite hauteur, et enfin le complément arithmétique du logarithme cosinus de la demi-différence à 90°. La somme de ces quatre nombres sera le logarithme sinus d'un arc auxiliaire. Vous prendrez le logarithme cosinus de cet arc, dont vous retrancherez le complément arithmétique du logarithme cosinus de la demi-différence à 90°; le reste sera le logarithme cosinus de la moitié de la somme de la latitude plus 90°. Doublez l'arc correspondant, et après avoir retranché 9 des dixaines et des centaines de degrés du produit, vous aurez la latitude du lieu où vous avez observé la plus grande hauteur.

EXEMPLE.

Le 17 juillet 1809, à environ $6^h.40'$ du matin, étant par 43°.6′ de latitude estimée Nord, et 148°.56′ de longitude orientale; lorsque la montre marquait $6^h.44'.20''$, on a observé la hauteur du bord inférieur du soleil de 21°.34′.50″; et lorsque la même montre marquait.... $11^h.12'.36'',6$, on a pris une seconde hauteur du bord inférieur, et on l'a trouvée de 65°.18′.58″. L'élévation de l'œil, à ces deux observations, est de $6^m.5$ ou 20 pieds. Dans l'intervalle de ces deux observations, le vaisseau s'était avancé de 25′.3″ de degré en longitude vers l'Ouest, et de 27′.26″ en latitude vers le Nord. On demande la latitude du lieu de la grande hauteur.

Les règles qui ont été données précédemment suffisent pour mettre en état de trouver les élémens du calcul de cet exemple; et à l'inspection du tableau suivant, il sera facile de prendre connaissance des opérations que l'on doit faire : nous nous dispenserons donc d'entrer dans aucun détail à ce sujet. Il est cependant nécessaire de faire remarquer ici, que l'on ne s'est pas servi des dé-

nominations ordinaires de première et de seconde observation ; il a paru que celles de petite et de grande hauteur rendaient l'application des règles plus uniforme et les distinctions de cas plus faciles à saisir. On a eu soin d'indiquer, dans le même tableau, les quantités qui doivent être additives et celles qui sont soustractives. Lorsque les mêmes quantités peuvent avoir, dans différens cas, l'un ou l'autre signe, on a écrit à côté les circonstances qui déterminent le sens dans lequel elles doivent être employées. Ainsi, avec le secours de ce seul tableau, il sera possible de calculer toutes les observations, quelles que puissent être d'ailleurs les circonstances dans lesquelles elles ont été faites.

CHAPITRE IV.

Calcul de l'Angle horaire et de la Hauteur d'un astre quelconque.

68. La connaissance de l'heure du lieu où l'on se trouve, est nécessaire, ainsi que nous l'avons déjà vu, pour obtenir la latitude par plusieurs hauteurs du soleil, prises près du méridien ; elle est également essentielle au calcul de la longitude par les montres marines, et par les distances de la lune au soleil et aux étoiles : on peut donc regarder ce problême, comme un des plus importans de l'astronomie nautique. Nous nous contenterons de donner dans ce chapitre, les moyens de se procurer l'heure vraie du vaisseau ; ensuite nous parlerons de la méthode inverse, qui consiste à calculer la hauteur d'un astre, lorsqu'on a acquis la connaissance de l'heure du lieu. Le calcul de la hauteur est utile dans certains cas, où il s'agit de trouver la distance vraie des deux astres, dont on a observé la distance apparente. Nous ferons connaître les applications de ces deux problêmes à celui des longitudes, dans les deux chapitres suivans, qui sont destinés aux développemens des moyens que l'on doit employer pour calculer la longitude par les montres marines, et par les distances.

Calcul de l'Angle horaire.

69. Il faut en premier lieu rappeler ce qui a déja été dit au commencement de ce Traité, que le jour astronomique est l'intervalle de tems écoulé entre le passage du soleil au méridien, et son retour au même méridien. Cet intervalle est divisé en vingt-quatre parties, que l'on appelle heures, et que l'on compte de telle manière que, quand le cercle de déclinaison du soleil, en vertu du mouvement diurne, a parcouru 15° sur l'équateur, on compte une heure; et lorsqu'il a parcouru 30°, on compte deux heures. Il suit de là que, lorsque le cercle de déclinaison du soleil est à 180° du méridien, on compte 12 heures; et enfin au moment de son retour au même méridien, ce cercle de déclinaison a successivement parcouru les 360° de l'équateur, alors les 24 heures de la journée sont écoulées. Les parties du tems qui ont la même dénomination, répondent à des parties égales de l'équateur; elles peuvent donc être évaluées en degrés. Il suit aussi de ce qui vient d'être dit, que l'heure du lieu est égale à la différence d'ascension droite qui existe à l'instant proposé, entre le méridien céleste de ce lieu et le cercle de déclinaison du soleil, ou à l'angle sphérique formé par le méridien et le cercle de déclinaison.

70. Depuis midi, ou le moment du passage du soleil au méridien jusqu'à son coucher, et même jusqu'au moment ou il arrive au méridien éloigné de 180° de celui du lieu, le cercle de déclinaison s'éloigne du méridien de ce lieu; ensuite il s'en rapproche jusqu'au retour du soleil au même méridien. On appelle angle horaire, la plus petite distance du cercle de déclinaison au méridien. Au commencement du jour astronomique,

c'est-à dire, dans la soirée, l'angle horaire est égal à l'heure elle-même ; dans la matinée ou à la fin du jour astronomique, l'heure est la différence de l'angle horaire à 360°, ou à 24 heures, si l'on compte le jour astronomiquement ; ou bien la différence à 12 heures, ou 180°, si on le compte civilement. C'est cet angle qui est donné directement par le calcul que nous allons faire connaître.

71. La hauteur du soleil varie à tous les instans, pendant que cet astre est sur l'horison ; il est donc possible d'obtenir l'heure, ou son angle horaire par l'observation de sa hauteur. Depuis le lever du soleil, jusqu'à son passage au méridien, la hauteur augmente d'abord assez rapidement, ensuite le mouvement en hauteur se rallentit de plus en plus ; enfin lorsque le soleil est au méridien, il peut être considéré comme nul. Dès que le soleil commence à s'abaisser sur l'horison, le mouvement en hauteur augmente dans la même proportion qu'il avait diminué avant le passage ; c'est-à-dire, que les mouvemens correspondans aux mêmes hauteurs sont toujours égaux entre eux, ou peuvent être considérés comme tels. Les circonstances où l'observation de la hauteur du soleil procure l'angle horaire avec le plus de précision, sont celles où le mouvement en hauteur est le plus rapide ; lorsque le soleil est près du méridien, l'observation de la hauteur n'est plus propre à faire connaître l'angle horaire. La théorie enseigne que l'instant du plus grand mouvement en hauteur, est celui du passage au premier vertical, ou bien celui ou l'azimuth du soleil est parvenu à sa plus grande valeur. Il faudra donc que les hauteurs destinées au calcul de l'angle horaire soient prises aussi près qu'il est possible de cet instant. On trouvera dans la table XV, au moyen

de la déclinaison du soleil et de la latitude du lieu, la hauteur que le soleil doit avoir, quand il est au premier vertical, ou bien quand il est parvenu à son plus grand azimuth. L'observation doit donc être faite, lorsque le soleil est près d'atteindre la hauteur marquée dans la table XV.

Il est essentiel de prévenir que l'on ne doit faire usage de cette table, que dans le cas où le soleil est dans l'hémisphère de l'observateur, c'est-à-dire, lorsque la déclinaison du soleil et la latitude sont de même dénomination; car dans le cas contraire, ou bien quand la déclinaison et la latitude sont de dénomination différente, le soleil ne peut jamais parvenir jusqu'au premier vertical. Alors le moment où l'azimuth du soleil est le plus grand, est celui de son lever et de son coucher; ces observations devront donc être faites, lorsque le soleil sera près de l'horison. Mais il ne faudra pas faire usage de hauteurs moindres que 6° à 7°, parce que, au-dessous de cette hauteur les réfractions sont très-incertaines, et pourraient occasionner des erreurs sensibles sur l'heure qui résulterait du calcul.

72. La latitude estimée est une des données nécessaires au calcul de l'angle horaire; et elle peut être affectée d'erreurs assez grandes, pour influer d'une manière sensible sur le résultat. Le cas où l'influence de cette erreur est la plus petite possible, a également lieu lorsque le soleil passe au premier vertical, ou bien lorsqu'il est parvenu à son plus grand azimuth. On aura donc la certitude de diminuer l'erreur de l'angle horaire, provenant de celle de la latitude, si l'on suit les règles qui viennent d'être données relativement aux circonstances où le mouvement en hauteur est le plus grand.

73. En général, plus l'azimuth correspondant à la hauteur observée approchera de 90°, plus le résultat du calcul, comportera de précision. L'erreur que l'on aura à craindre sur l'angle horaire sera au contraire d'autant plus grande que les observations auront été faites près du méridien, et que l'azimuth correspondant sera plus petit. Il résulte de là que l'observation de la hauteur, n'est pas propre à faire connaître l'heure du lieu, pendant quelque tems, avant le passage au méridien, et pendant quelque tems après le même passage. Cependant les résultats auront toujours la précision, qu'exige la sûreté de la navigation, si les hauteurs ont été observées avant 10 heures $\frac{1}{2}$ du matin, et après 1 heure $\frac{1}{2}$ du soir ; alors on obtiendra l'heure du lieu à 8″ ou 10″ de tems près.

Lorsque le tems est couvert, on n'est pas toujours maître de faire les observations dans les circonstances les plus favorables ; et il peut arriver qu'une hauteur prise entre 10 heures $\frac{1}{2}$ et midi, ou bien entre midi et une heure et demie du soir, soit encore propre à donner la connaissance de l'heure avec une exactitude suffisante. Alors il ne faut pas que l'azimuth correspondant à la hauteur, soit plus petit que 20° ; mais dans ce dernier cas, on ne pourra pas se flatter d'obtenir l'heure à moins de 20 à 25 secondes de tems près. Il sera bien facile de vérifier si l'azimuth correspondant à la hauteur observée est de plus de 20°, à l'aide des tables XII et XIII. Ces tables ont donc l'avantage de faire connaître la précision dont les observations d'angles horaires sont susceptibles ; comme elle nous ont déja fait connaître celle des latitudes que l'on obtient par deux hauteurs prises hors du méridien. On cherchera d'après les règles des art. 40 et 41, le multiplicateur qui convient à la hauteur observée ; et l'on trouvera dans la table XIV l'azimuth

qui lui correspond. D'après la grandeur de cet azimuth, on pourra juger du degré de confiance que l'on doit ajouter à une observation qui aurait été faite près des limites où le résultat peut être défectueux. Si l'azimuth calculé est au-dessous de 20°, il faudra entièrement rejeter les observations : dans le cas même où il ne serait pas de plus de 30°, et où l'on n'aurait pas pu observer la latitude, il ne faudra se diriger qu'avec circonspection, d'après le résultat de l'observation.

74. Toutes les fois que l'on voudra obtenir l'heure du lieu par l'observation de la hauteur du soleil, on prendra les hauteurs aussi près qu'il sera possible des circonstances les plus favorables. On observera plusieurs hauteurs de suite, et l'on écrira l'heure, la minute et la seconde qui correspondent à chaque observation. Il sera facile d'en conclure l'heure moyenne correspondante à la hauteur moyenne ; ensuite le calcul s'effectuera de la manière suivante.

75. Cherchez d'abord au moyen de l'heure approchée du lieu et de la longitude estimée, l'heure de Paris à l'instant des observations. Cette heure vous servira à trouver dans la Connaissance des tems la déclinaison du soleil, dont vous conclurez la distance au pôle élevé, qui doit être employée dans le calcul. Faites ensuite à la hauteur observée du bord inférieur du soleil, les corrections nécessaires pour obtenir la hauteur vraie du centre.

Ecrivez dans l'ordre suivant, la hauteur vraie, la latitude et la distance polaire ; prenez la somme de ces trois quantités, et la moitié de cette somme ; ensuite, de la demi-somme, retranchez la hauteur vraie. Cherchez dans les tables, le complément arithmétique du logarithme

cosinus de la latitude, et le complément arithmétique du logarithme sinus de la distance polaire. Ajoutez ces deux complémens arithmétiques au logarithme cosinus de la demi-somme, et au logarithme sinus de la demi-somme moins la hauteur vraie, vous aurez un nombre dont la moitié sera le logarithme sinus du demi-angle horaire. Vous trouverez dans les tables l'arc correspondant, ce sera la moitié de l'angle horaire compté en degrés. Vous devriez multiplier cet arc par deux, pour avoir l'angle horaire; ensuite, pour le réduire en tems vous seriez obligé de multiplier encore le produit par quatre. Le calcul sera beaucoup abrégé, si vous multipliez tout-de-suite par huit, l'arc trouvé dans les tables; mais vous compterez les secondes du produit pour des tierces, les minutes pour des secondes, et les degrés pour des minutes: alors vous aurez l'angle horaire du soleil en tems. Si l'observation a été faite le soir, cet angle horaire sera égal à l'heure du lieu; si elle a été faite le matin son complément à 24 heures sera l'heure comptée astronomiquement, et son complément à 12 heures sera l'heure civile: mais dans ce dernier cas vous aurez soin d'indiquer si l'observation a été faite le matin ou le soir.

76. L'heure ainsi trouvée s'appelle le tems vrai, parce qu'il est immédiatement conclu de la position actuelle du soleil, par rapport au méridien du lieu de l'observation. C'est le soleil qui en vertu du mouvement diurne de la terre, opère le retour successif du jour et de la nuit; il règle aussi dans son mouvement annuel le retour périodique des saisons, c'est lui qui nous offre les divisions du tems les plus remarquables, et celles auxquelles nous sommes obligés de nous conformer dans les usages de la vie civile.

EXEMPLE.

Le 14 juillet 1792, à environ $8^h.18'$ du matin, étant par $5°.55'.45''$ de latitude Sud, et par $152°.3'$, de longitude orientale, on a fait les observations suivantes, dont on veut conclure l'heure du lieu. L'élévation de l'œil étoit de $4^m,27$.

Heures à la montre.			
$8^h.\ 8'.48''$		Somme des haut. ⊙.	$172°.46'.20''$
9.19		Hauteur moyenne ⊙.	28.47.43
10. 3,5		Dépression.....	— 3.40
11. 7			$28°.44'.\ 3''$
12. 8		Demi-diamètre ⊙...	+ 15.47
12.58			$28°.59'.50''$
Somme.....	$64'.23'',5$	Réfract. parall.....	— 1.36
Heure moyenne	$8^h.10.43,9$	Hauteur vraie.....	$28°.58'.14''$

L'heure de Paris conclue de l'heure approchée du lieu de l'observation et de la longitude est $10^h.10'$. La déclinaison correspondante est $21°.39'.30''$N ; comme le soleil se trouve dans un autre hémisphère que l'observateur, on doit y ajouter 90°, et la distance du soleil au pôle élevé sera de $111°.39'.30''$.

Il est inutile en calculant l'angle horaire, de prendre des parties proportionnelles pour les secondes; en conséquence, on ajoutera aux trois données du calcul, ou l'on en retranchera le nombre de secondes nécessaire pour que les logarithmes des lignes trigonométriques qui leur correspondent, se trouvent directement dans les tables. Il faudra aussi avoir l'attention de faire subir à ces mêmes données les petits changemens, dont

on vient de parler, de manière que les dixaines de leur somme puissent être un nombre pair, comme on va le voir.

Hauteur vraie ⊙	28°.58′.10″		
Latitude.....	5 .55 .40	com. cos	0,0023285
Distance polaire.....	111 .39 .30	com. sin	0,0317968
Somme.....	146°.33′.20″		
½ somme.....	73 .16 .40	cos	9,4589882
½ somme. — Hauteur.....	44 .18 .30	sin	9,8441785
		Somme.....	19,3372920
		½ somme... sin	9,6686460
		Demi-angle horaire.	27°.47′.30″
		Multipliant par....	8
Si l'observation a été faite le soir. Angle horaire.....			3h.42′.20″
Si l'observation a été faite le matin, retranchez-en 12h.			8h.17′.4[illegible]
		Heure de la montre.....	8 .10 .4[illegible],9
		La montre retardait de....	0h. 6′.56″,1

L'heure de la montre est plus faible que l'heure du lieu de 6′.56″1 ; la montre retardait donc de cette quantité sur le tems vrai. Si l'heure de la montre avait été la plus grande, la différence des deux heures, eût été son avance sur le tems vrai.

77. L'heure peut aussi être obtenue par l'observation de la hauteur d'une étoile. Il faudra suivre les règles qui ont été données relativement aux observations de la hauteur du soleil, soit pour profiter des circonstances favorables, soit pour le calcul de l'angle horaire. Dans ce cas, l'angle horaire de l'étoile sera la différence en ascension droite qui existe à l'instant de l'observation,

entre le méridien céleste du lieu, et le cercle de déclinaison de l'étoile. L'ascension droite du cercle de déclinaison d'une étoile, ou l'ascension droite de l'étoile elle-même, étant connue, il sera facile d'en conclure l'ascension droite du méridien. Voici comment on y parviendra. Si la hauteur de l'étoile a été observée à l'Ouest du méridien, ajoutez son angle horaire à son ascension droite réduite en tems; la somme sera l'ascension droite du méridien. Si la hauteur a été observée à l'Est, retranchez au contraire l'angle horaire de l'ascension droite; et le reste sera l'ascension droite du méridien. Ensuite ôtez l'ascension droite du soleil de celle du méridien, et vous aurez la différence des ascensions droites du soleil et du méridien, ou l'heure du lieu. On trouve dans la Connaissance des tems, au lieu de l'ascension droite du soleil, la distance de l'équinoxe au soleil qui en est le complément à 360°, ou 24 heures; il faudra donc, pour avoir l'heure du lieu, ajouter cette quantité à l'ascension droite du méridien: si la somme surpasse 24 heures, on en retranchera 24 heures. La distance de l'équinoxe au soleil, doit être calculée pour l'heure de Paris, conclue de l'heure approchée du lieu de l'observation et de sa longitude. Dans le cas où l'heure qui résulte du calcul diffère de plus de 5′ de l'heure approchée du lieu, on calculera de nouveau la distance de l'équinoxe au soleil, et l'on obtiendra une seconde heure qui sera beaucoup plus précise que la première. Il serait possible de parvenir au dernier degré d'exactitude en faisant un troisième calcul de la distance de l'équinoxe au soleil; mais le second aura toujours la précision que l'on peut desirer.

EXEMPLE.

Le 20 mai 1810, à $10^h\frac{1}{4}$, étant par 21°11′ de latitude Sud, et par 30°.6′ de longitude occidentale ; on a observé des hauteurs d'*Antarès*. L'heure moyenne de la montre était $9^h.43'.55''$, et la hauteur moyenne 59°.22′.30″. L'élévation de l'œil de 6 mètres. On demande l'heure vraie de l'observation.

L'heure de Paris correspondante à l'heure du lieu est $12^h.15'$. La déclinaison d'*Antarès* est de 25°.59′.57″ Sud ; et sa distance au pôle élevé 64°.0′.3″. Son ascension droite 244°.27′, et en tems $16^h.17'.48''$. La distance de l'équinoxe au soleil de $20^h.11'.56'',7$.

Hauteur apparente d'Antarès			59°.22′.30″
Elévation 6m. Dépression			— 4′.21
			59°.18′. 9″
Réfraction.			0 .34
Hauteur vraie d'Antarès			59°.17′.35
Haut. vraie de l'étoile.	59°.17′.40″		
Latitude.	21 .11 . 0	com. cos.	0,0303842
Distance polaire . . .	64 . 0 . 0	com. sin.	0,0463398
Somme.	144°.28′.40″		
½ somme	72 .14 .20	cos.	9,4843696
½ somme. — Haut. .	12 .56 .40	sin.	9,3502600
		Somme	18,9113536
		Demi-somme. sin.	9,4556768
		Demi-angle horaire.	16°.35′.30″
		Multipliant par . . .	8
		En tems	$2^h.12'.44''$

En tems	$2^h.12'.44''$
Ascens. droite de l'étoile.	16 .17 .48
L'★ à l'E. *Différ.*	
★ à l'O. *Somme.* Ascens. droite du mérid..	$14^h.\ 5'.\ 4''$
Dist. de l'équinoxe au ☉.	20 .11 .57
Somme. Heure du lieu. .	$10^h.17'.\ 1''$
Heure de la montre. . .	9 .43 .55
La mont. retard. sur T.V.	$0^h.33'.\ 6''$

L'heure qui résulte du calcul ne diffère que de 2′, de l'heure approchée du lieu ; et il est inutile de calculer une seconde fois, la distance de l'équinoxe au soleil.

Calcul de la hauteur des astres.

78. Ce problême est l'inverse du précédent. Dans le premier on trouve l'angle horaire d'un astre par l'observation de sa hauteur ; dans celui-ci, il faut calculer la hauteur par le moyen de l'angle horaire : il exige donc avant tout que l'on ait connaissance de l'heure du lieu. Lorsqu'on veut calculer la hauteur du soleil, son angle horaire est bien facile à trouver. Il est égal à l'heure vraie, si la hauteur doit avoir lieu après midi ; et il est égal au complément de l'heure vraie à 24 heures, ou à 12 heures, dans le cas où la hauteur aurait lieu le matin ou avant midi. Mais lorsqu'il s'agit d'obtenir la hauteur de la lune ou d'une étoile, il faut calculer l'angle horaire de la manière suivante.

79. Cherchez d'abord au moyen de la longitude, l'heure de Paris correspondante à l'heure du lieu ; et prenez dans la Connaissance des tems, la distance de l'équinoxe au

soleil. Vous retrancherez cette distance de l'heure du lieu augmentée s'il est nécessaire de 24 heures, et vous aurez l'ascension droite du méridien. La différence que vous prendrez entre l'ascension droite du méridien, et l'ascension droite de l'étoile ou de la lune, que vous aurez calculée pour l'instant auquel vous voulez avoir la hauteur, sera l'angle horaire de la lune ou de cette étoile à l'instant proposé. Cherchez ensuite dans la Connaissance des tems, quelle était la déclinaison de la lune ou de l'étoile au même instant, et vous en conclurez la distance au pôle élevé. L'angle horaire, la distance polaire et la latitude sont les trois données nécessaires au calcul que vous ferez de la manière suivante.

80. Ecrivez d'abord l'angle horaire, et prenez-en la moitié; au-dessous de cette moitié placez la distance de l'astre au pôle élevé; et immédiatement après la latitude. Retranchez ensuite la latitude de la distance polaire, et prenez la différence du reste, à 90°; écrivez au-dessous la moitié de cette différence. Cherchez dans les tables, le logarithme cosinus de la moitié de l'angle horaire; écrivez au-dessous la moitié du logarithme sinus de la distance polaire, et la moitié du logarithme cosinus de la latitude: prenez enfin le complément arithmétique du logarithme cosinus de la demi-différence à 90°. La somme de ces quatre logarithmes sera le logarithme sinus d'un angle auxiliaire; vous écrirez au-dessous le logarithme cosinus de cet angle auxiliaire, et vous en retrancherez le complément arithmétique du logarithme cosinus de la demi-différence à 90°. Le reste sera le logarithme cosinus de la demi-somme de 90° plus la hauteur; vous doublerez l'arc qui lui correspond, et après avoir ôté 9 des dixaines et des centaines de degré, vous aurez la hauteur vraie que vous voulez obtenir.

81. Lorsqu'il a été impossible d'observer les hauteurs des astres dont on a mesuré la distance, on les calcule par cette méthode; elles servent, comme on le verra bientôt, à corriger cette distance des effets de la réfraction et de la parallaxe. Une minute d'erreur dans la hauteur calculée, ne peut avoir sur la distance vraie, qu'une influence insensible; on pourra donc négliger les secondes en faisant le calcul, et l'on ne prendra les logarithmes qu'avec cinq décimales. Nous allons faire l'application des règles précédentes à un calcul de la hauteur d'une étoile, et à un autre de la hauteur de la lune.

EXEMPLE I.

Le 19 juin 1793, étant par 9°.45′.50″ de latitude Nord, et par 148°.43′ de longitude orientale; lorsqu'une montre marquait $3^h.41'.5'',5$, on a trouvé par des observations de hauteurs du soleil qu'elle retardait sur le tems vrai de $1^h.21'34'',3$. On demande quelle était la hauteur d'*Antarès*, lorsque la même montre marquait $6^h.8'.10'',8$. Entre ces deux époques, le vaisseau s'était avancé de 1′ vers le Nord, et de 4′ en longitude vers l'Est.

Heure de la montre	$6^h.\ 8'.10'',8$
La montre retarde. (*Ajoutez*)	$1^h.21'.34'',3$
Tems vrai	$7^h.29'.45'',1$
Le lieu où l'on est, de 4′ à l'E. de celui de la 1re. observation, ou 16″ de tems. (*Ajoutez*)	+ 16
Tems vrai du lieu de la hauteur. . . .	$7^h.30'.\ 1'',1$
Heure approchée de Paris.	$21^h.35'$

Tems vrai du lieu de la hauteur		$7^h.30'.1'',1$
Dist. de l'équinoxe au ☉. (*Retranchez*).		18 . 6 .54 ,6
Ascension droite du méridien		$13^h.23'.6'',5$
en degrés		$200°.46'.38''$
Ascension droite d'*Antarès*		244 .11 .40
Angle horaire		$43°.25'.2''$
Antarès à l'Est du méridien		
Latitude du lieu de la hauteur *S.*		$9°.44'.50''$
Déclinaison d'*Antarès*		25 .57 .30 .*S*
Distance au pôle élevé		64 . 2 .30
Demi-angle horaire	$21°.43'$	cos. 9,96893
Distance polaire	64 . 3	$\frac{1}{2}$ sin. 4,97699
Latitude	9 .45	$\frac{1}{2}$ cos. 4,99684
Dist. polaire. — Latitude. . .	$54°.18'$	
Différence à 90°	35 .42	
Demi-différence à 90°	17 .51	com. cos. 0,02143
		sin. angle auxil. 9,96322
		cos. angle auxil. 9,59627
(cos. angle auxil. — com. cos. $\frac{1}{2}$ différence) cos.		9,57484
$\frac{1}{2}$ (90° + hauteur)		$67°.56'$
(Double — 90°) HAUTEUR VRAIE de l'étoile. .		45 .52

EXEMPLE II.

Les données étant les mêmes que dans l'exemple précédent, on demande quelle était la hauteur de la lune au même instant.

Heure approchée de Paris			21°.35′
Ascension droite du méridien			200°.46′.38″
Ascension droite de la ☾			208 . 7
Angle horaire de la ☾, à l'E.			7°.20′.22″
Déclinaison de la ☾.			7 .25 *S.*
Distance au pôle élevé			82 .35
Demi-angle horaire.	3°.40′	cos.	9,99911
Distance polaire	82 .35	½ sin.	4,99817
Latitude.	9 .45	½ cos.	4,99684
Dist. polaire. — Latitude. . .	72°.50′		
Différence à 90°	17 .10		
Demi-différence à 90°	8 .35	com. cos.	0,00489
		sin. angle auxil.	9,99901
		cos. angle auxil.	8,82888
(cos. angle auxil. — com. cos. ½ différence.)		cos.	8,82399
½ (90° + hauteur)			86°.10′
(Double — 90°) HAUTEUR VRAIE de l'étoile. .			82 .20

CHAPITRE

Moyens de régler les Montres marines et de les employer à la détermination des Longitudes.

82. LA différence des longitudes de deux lieux quelconques, étant égale à la différence des heures que l'on compte au même instant, dans ces deux lieux; si l'on embarque une montre dont le mouvement soit régulier, et qui puisse conserver l'heure du lieu d'où l'on est parti, cette montre fera connaître l'heure de ce lieu à tous les instans subséquens. Mais, les observations des hauteurs du soleil, feront connaître aussi l'heure des différens lieux où l'on se trouve aux mêmes instans; il s'ensuit que les montres peuvent également faire connaître la différence en longitude qui existe entre le lieu d'où l'on est parti, et chacun des lieux où l'on observe des hauteurs, ou bien la longitude absolue, si l'on a eu les moyens de vérifier l'avance ou le retard de la montre sur l'heure du premier méridien. Cette propriété des montres marines leur a fait donner le nom de gardes-tems. On conçoit qu'il est impossible qu'une montre conserve exactement l'heure du port de départ; cependant l'horlogerie a été poussée à un tel point de perfection, que l'on peut supposer sans avoir à craindre de grandes erreurs qu'elle s'en écarte tous les jours d'une même quantité. Ainsi dès que cette quantité est connue, on peut se servir de la montre

pour déterminer les longitudes. Nous allons d'abord nous occuper des moyens de trouver la quantité dont une montre s'écarte chaque jour de l'heure du port de départ, ensuite nous parlerons de la manière de calculer la longitude.

Moyens de régler les montres marines.

83. Jusqu'à présent nous avons enseigné la méthode de comparer l'heure d'une montre au tems vrai, ou à l'heure que l'on conclut immédiatement des observations. Nous avons vu que les parties du tems qui ont la même dénomination, étaient mesurées par les parties égales de l'équateur que le cercle de déclinaison du soleil décrit pendant la révolution diurne de la terre. Ainsi 24 heures répondent toujours à 360°, et 1" à 15°. La terre emploie toujours le même tems à faire sa révolution, et son mouvement autour de son axe est uniforme; dès lors si le soleil restait immobile, ou bien si son mouvement en ascension droite était uniforme, il est clair que les parties égales de l'équateur seraient toujours parcourues en des tems égaux par le cercle de déclinaison du soleil. Mais les changemens en ascension droite, sont assujétis aux inégalités du mouvement du soleil dans son orbite, et ne peuvent pas être les mêmes dans les mêmes intervalles de tems : d'où il résulte que les subdivisions du tems vrai, qui ont la même dénomination, ne doivent pas être égales entre elles. Ces inégalités proviennent aussi de ce que les parties égales de l'écliptique interceptées entre deux cercles de déclinaison, ne diffèrent pas toujours de la même quantité, des parties de l'équateur qui sont interceptées entre les mêmes cercles : l'arc de l'écliptique est plus grand que celui de l'équateur, quand les deux cercles de déclinaison sont près des

points équinoxiaux; il est au contraire plus petit, quand les cercles de déclinaison sont près des solstices. Il résulte de ces deux causes d'inégalités qui se combinent entre elles, que dans certains tems de l'année, deux jours vrais pris consécutivement, diffèrent d'une quantité assez sensible; et comme leur augmentation ou leur diminution s'opère progressivement, il s'ensuit que les heures du tems vrai ne sont pas égales entre elles: il en est de même des minutes et des secondes. A la fin de décembre les jours vrais diffèrent d'une demi-minute; mais la plupart du tems les différences sont moins considérables, et deviennent presqu'insensibles sur des intervalles de deux ou trois heures: c'est par cette raison que nous avons négligé d'y avoir égard, lorsqu'il s'agissait de calculer l'angle horaire d'un astre, et l'heure que doit marquer à midi, une montre qui a été comparée au tems vrai dans la matinée ou dans la soirée. Mais il n'en est pas de même, si l'on veut régler une montre marine destinée à donner la longitude.

84. Le mécanisme des montres a été conçu de manière à pouvoir communiquer aux rouages, et par conséquent aux aiguilles un mouvement aussi uniforme qu'il est possible; ces aiguilles doivent donc décrire sur le cadran des angles égaux dans des tems égaux. La comparaison des heures marquées par une montre au tems vrai, dont les intervalles correspondans sont inégaux, n'est donc pas propre à donner une idée de la régularité de ses mouvemens. Les astronomes qui rapportent les positions de tous les astres à celles des étoiles fixes, comparent le mouvement des pendules et des montres à un mouvement uniforme pris immédiatement dans la nature, et ils font usage du tems sydéral. Le jour sydéral est l'intervalle de tems écoulé entre le passage d'une

étoile au méridien et son retour au même méridien. Les étoiles étant fixes et le mouvement de la terre autour de son axe étant uniforme, les cercles de déclinaison des étoiles doivent parcourir sur l'équateur, des arcs égaux en des tems égaux ; les heures du tems sydéral, ainsi que les autres subdivisions, sont toujours égales entre elles, et peuvent donner une idée de la régularité des mouvemens d'une pendule ou d'une montre.

85. Les marins font la plupart de leurs observations sur le soleil ; et lorsqu'ils observent les autres astres, ils rapportent leurs positions à celle du soleil. Ils sont donc obligés de comparer les mouvemens des montres marines à un autre mouvement uniforme qui soit plus rapproché du mouvement réel, en vertu duquel le cercle de déclinaison du soleil parcourt l'équateur. Ce mouvement est purement fictif ou artificiel ; il n'existe pas dans la nature, et il a été trouvé comme on va le voir par une hypothèse très-ingénieuse. On a supposé qu'un cercle de déclinaison, partant en même tems que le soleil, du point où cet astre commence sa révolution, se meut uniformément sur l'equateur et en parcourt la circonférence dans le même tems que le soleil met à parcourir l'écliptique. Ce cercle de déclinaison imaginaire doit s'avancer tous les jours sur l'équateur en allant de l'Ouest à l'Est de $59'.8''$; mais on sait aussi la quantité dont le cercle de déclinaison du soleil s'avance réellement, la position du cercle de déclinaison imaginaire, par rapport au cercle de déclinaison réel, est donc connue à tous les instans : de plus, les tems écoulés entre son passage à un méridien, et son retour au même méridien seront toujours égaux entre eux ; et les parties égales de l'équateur qu'il parcourra en vertu du mouvement diurne, correspondront toujours à des intervalles de tems

égaux. Le tems que l'on conclut de la position que doit avoir sur l'équateur, ce cercle de déclinaison supposé, s'appelle tems moyen, pour le distinguer du tems vrai qui dérive immédiatement de la position réelle du soleil; le tems moyen aura sur ce dernier, l'avantage de pouvoir servir à la vérification des mouvemens d'une montre marine.

86. L'heure comptée en tems moyen, est égale à l'arc de l'équateur compris entre le méridien du lieu, et le cercle de déclinaison du tems moyen: cet arc doit être compté comme celui du tems vrai en allant de l'Est à l'Ouest. La différence du tems vrai au tems moyen est égale à l'angle formé par le cercle de déclinaison réel du soleil, et par celui du tems moyen, ou par l'arc de l'équateur compris entre ces deux cercles; c'est-à-dire, qu'elle est égale à la différence qui existe entre l'ascension droite du soleil, et son ascension droite moyenne. Cette différence est ce qu'on appelle l'équation du tems. Le mouvement du cercle de déclinaison du tems moyen est quelquefois plus rapide, et d'autres fois plus lent que celui du cercle de déclinaison du soleil; il sera donc dans certains tems en avant, et dans d'autres en arrière de ce dernier. Lorsqu'il est en avant, il faut ajouter l'équation du tems à l'heure vraie que l'on obtient directement par les observations; lorsque le cercle de déclinaison du tems moyen est en arrière, on doit au contraire retrancher l'équation du tems de l'heure vraie, et l'on aura le tems moyen correspondant.

L'équation du tems varie à chaque instant; elle est ordinairement donnée dans les Éphémérides pour tous les jours à midi. Mais dans la Connaissance des tems, au lieu de l'équation du tems, on a inséré l'heure qu'une

pendule ou une montre réglée sur le tems moyen, doit marquer à l'instant du passage du soleil au méridien. Cette quantité y est désignée sous le nom de tems moyen au midi vrai ; et elle s'y trouve pour tous les jours, à l'instant où l'on compte le midi vrai à l'Observatoire de Paris : il sera facile de la calculer pour tout autre instant, d'après les règles qui ont été données dans le premier chapitre. Lorsque le tems moyen est en avance sur le tems vrai, le nombre qu'on trouve dans la Connaissance des tems est égal à l'équation du tems ; et, il doit être ajouté à l'heure que l'on conclut du calcul de l'angle horaire, toutes les fois que l'on veut obtenir le tems moyen. Lorsque le tems moyen est en retard sur le tems vrai, l'équation du tems est alors soustractive ; mais, dans ce cas, le tems moyen à midi vrai est son complément à 12 heures ; et pour obtenir le tems moyen, il faudra également ajouter la quantité que l'on trouve dans la Connaissance des tems, à l'heure qui résulte du calcul de l'angle horaire : alors il sera nécessaire de retrancher 12 heures de la somme. D'après ce qui vient d'être dit, il sera facile de se rendre raison des deux règles suivantes.

87. Lorsque vous connaissez le tems vrai correspondant à un [illegible] quelconque, et que vous voulez obtenir le tems moyen qui répond au même instant ; ajoutez à l'heure proposée, le tems moyen au midi vrai.

Si vous connaissez le tems moyen, il faut au contraire en retrancher le tems moyen au midi vrai, et vous aurez le tems vrai correspondant au même instant.

88. Les hauteurs du soleil destinées à régler une montre marine, doivent être prises aussi près qu'il est possible de l'instant où cet astre passe au premier

vertical, c'est-à-dire de celui où il est parvenu à la hauteur marquée dans la table XV. Dans le cas où le soleil n'est pas dans le même hémisphère que l'observateur, on commencera à prendre des hauteurs dès qu'il sera au moins de 7° au-dessus de l'horizon. Alors les erreurs de la latitude estimée, et celles de la hauteur auront la moindre influence possible sur l'heure calculée. On prendra six hauteurs de suite ; on écrira l'heure, la minute et la seconde correspondantes à chaque observation, et on conclura la hauteur apparente moyenne correspondante à l'heure moyenne des six observations. Le calcul de l'angle horaire doit se faire d'après les règles de l'art. 75 ; il donnera le tems vrai correspondant à l'heure moyenne de la montre. Il faut ajouter à ce tems vrai, le tems moyen au midi vrai, pris dans la Connaissance des tems pour l'heure approchée de Paris ; et l'on aura le tems moyen correspondant, d'où il sera facile de conclure l'avance ou le retard de la montre sur le tems moyen à l'instant où les observations ont été faites.

Je suppose qu'un ou plusieurs jours après avoir fait la première observation, on prenne de nouvelles hauteurs, il faudra calculer de la même manière, le tems moyen correspondant à l'heure moyenne des secondes observations ; et l'on en conclura l'avance ou le retard de la montre, sur le tems moyen à l'époque où ces observations ont été faites.

Si l'avance ou le retard de la montre, trouvé par les secondes observations, est le même que l'avance ou le retard trouvé par les premières, ce sera une preuve que dans l'intervalle, la montre a suivi exactement le tems moyen. Mais si l'avance des secondes observa-

dans est plus grande que celle des premières, le mouvement de la montre aura été plus rapide que celui du tems moyen ; et la différence de deux avances sera la quantité dont la montre a avancé dans l'intervalle. Si l'avance des secondes observations avait été plus petite que celle des premières, la montre aurait retardé dans le même intervalle, d'une quantité égale à la différence des deux avances conclues des calculs d'angles horaires. Dans le cas où la montre se serait trouvée en retard sur le tems moyen, une augmentation dans le retard des premières observations indiquerait que la montre a retardé entre les deux époques où les observations ont été faites ; une diminution dans le retard annoncerait au contraire que la montre a avancé sur le tems moyen. Dès que l'on connaît l'avance ou le retard d'une montre dans l'intervalle des observations, on calculera son avance ou son retard en 24 heures, de la manière suivante. Cette dernière quantité est ce qu'on appelle la variation diurne d'une montre, ou plus simplement sa marche. On fera cette proportion, l'intervalle entre les observations, est à l'avance ou au retard dans cet intervalle, comme 24 heures sont à la variation diurne, que l'on obtiendra en multipliant le second terme par 24, et en divisant le produit par l'intervalle des observations. Nous allons en donner un exemple.

Il est essentiel de remarquer que dans le calcul de l'angle horaire, il faut tenir compte des secondes de degré, et prendre des parties proportionnelles pour obtenir les logarithmes des lignes trigonométriques qui doivent entrer dans ce calcul.

EXEMPLE.

Le 29 mars 1793, dans le havre de Tongatabou, étant par 21°.7′.35″ de latitude Sud, et par 177°.33′.14″ de longitude occidentale, on a pris dans la matinée, des hauteurs du bord inférieur du soleil. L'heure moyenne de la montre marine était 7ʰ.34′.28″,82, la hauteur moyenne apparente du centre du soleil était 19°.23′.13″,4. On calculera par les règles de l'art. 7[illegible] le tems vrai correspondant, et l'on en conclura ainsi [illegible], l'avance ou le retard absolu de la montre sur le tems moyen.

Tems vrai des observations	7ʰ.29′. 0″,89
Tems moyen au midi vrai.	0 . 4 .54 ,23
Tems moyen des observations.	7ʰ.33′.55″,12
Heure de la montre	7 .34 .28 ,82
Le 29 mars à 7ʰ.½, la montre avançait sur le tems moyen de.	0 . 0′.33″,70,

Dans la matinée du 7 avril, étant au même lieu, on a fait d'autres observations. L'heure moyenne de la montre était 7ʰ.57′.3″,23, la hauteur apparente du centre du soleil était 23°.25′.20″. On opérera de la même manière que pour la première observation.

Tems vrai des observations	$7^h.53'.31'',30$
Tems moyen au midi vrai	$0.2.19'',98$
Tems moyen des observations	$7^h.55'.42'',30$
Heure de la montre.	$7.57.3,23$
Le 7 avril à $7^h.53'$, la montre avançait sur le tems moyen, ou le 6 à $19^h.53'$. .	$0^h.1'.20'',93$
Le 29 mars [illegible] elle avançait de .	$0.0.33,70$
En 9 jours la montre a avancé de. . .	$0'.47'',23$
En 24 heures de	$+5,24$

89. Toutes les fois que le vaisseau est à l'ancre, et que l'horison ne se trouve pas borné par la terre, les hauteurs destinées à calculer la variation diurne d'une montre, peuvent être observées avec un sextant ou avec un cercle à réflexion. Les observations doivent être faites près du passage au premier vertical, ou près de l'instant du plus grand azimuth; et la latitude du mouillage peut être obtenue avec une assez grande précision. Mais malgré toutes ces précautions, on aura encore à craindre sur l'heure du lieu, une erreur de $3''$ à $4''$, et même une erreur un peu plus grande. Il ne faudra donc pas se borner à une seule série composée de six hauteurs, comme on le fait ordinairement à la mer. Il sera bon d'observer trois ou quatre séries, alors il sera probable que l'avance ou le retard moyen de la montre conclu de toutes ces séries, aura la précision de $2''$ ou $3''$. L'avance ou le retard de la même montre dans l'intervalle des observations, pourra donc être affecté d'une erreur double de ces quantités, c'est-à-dire de $4''$ ou $6''$; cette erreur aura lieu, lorsque les erreurs des

observations du premier et du second jour seront à leur plus grande valeur et agiront en sens contraires. Il faudrait dans ce cas que l'intervalle des observations fût de plus de 6 jours, pour que l'erreur probable de la variation diurne, fût moindre qu'une seconde. Une pareille erreur est assez considérable, et l'on ne doit pas négliger de prendre pour l'atténuer, les moyens qui vont être indiqués.

90. Il a été remarqué qu'un même observateur, mesure toutes les hauteurs ou un peu trop grandes, ou un peu trop petites; les erreurs provenant de ce défaut du coup-d'œil, auront donc lieu dans le même sens sur toutes les hauteurs : mais celles qui auraient influé dans un sens, sur l'heure des observations du matin, influeront en sens contraire sur l'heure des observations du soir. Les plus grandes erreurs auront lieu par conséquent sur les avances ou les retards conclus de la comparaison du résultat d'une observation faite le matin, avec le résultat d'une observation faite le soir; dès lors il ne faudra comparer que les résultats des observations du matin entre eux, et les résultats des observations du soir aussi entre eux. L'erreur probable de l'avance ou du retard calculé de cette manière, ne sera plus que d'environ 3″, et au bout de 6 jours, l'on pourra se flatter d'avoir obtenu la variation diurne à une demi-seconde près. On parviendra même à une plus grande précision, si l'on prend un milieu entre la variation diurne qui résulte des observations du matin, et celle qui résulte des observations du soir. Le contraire aura lieu à l'égard de l'avance ou du retard absolu de la montre, le dernier jour des observations, qui doit ainsi que la variation diurne servir à calculer la longitude : il faudra prendre le milieu entre le résultat des observations du matin, et

celui des observations du soir. Alors les erreurs qui sont de nature à agir en sens contraire sur ces deux résultats, n'influeront que de la moitié de leur différence sur l'avance ou le retard absolu de la montre.

91. Lorsqu'on ne peut pas voir l'horison de la mer, alors il faut faire les observations à terre. Le meilleur moyen sans doute, est de prendre les hauteurs avec le cercle répétiteur à réflexion, dont la description et l'usage ont été donnés par M. Biot, de manière à ne rien laisser à désirer, dans le premier volume de l'Astronomie physique, page 273. Mais le but de ce Traité est de faire connaître le parti que l'on peut tirer des instrumens à réflexion ; et nous allons parler d'un nouvel instrument qui les rend propres à l'observation des hauteurs du soleil, lorsqu'on ne peut pas voir l'horison de la mer. On se sert alors d'un horison artificiel. La pièce principale de cet instrument, est une glace ronde et plane, qui est enchâssée dans une monture en cuivre, soutenue par trois pieds à vis, dont la destination est de placer la glace dans une situation horisontale. La surface inférieure de cette glace est dépolie et noircie, afin que l'image du soleil ne puisse être réfléchie que par la surface supérieure, la quelle doit être polie avec soin et être exactement plane ; on a évité par ce moyen, les erreurs qui pourraient provenir du défaut de parallélisme des deux surfaces. L'horison artificiel, tel qu'on vient de le dépeindre, doit être posé sur une table très-solide ou sur le terrain ; ensuite on met un niveau sur la surface supérieure de la glace, et l'on fait mouvoir les vis des pieds pour caller l'instrument. Lorsque, dans toutes les positions que l'on peut donner au niveau, on voit la bulle d'air rester au milieu de l'ouverture de l'étui de cuivre qui renferme la fiole, on a

la certitude que la surface de la glace est dans un plan horisontal.

Je suppose à présent que les rayons directs du soleil viennent frapper cette glace ; ils seront réfléchis de manière à ce que l'angle d'incidence sera égal à l'angle de réflexion ; et, puisque la surface de la glace est dans un plan horisontal, ces deux angles seront égaux à la hauteur du soleil. L'image qui parviendra à l'œil par les rayons réfléchis, paraîtra abaissée de [illegible] du plan horisontal d'une quantité égale à l'élévation de l'image directe. Ainsi l'angle formé par les rayons qui partent de l'œil de l'observateur, et vont d'une part aboutir à l'image du soleil réfléchie par la glace, et de l'autre part à son image directe, sera le double de la hauteur. On pourra mesurer cet angle avec un instrument à réflexion, en prenant la distance de l'image directe à l'image réfléchie ; c'est-à-dire, en faisant coïncider dans le champ de la lunette, l'image réfléchie par le grand miroir de l'instrument, avec celle qui est réfléchie par l'horison artificiel. Si l'on met en contact, les bords de ces deux images qui sont les plus proches l'un de l'autre, on aura le double de la hauteur du bord inférieur du soleil ; et si l'on met en contact les bords les plus éloignés, on obtiendra le double de la hauteur du bord supérieur. Il faudra donc observer alternativement la distance des bords les plus proches, et celle des bords les plus éloignés ; alors on obtiendra directement la hauteur apparente du centre du soleil, en divisant la somme d'un nombre pair de hauteurs, par le double du nombre des observations. Les hauteurs du soleil près du méridien et la hauteur méridienne, peuvent être observées avec un horison artificiel ; mais, comme les angles mesurés avec le secours de cet instrument sont doubles des hauteurs,

l'usage s'en trouve limité. L'horison artificiel ne peut plus servir, lorsque le soleil a plus de 63° de hauteur; car les instrumens à réflexion ne peuvent pas procurer la mesure des angles de plus de 126 degrés.

Trouver la Longitude par les montres marines.

92. Les montres marines conservent, ainsi qu'on l'a déjà dit, une telle régularité dans leurs mouvemens, que l'on peut supposer, sans avoir à craindre de trop grandes erreurs, qu'ils sont uniformes pendant un certain laps de tems. Ce qui revient au même, que de supposer que la variation diurne observée au port de départ, reste toujours la même pendant le cours de la navigation, qui suit immédiatement l'époque à laquelle les observations ont été faites. Si l'on veut que le mouvement des montres s'écarte le moins possible de cette supposition, il faut prendre les plus grandes précautions, afin de les garantir des secousses, et même des mouvemens étrangers qui pourraient altérer la durée des oscillations du balancier qui leur sert de régulateur. La première loi que l'on doit donc s'imposer, est de ne jamais les pousser. Il a été remarqué qu'une montre qui avait été réglée, tandis qu'elle était suspendue verticalement, changeait de mouvement, si on la plaçait dans une situation horisontale; il sera donc nécessaire de maintenir les montres dans la situation qu'elles avaient lorsqu'on a observé leur variation diurne. L'usage le plus ordinaire est de les poser à plat dans une boîte; alors elles doivent toujours rester dans une situation horisontale. Il serait avantageux de les placer dans un endroit où le soleil ne pénètre jamais, afin d'éviter les changemens fréquens et subits de température. On ferait aussi

très-bien de les déposer près du centre des mouvemens du vaisseau, afin que ces mouvemens eussent le moins d'action possible sur ceux du balancier. Lorsqu'on voudra observer des hauteurs ou des distances, on fera usage d'une bonne montre à secondes, que l'on comparera à la montre marine avant de faire les observations; et la comparaison procurera l'heure de cette montre qui doit correspondre à l'heure [illegible] des observations. Il faudra faire une seconde comparaison après avoir observé, pour vérifier, si le mouvement de la montre à secondes n'a pas été altéré pendant le tems que les observations ont duré. Toutes les fois que l'on n'aura négligé aucune de ces précautions, on pourra se flatter que les mouvemens des montres ont été aussi réguliers qu'il est possible, et espérer que les longitudes se trouveront dans les limites de la précision nécessaire à la sûreté de la navigation.

93. Dès que l'on connaît l'avance ou le retard absolu d'une montre sur le tems moyen d'un lieu quelconque, et sa variation diurne, il est bien facile d'en conclure son avance ou son retard absolu sur le tems moyen du même lieu, à une époque postérieure à celle où cette montre a été réglée. Je suppose que l'on ait fait en mer des observations de hauteurs du soleil pour obtenir la longitude par une montre marine; on calculera son avance ou son retard absolu sur le tems moyen du lieu où elle a été réglée, par les règles suivantes.

Si la montre était en avance sur le tems moyen, et qu'on ait reconnu qu'elle avance aussi tous les jours d'un certain nombre de secondes; ajoutez à l'avance absolue, le produit de ce nombre de secondes multiplié par le nombre de jours, et de fractions de jour écoulés entre les deux époques des observations: si la variation

diurne est au contraire un retard, vous retrancherez ce produit, de l'avance absolue observée au lieu où elle a été réglée, vous aurez l'avance absolue correspondante à l'époque proposée.

Dans le cas où la montre aurait été en retard, il faudrait ajouter à ce retard, le produit des retards diurnes multipliés par le nombre de jours et de fractions de jour, écoulés entre les deux époques des observations : on retrancherait au contraire du retard absolu, le produit de l'avance diurne par le même nombre de jours; et l'on aurait le retard absolu de la montre sur le tems moyen du lieu où elle a été réglée, pour l'époque proposée.

Vous retrancherez ensuite l'avance absolue, de l'heure moyenne correspondante à la hauteur moyenne, ou bien vous ajouterez le retard absolu à cette même heure; et vous aurez le tems moyen que l'on devait compter à l'instant de l'observation d'angle horaire, dans le lieu où la montre avait été réglée. Otez (art. 87) le tems moyen, à midi vrai de cette heure, le reste sera le tems vrai correspondant. Le calcul de l'angle horaire vous fera connaître le tems vrai du vaisseau; la différence de ces deux heures sera égale à la différence en longitude, qui existe entre le lieu du vaisseau et le lieu où la montre a été réglée : on la réduira en degrés par les règles connues. Le vaisseau sera à l'Est, si l'heure provenant du calcul de l'angle horaire est la plus grande; il sera à l'Ouest au contraire, si elle est la plus petite. Enfin ajoutez cette différence en longitude à la longitude du lieu où la montre a été réglée, ou bien retranchez-la de la longitude du même lieu, suivant que le vaisseau est à l'Est ou à l'Ouest; et vous obtiendrez la longitude du vaisseau, comptée du premier méridien

ou de celui de Paris. Lorsque la montre a été réglée sur le premier méridien, la différence entre l'heure vraie obtenue par la montre et l'heure qui résulte du calcul de l'angle horaire, donne directement la longitude du vaisseau.

Exemple.

Le 15 avril 1793, étant par 19°.51′.20″ de latitude Sud, et d'après l'estime par 167°.40′ de longitude orientale; c'est-à-dire, 8 jours après les dernières observations faites à Tongatabou pour régler la montre marine (*voyez* pag. 96), on a observé des hauteurs du bord inférieur du soleil, à environ 2ʰ.46′ de l'après midi, afin d'obtenir la longitude par la montre marine. L'élévation de l'œil au-dessus de la surface de la mer, était de 6ᵐ,17 ou 19 pieds. La longitude du havre de Tongatabou est de 177°.33′.14″ occidentale.

Il est inutile d'entrer dans les détails du calcul de cet exemple, on trouvera dans le type suivant, toutes les quantités qui doivent y être employées, dans l'ordre le plus commode et le plus propre à faciliter les opérations; il suffira pour faire connaître la manière dont on doit faire tous les autres calculs du même genre.

94. On doit remarquer que pour obtenir chaque jour, l'avance ou le retard absolu de la montre sur le tems moyen du lieu où elle a été réglée, il faut ajouter successivement à l'avance ou au retard trouvé par les observations, ou en retrancher, la variation diurne de la montre. La quantité que l'on doit ajouter ou retrancher chaque jour, est donc la somme de toutes les variations diurnes des jours précédens; dès lors du moment où le mouvement de la montre vient à changer, la variation diurne que l'on emploie, est affectée d'une erreur qui

— 15 avril 1793.

Latitude estimée *S*	19°.51'.20"
Longitude estimée orientale	167 .40 . 0
Sommes des hauteurs observées du ⊙.	233 .56 .40
Hauteur moyenne du ⊙	38 .59 .26
Élévation de l'œil 6^m. 17. Dépression.	— 4 .24
Reste	38 .55 . 2
Demi-diamètre du ⊙	+ 15 .57
	39 .10 .59
Réfraction — parallaxe	— 1 . 6
Hauteur vraie du centre du ⊙	39 . 9 .53
Avance sur le T. M. de Tongatabou, le 7 avril, à 7^h.53' (*Voy.* p. 97)	0^h. 1 .20,93
Avance diurne + 5',24, en 21.3	+ 43,49
Av. sur T. M. de Tongat. le 15 avril.	0 . 2 . 4,42
Heure de Paris, le 14 avril, à	14 .38 . 0
Déclinaison du ⊙ *N*	9°.53 .15
Distance au pôle élevé	99 .53 .15"

Longit. de l'île Panghaimodon, dans le havre de Tongatabou, lieu où la montre a été réglée	177°.38 .14' *Occ.*
En tems	11^h.50 .13
	0 .23 .19
	0 .23 .57
Heures à la montre	0 .24 .42
	0 .23 .21
	0 . 0 .58
	0 .23 .42
	0 . 5 . 0
Heure moyenne	0 .25 .19,58
Heure de la montre marine, lors de la comparaison. *Ajoutez*	3 .38 . 8 ,7
Somme	4 . 3 .28
Heure de la montre à secondes. *Otez*	0 .15 . 0
Heure de la montre marine	3 .48 .28
Av. sur T. M. de Tongatabou. *Otez*	0 . 2 . 4,42
Tems moyen à Tongatabou	3 .46 .23,58
Tems moyen à midi vrai. *Otez*	11 .59 .56,47
Tems vrai à Tongatabou	3 .46 .27,11

Hauteur vraie du ⊙	39°. 9'.50"		
Latitude	19 .51 .20	Com. cos	0,0266172
Distance polaire	99 .53 .10	Com. sin	0,0064972
Somme	158 .54 .20		
Demi-somme	79 .27 .10	cos	9,2625599
Demi-somme — Hauteur du ⊙	40 .17 .20	sin	9.8106638
		Somme	19,1063381
		Demi-Somme. sin	9.5531690
		Demi-angle horaire	22°.56'.10"
		Multipliez par	8
Dans la matinée, prenez le complément à 12^h — Heure vraie du vaisseau			2^h.7'.29^h.20"
Heure vraie à Tongatabou			3 .46 .27 . 7
Si l'heure du vaisseau est plus grande, il est à l'E. — Le vaisseau est à l'*O* de Tongat.			0 .58 .57 .47
En degrés			14°.44 .27
Longitude de Tongatabou. *Occi.*			177 .38 .14
Otez de 360° ; la longitude ne dépasse jamais 180°. — Longitude du vaisseau. *Occi.*			192 .17 .41
Longitude du vaisseau. *Ori.*			167 .42 .19

doit influer chaque jour de toute sa valeur, sur la longitude conclue de l'heure de la montre marine. Au bout d'un certain tems, les erreurs de la longitude sont égales à la somme de toutes les erreurs des longitudes observées les jours précédens. Il en résulte que les montres marines ne peuvent donner avec une grande précision, que les différences de longitudes des lieux où l'on a fait des observations à des époques très-rapprochées les unes des autres. C'est par cette raison qu'elles sont employées avec le plus grand succès à la construction des cartes marines; dans ce cas elles font connaître les positions relatives en longitude, de tous les lieux que l'on place sur ces cartes. Mais lorsqu'on s'en sert dans les usages ordinaires de la navigation; c'est-à-dire, pour calculer la distance à laquelle on se trouve d'une terre où l'on veut aborder, il serait imprudent de s'y fier entièrement, et il est nécessaire de comparer les longitudes obtenues par les montres à celles que l'on conclut des observations de distances de la lune au soleil et aux étoiles: ces dernières doivent toujours se trouver dans les limites d'une précision connue, et sont très-propres à faire connaître, si les montres ont conservé la même régularité dans leurs mouvemens, et si l'on peut se fier aux longitudes que l'on en conclut, sans compromettre la sûreté du vaisseau.

95. La méthode de se procurer la longitude par les montres marines, est peut-être celle qui a le plus contribué aux progrès de l'hydrographie et de la géographie. Il n'y a pour s'en assurer qu'à jeter les yeux sur les observations astronomiques publiées à la suite de la relation des grands voyages français et anglais qui ont été faits depuis le premier voyage de Cook: on verra le parti qui en a été tiré. Cependant il est impossible de se dissimuler que ces montres, d'une utilité si généralement

reconnue, peuvent éprouver subitement, et sans qu'on puisse en assigner la cause, des dérangemens dont les conséquences pourraient devenir funestes, si l'on négligeait d'employer les autres moyens que l'astronomie nautique nous fournit pour connaître la position du vaisseau. Il est donc impossible, et il serait même dangereux de chercher à évaluer les erreurs dont les longitudes des montres peuvent être affectées au bout d'un certain tems. La régularité des mouvemens de la plupart des montres, dont on a fait usage jusqu'à présent, ne peut servir qu'à confirmer leur utilité généralement parlant; on ne doit même pas craindre de dire que l'on ne peut comparer une montre à elle-même. Quoique toutes les probabilités soient en faveur des montres qui ont été éprouvées; on n'oserait cependant pas assurer qu'une montre dont la marche a toujours été régulière, conservera cette régularité de mouvement que l'humidité plus ou moins grande de l'air, ou bien des degrés de température extrêmes peuvent lui faire perdre. On ne peut trop insister sur la nécessité de vérifier les longitudes des montres, par des observations de distances de la lune au soleil et aux étoiles.

Les montres marines dont la marche a été le mieux suivie, ont donné généralement, la longitude à moins d'un demi-degré près, au bout d'une navigation de trois mois. La montre, n°. 14, de M. *Louis Berthoud*, qui a servi pendant le voyage du contre-amiral *d'Entrecasteaux*, a toujours donné la longitude du vaisseau à environ un quart de degré près, même à la fin d'une navigation de plus de trois mois. Mais cette précision étonnante, qui doit à la vérité, être attribuée en grande partie à la régularité des mouvemens de la montre de M. *Louis Berthoud*, peut aussi provenir de ce que quelques-unes

des erreurs des longitudes ont été de nature à se compenser. En général, les bonnes montres marines, comme celles que nous venons de citer, conservent une marche très-régulière pendant environ deux ans, après être sorties des mains de l'horloger; mais au bout de ce tems, les huiles commencent à s'épaissir, et ont besoin d'être renouvelées; alors le mouvement change successivement d'une petite quantité, et tend ordinairement à prendre des degrés d'accélération.

Moyen de corriger les Longitudes obtenues par des montres marines.

96. Lorsqu'on se sert des montres marines pour diriger la route d'un vaisseau et attérir sur une côte, les observations que l'on fait pendant les relâches, ne peuvent avoir d'autre utilité, que celle de faire connaître la variation diurne qui doit être employée à trouver les longitudes pendant la traversée suivante. Mais si l'on a déterminé la position géographique de quelques-uns des lieux dont on a eu connaissance dans une traversée quelconque; alors la variation diurne observée pendant la relâche qui lui succède, peut servir dans certains cas, à corriger la longitude de ces lieux, et à en augmenter beaucoup la précision. Ces corrections deviennent surtout indispensables, toutes les fois que la variation diurne a changé d'une assez grande quantité, dans l'intervalle des observations qui ont été faites pour régler la montre. Nous allons donner le moyen de calculer ces corrections.

97. Je suppose que l'on ait reconnu par des observations astronomiques, que la variation diurne d'une montre marine n'était pas la même que celle qui avait été

trouvée au port de départ. Calculez d'abord la différence en longitude qui doit exister entre le port de départ et celui de relâche, avec la variation diurne observée immédiatement avant le départ; ensuite prenez la moitié de la somme des deux variations diurnes, et calculez la même différence en longitude avec cette variation diurne moyenne. Le résultat du second calcul sera la différence en longitude corrigée; et la quantité dont elle est plus grande ou plus petite que la première, sera la correction que l'on doit appliquer à cette première différence en longitude: c'est cette correction qui doit vous servir à trouver toutes les corrections des autres longitudes observées pendant la traversée dont il s'agit. Remarquez si elle doit placer le port de relâche dans l'Est ou dans l'Ouest de la position qui lui avait été assignée par le calcul fait avec la variation diurne trouvée au port de départ; et toutes les autres corrections devront être employées dans le même sens.

Cherchez dans la table XI, vis-à-vis du nombre qui exprime celui des jours écoulés depuis que la montre avait été réglée pour la première fois, un autre nombre, intitulé *multiple de la différence seconde*: divisez ensuite, en opérant par logarithmes, la correction de la longitude du port de relâche par ce nombre, et vous aurez la différence seconde des corrections de toutes les longitudes observées pendant la traversée. Vous trouverez la correction des autres longitudes en multipliant cette différence seconde, par le multiple correspondant au nombre qui exprime la quantité des jours écoulés depuis l'époque où la montre a été réglée, jusqu'à celle où l'on a observé la longitude dont vous voulez calculer la correction. Ces règles vont être éclaircies par un exemple.

EXEMPLE.

On a trouvé pag. 97, n°. 14, que l'avance diurne de la montre, était à Tongatabou de + 5^h,24; le 6 avril 1793, à $19^h.53'.31''$,44, dernier jour des observations, la montre avançait sur le tems moyen de Tongatabou de $8°.1'.20''$,[illegible] On est allé de Tongatabou au havre de Ballade; et l'on a fait dans ce havre de nouvelles observations pour obtenir la variation diurne de la même montre: elle a été trouvée de + 8^h,56. Le 22 avril, premier jour des observations de Ballade, la montre avançait sur le tems moyen de ce port, de $1^h.24'.23''$,71.

Variation diurne trouvée à Tongatabou.	+ 5″,24
Variation diurne trouvée à Ballade . . .	+ 8 ,56
Somme	13″,80
Demi-somme. Variat. diurne moy.	+ 6 ,9
Différence en longitude entre le havre de Tongatabou et celui de Ballade, par la 1re. variation diurne + 5″,24.	20°.24′.34″
Différence en longitude par la variation diurne moyenne.	20 .17 .55
La différence en longitude doit être diminuée, et le havre de Ballade être plus à l'Est de.	6′.39″

On demande la correction de la longitude observée le 17 avril à $7^h.34'$.

Correction de la longitude de Ballade, après 16^{j}..6′.39″, ou 399″		log. 2,60097
Multiple de la table XI, correspondant à 16 jours . . .	136 comp.	log. 7,86646
	log. constant.	0,46743
Du 6 avril au 17, il y a 11 jours.	Multiple 66	log. 1,81954
	Somme	2,28697
Correction de la longitude du 17 avril.		3′.14″

La correction de la longitude du 17, doit placer le lieu de l'observation plus à l'Est; parce que Ballade doit également être à l'Est de la position calculée par la variation diurne que l'on avait trouvée à Tongatabou.

On calculera la correction de la longitude des autres jours de la même traversée, en ajoutant au logarithme constant, le logarithme du multiple de la table XI, qui correspond au nombre de jours écoulés depuis le 6 avril jusqu'à l'époque où la longitude que l'on veut corriger, a été observée.

98. Il est indispensable de corriger de cette manière, les longitudes observées à la fin d'un longue traversée, pendant laquelle la variation diurne a éprouvé des changemens. Les corrections des longitudes du commencement seront toujours assez petites et par conséquent moins nécessaires; mais les corrections des longitudes observées au milieu d'une longue traversée doivent être très-incertaines, et les positions qu'elles ont servi à fixer, ne sont guère susceptibles d'être rectifiées que par les résultats des distances. Je suppose qu'après une traversée de trois

mois, on ait reconnu que la variation diurne d'une montre a changé de plusieurs secondes ; alors les longitudes corrigées du premier et du dernier mois, peuvent être considérées comme ayant été rapprochées des longitudes vraies, mais les longitudes corrigées du second mois doivent toujours être regardées comme incertaines.

CHAPITRE VI.

Trouver la Longitude par les distances de la lune au soleil et aux étoiles.

99. La méthode des distances de la lune au soleil et aux étoiles est généralement reconnue pour être la meilleure de toutes celles que l'on peut employer en mer pour trouver la longitude. Nous avons déja dit qu'elle devait servir à vérifier les longitudes obtenues par des montres marines, et qu'il n'y avait pas d'autre moyen de constater la régularité de leurs mouvemens : on peut donc la regarder comme celle qui nous a donné la solution du problème des longitudes dont tous les savans et les astronomes de l'Europe, s'étaient occupés depuis si longtems. La précision des résultats que l'on obtient par la méthode des distances, dépend de la précision avec laquelle on peut prédire la position que la lune doit avoir dans le ciel à tous les instans. L'on doit attribuer la lenteur des progrès que cette méthode a faits dans le commencement, à la complication de la théorie des mouvemens de la lune, et aux difficultés que les astronomes avaient toujours rencontrées lorsqu'ils avaient voulu en calculer les inégalités. *Tobie Mayer*, à l'aide de cette théorie et des observations, construisit des tables qui ont servi à prédire le lieu de la lune avec une exactitude suffisante pour la sûreté de la navigation. Depuis leur publication, on a inséré dans toutes les Éphémérides les distances de la lune au soleil et à quelques-

unes des principales étoiles ; et les marins ayant été mis à portée de reconnaître l'utilité des observations de distances, ont commencé à les pratiquer. Malgré les soins et les peines infinies que l'on s'était donnés pour perfectionner ces tables, leur précision laissait cependant encore quelque chose à désirer. Enfin M. *Laplace* en soumettant de nouveau les mouvemens de la lune au calcul de l'analyse, y a découvert des inégalités qui avaient jusqu'à présent échappé à toutes les recherches, et nous a procuré les moyens de donner à la méthode des distances le dernier degré de précision dont elle est susceptible. Avec le secours des tables du soleil de M. *Delambre*, et des tables de la lune calculées par M. *Bürg*, d'après la théorie de M. *Laplace*, qui toutes les deux ont été publiées par le Bureau des longitudes, il est possible de prédire les distances et d'obtenir les longitudes avec une précision à laquelle on n'aurait pas osé se flatter de pouvoir parvenir, lorsque, dans l'origine, on avait voulu introduire cette méthode dans la pratique. La perfection que les artistes ont su donner aux sectans, et l'invention du cercle à réflexion, y ont ajouté encore de grands avantages ; dans l'état actuel des choses, les marins ne peuvent plus se dispenser d'employer une observation qui peut leur faire connaître leur position sur le globe à quelques lieues près, et qui leur donne la faculté de tirer des montres marines tout le parti qu'on peut en attendre.

100. Le but de la méthode des distances, est de faire connaître la distance vraie de la lune au soleil ou à une étoile pour un instant quelconque, afin d'en conclure l'heure que l'on comptait à cet instant sur le premier méridien ; on se procure l'heure du lieu qui correspond au même instant par une observation de la hauteur du

soleil ; ces deux heures étant connues, leur différence réduite en degrés est égale à la longitude.

101. Nous avons vu que les hauteurs des astres paraîssent plus grandes qu'elles ne devraient l'être, par l'effet des réfractions célestes ; les hauteurs de la lune et celles du soleil paraissent plus petites en vertu de la parallaxe de ces deux astres. Il doit résulter de ces deux causes réunies que les distances observées ne sont pas égales aux distances vraies ; il faudra donc les corriger des effets de la réfraction et de la parallaxe, si l'on veut obtenir une distance vraie, d'où l'on puisse conclure directement l'heure du premier méridien. Il a été dit, art. 29, que la quantité dont les hauteurs des astres paraissent plus grandes par l'effet de la réfraction, et, art. 33, que la quantité dont elles paraissent plus petites par l'effet de la parallaxe, dépendent de la hauteur apparente de ces mêmes astres ; ainsi, il faut pour connaître la valeur absolue de ces quantités, mesurer la hauteur des deux astres au moment où l'on observe la distance, ou bien trouver le moyen de se procurer les hauteurs par le calcul. C'est de cet objet dont nous allons d'abord nous occuper. Nous parlerons ensuite du calcul de la distance vraie ; mais le but de ce Traité étant de mettre en état de faire tous les calculs de l'astronomie nautique avec le simple secours de la Connaissance des tems et d'une table de logarithmes à sept décimales, nous nous contenterons de donner la méthode qui est généralement connue sous le nom de méthode de *Borda* : elle est la plus courte de toutes celles qu'on peut employer, lorsqu'on ne fait usage que des tables de logarithmes ordinaires.

Moyens de se procurer les Hauteurs des astres dont on observe la distance.

102. Lorsqu'on n'a pas de montre marine ni de montre à secondes, l'observation des distances exige le concours de trois observateurs : tandis que l'un d'eux mesure la distance, les autres doivent prendre les hauteurs ; par ce moyen, l'on obtient cette distance et les deux hauteurs qui lui correspondent par trois observations simultanées. Mais la distance est celle de ces trois données, qu'il est le plus important de se procurer avec précision, parce que les erreurs dont elle peut être affectée doivent avoir plus d'influence sur le résultat que les erreurs des hauteurs ; il faut donc que les observateurs qui prennent les hauteurs, ramènent chacun un astre à l'horison, et aient l'attention de suivre ses mouvemens avec la vis de rappel de l'instrument, de manière que l'un de ses bords soit toujours en contact avec ce cercle. A l'instant où celui qui observe la distance aura fait coïncider le bord du soleil ou une étoile avec un des bords de la lune, il avertira ses deux coopérateurs, et ceux-ci compteront sur leurs instrumens les deux hauteurs qui avaient lieu en même tems que la distance observée. On écrira séparément les deux hauteurs et la distance, si cette dernière a été observée avec un sextant. Il est nécessaire de faire de la sorte au moins quatre observations, mais, toutes les fois qu'on le pourra, il faudra en faire six. Dans le cas où la distance est observée avec un cercle à réflexion, on ne comptera l'arc parcouru par l'alidade qu'à la fin de la dernière observation, et l'on aura directement la somme des distances observées. La somme des hauteurs de chacun des deux astres

et celle des distances étant divisées par le nombre des observations, feront connaître les hauteurs moyennes correspondantes à la distance moyenne.

EXEMPLE.

Le 16 juin 1793, à $1^h.\frac{1}{2}$ après midi, on a eu par... 10°.16′.40″ de latitude Sud, et par 149° de longitude orientale d'après l'estime, on a observé six distances des bords les plus proches du soleil et de la lune, et aux mêmes instans où ces observations ont été faites, on a mesuré six hauteurs du bord inférieur du soleil et six hauteurs du bord supérieur de la lune.

Hauteur du ⊙.	Hauteur de la ☾.
48°.49′	26°.56′
48 .28	27 .27
48 .18	27 .51
48 . 6	28 . 8
47 .57	28 .22
47 .47	28 .37
Somme . . . . 289°.25′	Somme . . . 167°.21′
Sixième . . . . 48 .14 .10″	Haut. obs. ☾ 27°.53′.30″
Rectif. de l'inst. + 2 . 0	
Haut. obs. ⊙. . 48°.16′.10″	

Somme des distances ⊙☾.

500°.40′.40″

Dist. obs. ⊙☾. 83 .26 .46

103. La difficulté de suivre exactement le mouvement des astres, avec la vis de rappel des instrumens, rend les hauteurs prises de cette manière susceptibles d'une moins grande précision que celles des observations où l'observateur ne compte la hauteur de l'astre que quand il a la certitude d'avoir fait une bonne observation. On ne pourra guère répondre des hauteurs à moins de 2′ près, et quelquefois les erreurs pourront aller jusqu'à 3′. Ces erreurs n'auront jamais une grande influence sur la distance vraie; mais comme on est obligé de calculer l'heure du lieu de l'observation avec la hauteur du soleil, elles pourraient en avoir une sensible sur la longitude : c'est pourquoi il faudra toujours que la hauteur du soleil soit prise par un observateur très-exercé à faire ce genre d'observations et avec un instrument bien rectifié.

104. Lorsqu'on possède une montre marine, ou simplement une montre à secondes, la méthode qui va être indiquée est toujours préférable. Tenez compte de l'heure, de la minute et de la seconde auxquelles chaque observation de distance a été faite; vous obtiendrez une distance moyenne qui correspondra à l'heure moyenne. Quelques instans avant ces observations, prenez une ou plusieurs hauteurs de chacun des deux astres dont vous voulez mesurer la distance, et tenez pareillement compte de l'heure correspondante à chacune de ces hauteurs. Immédiatement après avoir achevé l'observation de distances, prenez de nouvelles hauteurs des deux astres; la différence de la hauteur observée avant la distance, à celle qui a été observée après, donnera le mouvement en hauteur de chaque astre dans l'intervalle des observations, lequel doit être égal à la différence des heures qui correspondent aux hauteurs. Prenez ensuite la différence de l'heure des premières observations de

hauteurs ; à l'heure moyenne correspondante à la distance moyenne, et vous aurez un second intervalle ; vous calculerez, par des parties proportionnelles le mouvement en hauteur qui lui correspond. Ajoutez ce dernier mouvement en hauteur à la première hauteur observée, si l'astre s'élève sur l'horison ; retranchez-le au contraire de la première hauteur si l'astre s'abaisse, et vous aurez la hauteur qui a eu lieu à l'instant correspondant à la distance moyenne. Ces règles vont être éclaircies par un exemple.

EXEMPLE.

Le 17 juin 1793, à $4^h.32'$ du soir, étant par $9°.57'$ de latitude Sud, et par $148°.50'$ de longitude orientale, on a fait les observations suivantes de la distance de la lune au soleil, et des hauteurs de ces deux astres, avec une montre à secondes. L'élévation de l'œil était de $6^m,17$.

Heures des distances.

$1^h.$	$48'.55''$	
	$49\ .55$	
	$51\ .\ 2$	Som. des dist. ☉☾. $571°.\ 2'.\ 0''$
	$52\ .34$	Dist. moyenne . . $95\ .10\ .20$
	$53\ .53$	
	$54\ .51$	
Somme . .	$311'.10''$	
Heur. moy.	$1^h.\ 51'.51'',6$	

	Heures.	Hauteurs ⊙.
1re. observation	1h.49′.25″	32°.21′.30″
2e. observation	1 .54′.22	31 .22
1er. intervalle	0h. 4′.57″	Différ. 0°,59′.30″

Heure de la 1re. observation . . . . . 1h.49′.25″
Heure de la distance. . . . . 1 .51 .51
2e. intervalle. . . . . 0h. 2′.26″

1er. *int.* 4′.57″ : 1er. *chang. en haut.* 59′.30″ :: 2e. *int.* 2′.26″ : *x*

1er. changement en hauteur.	59′.30″	log. 3,55267
1er. intervalle	4 .57	com. log. 7,52724
2e. intervalle	2 .26	log. 2,16435
		log. *x* 3,24426

x ou 2e. changement en hauteur. . . . . 0°.29′.15″
1re. hauteur du ⊙. . . . . 32 .21 .30
Le ⊙ *descend. Différence.* Hauteur du ⊙. 31°.52′.15″

	Heures.	Hauteurs ☾.
1re. observation	1h.51′. 2″	40°.45′
2e. observation	1 .52 .34	41 . 5
1er. intervalle	0 . 1′.32″	Différ. 0°.20′

Heure de la 1re. observation . . . . . 1h.51′. 2″
Heure de la distance. . . . . 1 .51 .51
2e. intervalle . . . . . 0h. 0′.49″

1er. *int.* 1′.[illegible] *chang. en haut.* 0°.20′ :: 2e. *int.* 0′.[illegible] : *x*

1er. changement en hauteur.	0°.20′	log. 3,07918
1er. intervalle	1′.32″	com. log. 8,03621
2e. intervalle.	0 .49	log. 1,69020
		log. *x* 2,80559
x ou 2e. changement en hauteur		0°.[illegible]′.[illegible]″
1re. hauteur de la ☾		40 .45 . 0
La ☾ monte. Somme. . . Hauteur de la ☾		40°.55′.39″

105. Les observations peuvent être faites de cette manière, par un seul observateur; mais il serait avantageux que celui qui observe les distances eût un collaborateur, pour mesurer les hauteurs, et principalement celles du soleil. Ces dernières ont l'inconvénient de fatiguer extrêmement la vue, lorsque le soleil n'est pas très-élevé; alors ses reflets font souvent briller l'horison d'une lumière si éclatante qu'on est obligé de l'affaiblir avec un verre coloré. Les hauteurs peuvent être prises 7′ à 8′ avant l'observation de distances, et 7′ à 8′ après; cependant, il est essentiel de faire remarquer que les hauteurs correspondantes à la distance, seront susceptibles d'une précision d'autant plus grande que les hauteurs auront été prises plus près de l'instant où cette distance a dû avoir lieu. Il faut aussi que l'heure moyenne correspondante à la distance moyenne, soit entre les heures qui correspondent aux deux hauteurs observées. Toutes les fois que l'on n'aura négligé aucune de ces attentions, les hauteurs conclues par des parties proportionnelles, auront une précision à-peu-près égale

à celles des hauteurs obtenues directement par l'observation.

106. Lorsque l'horison visuel se trouve borné par la terre, dans la direction de l'un des astres dont on mesure la distance, il faut, si l'on a une montre à secondes, tâcher de se procurer son avance ou son retard sur le tems vrai, par une observation de hauteur faite quand le soleil répondait à un des points de l'horison où la mer paraissait libre. Alors on calculera la hauteur de l'astre par les règles des art. 79 et 80.

107. Nous avons parlé de la difficulté que l'on éprouve à observer des hauteurs d'étoiles et même celles de la lune pendant la nuit. Les erreurs de 5′ ou 6′ dont nous avons dit qu'elles étaient susceptibles, n'auront pas une grande influence sur la distance vraie de la lune à une étoile; ainsi l'on peut, si on le préfère, observer les hauteurs qui doivent servir à corriger la distance. Mais comme une erreur de 5′ ou 6′ pourrait, dans certains cas, occasionner sur l'angle horaire une erreur de 30″ de tems, et même quelquefois une erreur plus grande, il ne faudra jamais calculer l'heure du lieu avec la hauteur de l'étoile. On doit, pour y suppléer, calculer l'avance ou le retard de la montre sur laquelle on a compté les heures correspondantes aux distances, par une observation de la hauteur du soleil, faite dans la soirée qui précède les observations de distances, ou dans la matinée qui les suit; alors au moyen du chemin fait en longitude, on pourra se procurer l'heure du lieu où les distances ont été observées. Dans ce cas, on peut se dispenser d'observer les hauteurs des deux astres; car on les obtiendra avec beaucoup plus de précision par le calcul que par l'observation. Cette méthode a été recommandée par *Borda* dans son Traité du Cercle-à-réflexion; et c'est celle que l'on doit mettre

en pratique. On trouve aux art. 79 et 80, des détails très-circonstanciés sur les opérations que l'on doit faire pour calculer les hauteurs des astres.

Calcul de la distance vraie et de l'heure de Paris.

108. Dès que l'on a obtenu les hauteurs correspondantes à la distance moyenne par un des moyens qui viennent d'être indiqués, il faut procéder au calcul de la distance vraie et de l'heure de Paris, en se conformant aux règles suivantes. Nous donnerons d'abord un exemple pour le cas où l'on s'est procuré les hauteurs directement par observation; ensuite nous ferons connaître, par un second exemple, la manière dont on doit opérer, dans le cas où l'on obtient par le calcul, les hauteurs vraies des deux astres dont on a mesuré la distance.

109. Calculez d'abord l'heure de Paris correspondante à l'instant des observations, au moyen de l'heure approchée ou de l'heure vraie du lieu, et de la longitude estimée; ensuite cherchez, dans la Connaissance des tems, les demi-diamètres que le soleil et la lune doivent avoir à cet instant. Vous trouverez, dans la table II, l'augmentation du demi-diamètre de la lune qui convient à sa hauteur, et vous aurez son demi-diamètre apparent. Cherchez aussi la parallaxe équatoriale qui avait lieu à l'instant de l'observation, et la table III vous fera connaître, au moyen de la latitude, la quantité dont vous devez la diminuer pour obtenir celle qui convient au lieu de l'observation. Ces premières données vous serviront à trouver la distance apparente des centres du soleil et de la lune, ou la distance apparente de l'étoile au centre de la lune, ainsi que les hauteurs apparentes et les hauteurs vraies des centres des deux astres.

110. Lorsqu'on a pris des distances de la lune au soleil, l'observation donne toujours la distance des bords les plus proches de ces astres; dès lors, il faut que le demi-diamètre du soleil et le demi-diamètre de la lune soient ajoutés à la distance observée. Si l'on a pris des distances de la lune à une étoile, l'observation fait connaître la distance de cette étoile au bord éclairé de la lune, qui tantôt est le plus proche et tantôt le plus éloigné : il faut donc remarquer, en faisant l'observation, quel est le bord dont on a observé la distance. Lorsqu'on a mesuré celle du bord le plus proche, il faut, comme dans la règle précédente, ajouter le demi-diamètre apparent de la lune à la distance observée; mais si l'on a mesuré la distance de l'étoile, au bord le plus éloigné de la lune, il faut au contraire retrancher de cette distance, le demi-diamètre apparent de ce dernier astre. La distance ainsi trouvée s'appelle *distance apparente*.

111. Corrigez ensuite les hauteurs observées, de la dépression de l'horison, et s'il s'agit du soleil ou de la lune, du demi-diamètre de l'un ou de l'autre de ces deux astres; et vous aurez la hauteur apparente de l'étoile, ou du soleil, et la hauteur apparente de la lune. Cherchez ensuite les réfractions et les parallaxes qui conviennent à ces hauteurs, et vous obtiendrez les hauteurs vraies. Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails sur ces corrections, les règles que l'on doit suivre ont été développées dans le chapitre II. Ceux qui ne seraient pas encore familiarisés avec ces sortes d'opérations pourront avoir recours à ce qui a été dit à ce sujet. Nous croyons cependant devoir insister de nouveau sur la nécessité de corriger les réfractions de la table V et celles de la table VIII, d'après l'élévation du mercure dans le

thermomètre dans le baromètre, toutes les fois que la hauteur de l'un des deux astres est moindre que 40 degrés.

112. Dans le cas où l'on a obtenu, par le calcul, la hauteur vraie du centre de la lune, on est obligé de chercher d'abord dans la table VIII, avec cette hauteur vraie, au lieu de la hauteur apparente, un nombre approché qui différera quelquefois de près d'une minute de celui qui doit exprimer la véritable parallaxe de hauteur moins la réfraction. Calculez avec ce nombre une première hauteur apparente, et cherchez ensuite, dans la même table, le nombre qui lui correspond : ce sera la parallaxe de hauteur moins la réfraction que vous devez retrancher de la hauteur vraie qui résulte du calcul, pour avoir la hauteur apparente du centre de la lune.

113. La distance apparente des deux astres, leurs hauteurs apparentes et leurs hauteurs vraies, sont les cinq données avec lesquelles on doit faire le calcul de la distance vraie. Voici les règles qu'il faut suivre pour la trouver.

Écrivez, dans l'ordre suivant, d'abord la distance apparente des deux astres, ensuite la hauteur apparente du soleil ou de l'étoile, et enfin la hauteur apparente de la lune ; ajoutez ensemble ces trois quantités, et prenez la moitié de leur somme. La distance apparente et la demi-somme étant ainsi connues, retranchez la plus petite de ces deux quantités de la plus grande. Écrivez au-dessous du reste, la hauteur vraie du soleil ou de l'étoile, et après la hauteur vraie de la lune ; ajoutez ces deux hauteurs vraies, et prenez la moitié de leur somme. Dès que cette préparation du calcul est achevée, cherchez successive-

vent dans les tables de logarithmes, les complémens arithmétiques des logarithmes cosinus des hauteurs apparentes; vous y chercherez pareillement les logarithmes cosinus de la demi-somme de ces hauteurs et de la distance apparente, ainsi que le logarithme cosinus de la demi-différence, et vous écrirez ces deux logarithmes au-dessous des compléments arithmétiques que vous avez trouvés précédemment: ensuite vous écrirez encore au-dessous des derniers, les logarithmes des cosinus des hauteurs vraies. Ajoutez ensemble les deux compléments arithmétiques et les quatre logarithmes, vous aurez un nombre dont vous prendrez la moitié; de cette moitié vous retrancherez le logarithme cosinus de la demi-somme des hauteurs vraies, et le reste sera le logarithme du sinus d'un angle auxiliaire. Vous placerez le logarithme du cosinus de cet angle auxiliaire au-dessous de celui du cosinus de la demi-somme des hauteurs vraies; enfin la somme de ces deux derniers logarithmes sera le logarithme sinus de la demi-distance vraie. Le double de l'arc correspondant sera la distance corrigée des effets de la réfraction et de la parallaxe, ou la distance vraie avec laquelle vous devez calculer l'heure de Paris.

Lorsqu'on calcule la distance vraie par cette méthode, il peut arriver que la somme de la distance apparente et des hauteurs apparentes soit plus grande que 180°; alors il ne faut pas continuer le calcul, et l'on peut corriger la distance apparente, en prenant d'abord la différence de la correction de la hauteur de la lune à celle de la hauteur du soleil ou de l'étoile, et en retranchant cette différence de la distance apparente des deux astres.

114. Cherchez, dans la Connaissance des tems, les deux

distances entre lesquelles se trouve la distance qui résulte du calcul ; écrivez-les au-dessous l'une de l'autre, ensuite prenez leur différence, et vous aurez le changement en distance qui répond à trois heures. Prenez aussi la différence qui existe entre la distance calculée et la première distance des tables ; et au moyen du changement qui répond à trois heures, vous conclurez, par des parties proportionnelles, l'intervalle de tems qui correspond à cette différence. Ce second intervalle doit être calculé par logarithmes. Il faudra toujours ajouter à l'heure de la première distance des tables, et la somme sera l'heure de Paris que l'on cherche.

On va exposer en détail, toutes les opérations qu'il est nécessaire de faire, soit pour se procurer la distance et les hauteurs apparentes, soit pour obtenir les hauteurs vraies, soit enfin pour calculer la distance vraie qui fait connaître l'heure de Paris et la longitude. On reprendra l'exemple de la page 116, dans lequel les hauteurs et la distance ont été obtenues par des observations simultanées.

EXEMPLE.

Le 16 juin 1793, à environ une heure et demie après midi, étant par 10°.16′.40″ de latitude Sud, et par 149° de longitude estimée, on a fait six observations de distances de la lune au soleil, et six observations simultanées des hauteurs des deux astres. La distance moyenne des bords les plus proches a été trouvée de 83°.26′.46″ ; la hauteur moyenne du bord inférieur du soleil, de 48°.16′.10″ ; et celle du bord supérieur de la lune, de 27°.53′.30″.

On trouve, au moyen de l'heure approchée du lieu de l'observation et de la longitude estimée, que l'heure

...ochée de Paris, qui répond à l'observation de distance, est le 15 juin à $15^h.34'$. Le demi-diamètre du soleil, pris dans la Connaissance des tems, était, à cet instant, de $15'.46''$. Le demi-diamètre de la lune était de $14'.54''$; la petite table II fait connaître qu'à $27°.53'$, ou $28°$ de hauteur, il faut y ajouter $7''$ pour avoir le demi-diamètre apparent, qui sera alors de $15'.1''$: ces dernières quantités doivent être employées pour obtenir la distance et les hauteurs apparentes des centres du soleil et de la lune. La parallaxe équatoriale est de $54'.41''$, mais à $10°$ de latitude, il faut la diminuer de $1''$; ainsi il faut employer dans le calcul $54'.40''$.

Dès que ces premiers élémens sont connus, il faut procéder au calcul de la distance apparente. On va donner successivement les calculs de toutes les quantités que l'on est obligé de se procurer, pour obtenir la distance vraie, et enfin la longitude; mais afin d'en rendre les procédés encore plus clairs, on a réuni toutes ces quantités dans le tableau qui est placé à la suite du calcul de l'heure du lieu; il pourra servir de guide à ceux qui voudront s'exercer à faire le calcul des longitudes par les distances.

Distance observée des bords du ☉☾ . . .	$83°.26'.46''$
Demi-diamètre du ☉	$+ 15.46$
Demi-diamètre de la ☾	$+ 15.1$
Distance apparente des centres du ☉☾ . .	$83°.57'.33''$

On corrigera les hauteurs observées des deux astres, de la dépression de l'horison et de leurs demi-diamètres, et l'on obtiendra la hauteur apparente des centres; ensuite il faudra aussi corriger ces hauteurs apparentes des

effets de la réfraction et de la parallaxe, au moyen des nombres que l'on trouve dans les tables V et VIII, et l'on aura les hauteurs vraies. Il est essentiel d'avoir égard aux variations que ces derniers nombres doivent éprouver relativement à la hauteur du mercure dans le thermomètre et dans le baromètre, ainsi qu'on va le voir.

Hauteur observée du ⊙		48°.16′.10″
Elévation de l'œil 6^{m},17. Dépression. . .		— 4 [illegible]
		48°.11′.46″
Demi-diamètre du ⊙		+ 15 .46 .
Hauteur apparente du ⊙		48°.27′.32″
Réfraction. — Parallaxe. . . .	0′.45″	
Thermomètre + 26°.2	— 2	— 0 .43
Baromètre 0^{m},762.	0	
Hauteur vraie du ⊙		48°.26′.49″
Hauteur observée de la ☾		27°.53′.30″
Elévation de l'œil 6^{m},17. Dépression . .		— 4 [illegible]
		27°.49′. 6″
Demi-diamètre de la ☾		— 15′. 1
Hauteur apparente de la ☾.		27°.34′. 5″
Parallaxe. — Réfraction. . . .	46′.38″	
Thermomètre . . . . 26°.2	+ 5	46 .43
Baromètre. . . . . 0^{m},762	0	
Hauteur vraie de la ☾		28°.20′.48″

Il est nécessaire, en faisant le calcul de la distance, de prendre des parties proportionnelles, pour avoir les logarithmes correspondans aux secondes de degré. On peut cependant en éviter une grande partie, comme on va le voir, si on retranche de la distance apparente, le nombre de secondes nécessaires pour que le reste ne contienne que des dixaines de secondes. Par exemple, dans ce cas-ci, il faut écrire 83°.57′.30″, au lieu de 83°.57′.33″; mais on notera les trois secondes qui ont été retranchées au-dessus de la distance, avec le signe + qui indique qu'elles doivent être ajoutées à la distance vraie que l'on obtiendra par le calcul. Il faut pareillement retrancher des hauteurs apparentes, le nombre de secondes nécessaires pour qu'elles ne contiennent que des dixaines de secondes, ou bien y ajouter le nombre de secondes qui peut les compléter. Ces petits changemens s'opéreront toujours, de manière que les dixaines de secondes de la somme, de la distance et des hauteurs apparentes, soit un nombre pair; alors la demi-somme et la différence de cette demi-somme à la distance, ainsi que les hauteurs apparentes ne contiendront que des dixaines de secondes: on pourra donc prendre deux complémens arithmétiques et deux logarithmes, sans être obligé de calculer des parties proportionnelles.

Il est important de ne pas oublier, en écrivant les hauteurs vraies, d'en retrancher ou d'y ajouter le même nombre de secondes que l'on avait précédemment retranché des hauteurs apparentes, ou qu'on y avait ajouté, afin que la différence de la hauteur vraie à la hauteur apparente de chaque astre, reste toujours la même. C'est de la valeur de cette différence que dépend, en grande partie, celle de la réduction de la distance apparente, ou la différence de celle-ci à la distance vraie. Dans cet exemple,

on a retranché 2″ de la hauteur apparente du soleil, il faudra donc les retrancher aussi de la hauteur vraie, et écrire 48°.26′.47″, au lieu de 48°.26′.49″. On avait retranché 5″ de la hauteur apparente de la lune, il faudra donc employer dans le calcul la hauteur vraie de 28°.20′.43″, au lieu de 28°.20′.48″.

	+ 3″		
Dist app. ☉ ☾.	83°.57′.30		
Haut. app. ☉.	48 .27 .30	com. cos.	0,1783787
Haut. app. ☾.	27 .34 . 0	com. cos.	0,0023345
Somme. . .	159°.59′. 0″		
Demi-somme .	79 .59 .30	cos.	9,2400283
Dist.−½ somm.	3 .58 . 0	cos.	9,9989584
Haut. vraie ☉.	48 .26 .47	cos.	9,8217234
Haut. vraie ☾.	28 .20 .43	cos.	9,9445332
Somme. . .	76° 47′.30	Somme .	39,2359565
		½ somm.	19,6179782
Demi-somme .	38 .23 45	cos.	9,8941713
Angle auxiliaire.		cos.	9,9285783
Somme		sin.	9.8227496
Demi-distance			41°.40′.26″
Double. Distance.			83 .20.52
Ajoutez les secondes negligées . .			+ 3
Distance vraie.			83°.20′.55″
Distances des tables à 15h. . . .			83 . 2. 9
Distances des tables à 18h. . . .			84 .24 33
Heure de la 1re. distance des tables. .			15h. 0′. 0″
2e. intervalle			0 .41 . 0
Heure de Paris.			15h.41′. 0″

1er. intervalle 3h.	log. 4,03342
1re. diff. 0°.18′.46″	log. 3,05154
2e. diff. 1 .22.24	com. log. 6,30592
Somme.	3,39088
2e. intervalle.	0h.41′.0″

115. La distance qui résulte du calcul, est 83°.20′.52″; il faut y ajouter les 3″ que l'on avait négligées avant de commencer le calcul, et la distance vraie se trouve

de 83°.20′.55″. Les deux distances de la Connaissance des tems entre lesquelles se trouve cette distance calculée, sont 83°.2′.9″ et 83°.24′.33″. La première a dû avoir lieu à 15h, et la deuxième à 18h. L'intervalle qui les sépare, et que nous nommons premier intervalle, est de 3h. Écrivez ces distances et les heures auxquelles elles répondent, au-dessous de la distance vraie, comme ci-dessus ; ensuite prenez la différence de la distance vraie à la première distance des tables, et vous aurez une première différence que vous écrirez à droite des distances auxquelles elle répond. Prenez également la différence des deux distances des tables, et vous obtiendrez une deuxième différence, qui est le changement en distance dans l'intervalle de 3h ou dans le premier intervalle. Ces quantités doivent servir à calculer le second intervalle, ou celui qui répond à la différence prise entre la distance calculée et la première distance des tables, que nous avons appelée première différence. Faites cette proportion ; la deuxième différence est au premier intervalle de 3h, comme la première différence de 18′.46 est au second intervalle, qu'il faudra toujours ajouter à l'heure de la première distance pour avoir l'heure de Paris. Le quatrième terme de cette proportion doit être calculé par logarithmes ; ainsi, pour avoir le logarithme du second intervalle, ajoutez ensemble le logarithme constant de 3h, celui de la première différence et le complément arithmétique de la seconde différence.

Calcul de l'heure du lieu.

116. La méthode que l'on doit suivre pour se procurer l'heure du lieu, dépend de la manière dont on a obtenu les hauteurs des deux astres. Lorsqu'elles ont été

mesurées, ainsi que la distance, par des observations simultanées, et que l'on n'a pas pu compter l'heure de ces observations sur une montre, il faut calculer l'angle horaire du soleil avec la hauteur observée, d'après les règles de l'art. 75; ensuite on en conclura l'heure du lieu. La différence qui existe entre cette heure et l'heure de Paris, qui a été conclue de la distance vraie, réduite en degrés, sera la longitude du vaisseau. Lorsque l'heure du lieu est plus grande que celle de Paris, cette longitude est orientale; mais si elle est plus petite, le vaisseau est à l'Ouest du méridien de Paris, et sa longitude est occidentale.

117. Cherchons à-présent quelle était l'heure du vaisseau correspondante à l'heure de Paris, que nous avons trouvée précédemment. Prenez d'abord, dans la Connaissance des tems, la déclinaison du soleil qui correspond à l'heure de Paris, que vous venez de calculer; dans ce cas-ci, elle est de 23°.22′.47″ Nord, mais la latitude est de 10°.16′.40″ Sud : la distance au pôle élevé sera donc de 113°.22′.47″. Procédez, avec ces quantités et la hauteur vraie du soleil, au calcul de l'angle horaire. Il est essentiel de faire remarquer qu'il ne faut pas employer la hauteur diminuée ou augmentée d'un certain nombre de secondes, mais qu'il faut faire le calcul avec celle que l'on a déduite immédiatement de la hauteur observée. Ainsi, dans l'exemple dont il est question, la hauteur du soleil que l'on doit employer pour calculer l'heure, est 48°.26′.49″, au lieu de 48°.26′.47″.

Hauteur vraie ⊙ . .	48°.26′.49″		
Latitude *S.*	10 .16 .40	com. cos.	0,0070251
Distance polaire ⊙.	113 .22 .47	com. sin.	0,0372070
Somme	172°. 6′.16″		
Demi-somme. . . .	86 . 3 . 8	cos.	8,8378864
½ somme. — Haut.	37 .36 .19	sin.	9,7854851
Somme			18,6676036
Demi-somme			9,3338018
Demi-angle horaire.			12°.27′.18″
Multipliant par.			8
(*Ajoutez* 24ʰ.) Heure du lieu.			1ʰ.39′.38″.24‴
Heure de Paris.			15 .41 . 0 . 0
Différence.			9ʰ.58′.38″.24‴
LONGITUDE orientale.			149°.39′.36″

L'heure du lieu, dans ce cas-ci, paraît plus petite que l'heure de Paris, mais elle est réellement plus grande. En effet, on comptait un jour de plus à bord du vaisseau, et il faut ajouter 24ʰ à l'heure déduite du calcul, qui est le 16 juin à 1ʰ.39′.38″.24‴, tandis que l'on n'était à Paris qu'au 15 juin, et que l'on y comptait à l'instant de l'observation 15ʰ.41′.

118. Cette méthode de se procurer l'heure du lieu, ne doit être employée que lorsqu'on ne peut pas compter sur une montre, l'heure des observations. Toutes les fois que l'on aura une montre marine ou une bonne montre à secondes, soit que l'on fasse des observations simultanées, soit qu'on calcule les hauteurs correspondantes à la

distance par des parties proportionnelles, il faudra toujours tenir compte des heures auxquelles chaque observation de distance a été faite. Quelque tems avant de prendre les distances, ou peu de tems après avoir achevé les observations, on observera des hauteurs du soleil, qui feront connaître l'heure du lieu où ces hauteurs ont été prises. Il faudra corriger, comme dans l'exemple précédent, la distance apparente avec les hauteurs observées dans le même lieu que cette distance ; mais alors, on prendra la différence qui existe entre l'heure de Paris conclue de la distance vraie, et l'heure du lieu où l'on a observé l'angle horaire : par ce moyen on obtiendra la longitude de ce lieu. Cette seconde méthode jouit d'un grand avantage, lorsqu'on a une montre marine qui peut donner aussi la longitude du lieu de l'observation d'angle horaire, car elle procure deux résultats que l'on peut comparer directement entre eux sans avoir aucune réduction à faire. Dans le cas même où l'on ne pourrait compter l'heure des observations que sur une montre à secondes ordinaire, l'observation d'un angle horaire, faite avant ou après celle des distances, aurait l'avantage d'abréger beaucoup le calcul. En effet, si l'on ne veut pas se contenter d'une seule série d'observations de distance, le même angle horaire pourra suffire au calcul de la longitude de toutes les séries qui auront été observées.

119. Nous avons déjà eu occasion de dire que l'on ne devait pas calculer l'heure du lieu avec la hauteur des étoiles, et qu'il fallait se la procurer par une hauteur du soleil, prise dans la soirée qui précède l'observation de la distance de la lune à une étoile, ou dans la matinée qui la suit ; nous avons recommandé de calculer les hauteurs vraies de deux astres avec l'heure du lieu de l'observation d'angle horaire, rapportée à celui

de l'observation de la distance, au moyen du chemin fait en longitude dans l'intervalle de ces deux observations. Si l'on comparait l'heure qui a servi au calcul des hauteurs avec l'heure de Paris, conclue du calcul de la distance vraie, on obtiendrait la longitude du lieu où les distances ont été observées; mais il vaudra mieux, comme précédemment, prendre la différence de l'heure de Paris à celle du lieu où l'on a observé l'angle horaire, afin de se procurer une longitude qui puisse être comparée directement à celle qui aurait été obtenue par une montre marine.

120. Les circonstances dans lesquelles on peut prendre des distances de la lune aux étoiles, sont bien plus fréquentes que celles où l'on peut mesurer des distances de la lune au soleil. Il ne faudra donc pas négliger cette espèce d'observation, qui, souvent, est la seule d'où l'on puisse conclure la position du vaisseau. Lorsqu'on possède une montre à secondes, l'observation des distances des étoiles à la lune est aussi facile que celles de la lune au soleil. On ne saurait trop recommander aux navigateurs de ne pas se laisser effrayer par la longueur des calculs qui, dans ce cas, sont, à la vérité, augmentés de celui des hauteurs; on peut les assurer que ce qu'ils pourraient avoir de pénible et de fastidieux dans le commencement, disparaîtra bientôt : il ne faut s'y exercer que pendant bien peu de tems, pour parvenir à se les rendre familiers. D'ailleurs il est inutile de chercher une précision imaginaire, dont l'observation n'est pas susceptible, et il suffira de calculer les hauteurs à la minute, en ne prenant les logarithmes qu'avec cinq décimales. Le calcul de la distance vraie d'une étoile à la lune, est le même que celui d'une distance de la lune au soleil; et, si l'on a égard à toutes les abréviations que nous avons indiquées, il

sera possible de faire le calcul de deux ou trois séries d'observations en très-peu de tems. Il faudra s'exercer au calcul de l'exemple suivant. Les règles que l'on doit suivre se trouvent aux articles 79 et 80, et dans ce qui a été dit dans ce chapitre. Nous nous contenterons, en conséquence, de donner le simple énoncé de la question, avec le résultat du calcul ; mais nous avons réuni dans un même tableau, comme nous l'avons fait à l'égard du premier exemple, toutes les données et les quantités nécessaires au calcul : elles y sont rangées dans l'ordre le plus propre à faciliter les opérations.

EXEMPLE II.

Le 19 juin 1793, étant par 9°.45′.50″ de latitude Sud, et par 148°.43′ de longitude orientale. Lorsqu'une montre marquait $3^h.41'.5'',5$ (*voyez page* 85 et suiv.), on a trouvé par des hauteurs du soleil, qu'elle retardait sur le tems vrai de $1^h.21'.34'',3$. A l'instant où la même montre devait marquer $6^h.8'.10'',8$, on a reconnu, par une série de six distances de la lune à *Antarès*, que la distance de cette étoile au bord le plus éloigné de la lune, était de 39°.12′.13″. On demande la longitude du lieu où l'on a observé l'angle horaire.

Les hauteurs calculées sont les mêmes que celles des pages 86 et 87 ; on y trouvera en détail les opérations qu'il faut faire pour se les procurer.

Heure du lieu de l'observ. d'angle horaire.	$31^h.29'.45''$
Heure de Paris	21 .32 .21
Différence	$9^h.57'.24''$
LONGITUDE orientale.	149°.21′. 0″

Le 19 juin 1793, distance du bord le plus éloigné de la ☾ à *Antarès*.

CALCUL DES HAUTEURS.

ÉLÉMENS DU CALCUL.

Latitude *S*.	9°.44'.50"
Ascension droite de »	244 .11 .40
Déclinaison de » *S*.	26 .57 .30
Ascension droite de la ☾	208 . 4 . 0
Déclinaison de la ☾ *S*.	7 .26 . 0
Distance polaire de la ☾	82 .35 . 0
Distance polaire de »	64 . 2 .30

HAUTEUR DE L'ÉTOILE.

Heure de la montre	6h. 8 .10 .8		
La montre retarde de	+ 1 .21 .34 .5		
Tems vrai	7 .29 .45 .1		
Différence en longitude	+ 16		
Tems vrai du lieu	7 .30 . 1 .1		
Distance l'équinoxe au ☉	− 18 . 6 .54 .6		
Ascension droite mérid.	13h. 23 . 6 .5		
En degrés	200°.46 .38		
Ascension droite »	244 .11 .40		
Angle horaire »	43 .25 . 2		
Antarès à l'Est			
Demi-angle horaire	21 .43		cos 9,96803
Distance polaire	64 . 3	½	sin 4,97692
Latitude	9 .45	½	cos 4,99684
Distance polaire — latit.	54 .18		
Différence à 90°	35 .42		
Demi-différence	17 .21	com.	cos 0,02143
Somme	Angle auxiliaire		sin 9,96322
	Angle auxiliaire		cos 9,39627
(cos angl. auxil. — com. cos ½ différ.)			cos 9,57484
(90° + haut.)			67°.56'
(Double — 90°) HAUTEUR VRAIE »			45°.52'

HAUTEUR DE LA LUNE.

Ascension droite du méridien en degrés	200°.46 .38"		
Ascension droite de la ☾	208 . 7		
Angle horaire ☾	7 .20 .22		
La lune à l'Est			
Demi-angle horaire	3°.40'		cos 9,99911
Distance polaire	82 .35	½	sin 4,99817
Latitude	9 .45	½	cos 4,99684
Distance polaire — latit.	72 .50		
Différence à 90°	17 .10		
Demi-différence à 90°	8 .35	com.	cos 0,00489
Somme	Angle auxiliaire		sin 9,99901
	Angle auxiliaire		cos 8,82888
(cos angl. auxil. — com. cos ½ différ.)			cos 8,82399
½ (90° + haut.)			86°.10'
(Double — 90°) HAUTEUR VRAIE ☾			82°.20

CALCUL DE LA DISTANCE VRAIE.

Heure vraie	7h.29 .45
Longitude orientale	9 .55
Heure de Paris	21 .35
Demi-diamètre de la ☾	15 .26
Augmentat. ½ diam. ☾	+ 1
Demi-diam. corrigé ☾	15 .41
Parallaxe de la ☾	56 .41
Diminut. de la parallaxe	− 1
Parallaxe corrigée	
Distance observ. » ☽	39°
Demi-diamètre ☾	− 1
Distance apparente » ☾	58 .5
Hauteur vraie »	45°.5
Réfraction	+ 1
Hauteur apparente »	45 .52
Hauteur vraie de la ☾	82°.20'
Paral. réf. approchée	7 .2
Hauteur approchée	82 .12 .3
Parallaxe-réfraction	7 .3
Hauteur apparente	82 .12 .2

		+ 2"		
...nce apparente » ☾	38°.56 .30			
...e apparente »	45 .52 .50	com.	cos	0,1572971
...r apparente ☾	82 .12 .20	com.	cos	0,8676778
...e	167 . 1 .40			
...mme	83 .30 .50		cos	9,0529538
...me — distance	44 .34 .20		cos	9,8527034
...rie »	45 .51 .55		cos	9,8428263
...rie ☾	82 .19 .53		cos	9,1252967
...	128 . 1 .48	Som.		38,8987311
		½ som.		19,4493655
...omme	64 . 5 .54		cos	9,6403104
	Angl. auxil.		cos	9,8835566
		Somme	sin	9,5238669
		Demi-distance		19°.31' .25"
		Double		39 . 2 . 5
Ajoutez les se...		...ondes négligé		+ 2
DISTANCE VRAIE				39°. 2 . 7
Distance des tables		le 17 à 21h.		39 .18 .53
		le 19 à midi		35 .45 .25
		Heure de Paris		21 .32 .21
		Heure du lieu		31 .29 .45
		Différence		9h.57 .24
LONGITUDE ORIENTALE				149°.21' .0"

9,8090551	sin. angle auxiliaire.	
40°. 6 .34	Angle auxiliaire.	
1er. intervalle 3h.		log. 4,033
1er. Dif. 0°.16'.47"		log. 3,00
2e. Dif. 1 .32 .28		log. 6 2
Somme		log.
2e. intervalle		0h

121. Toutes les fois que l'on aura pu observer deux ou trois séries de distances, on obtiendra la longitude à 15′ ou 20′ près. Cette erreur ne peut jamais influer de plus de 5 lieues à 6 lieues $\frac{2}{3}$ sur la position du vaisseau.

122. La distance vraie que l'on obtient par la méthode précédente, est réduite dans l'hypothèse que la terre est sphérique. On trouve, dans presque tous les Traités des Calculs de l'Astronomie nautique, les moyens de la corriger, afin d'obtenir celle que l'on aurait dû calculer dans l'hypothèse que la terre est un sphéroïde applati vers les pôles. Nous avons cru pouvoir négliger ici ces corrections, parce qu'elles ne peuvent jamais être assez considérables pour mériter de fixer l'attention; elles ne peuvent pas influer sur la longitude calculée dans les circonstances les moins favorables, de plus de 3 à 4 minutes de degrés. Cependant, lorsqu'on est obligé de calculer les hauteurs, il serait possible d'avoir égard à l'applatissement de la terre, sans augmenter le calcul; il faudrait simplement, au lieu de calculer ces hauteurs avec la latitude du lieu, employer la même latitude diminuée d'une quantité que l'on trouve dans les recueils de tables astronomiques, et que l'on appelle angle à la verticale. Nous n'avons fait jusqu'à-présent (*), aucune mention de ces corrections, afin de ne pas compliquer inuti-

(*) On trouvera dans les notes qui sont à la fin de ce Traité, et à la suite de l'explication des principes de construction des tables XII et XIII, l'usage que l'on pourrait faire de ces mêmes tables, pour corriger les hauteurs observées, et obtenir celles qui seraient propres à calculer la distance vraie, dans l'hypothèse que la terre est un sphéroïde applati.

lement le calcul de la longitude ; nous aurions au contraire desiré de trouver des moyens de le simplifier encore davantage.

123. Les distances peuvent être observées à terre, et, dans ce cas, elles font connaître la longitude des lieux où l'on a réglé les montres marines ; mais comme l'erreur probable de chaque observation est de 15′ à 2″, il est nécessaire de faire concourir un grand nombre de résultats à la détermination de la longitude du même point, afin de diminuer, autant qu'il est possible, les erreurs dont elle pourrait être affectée. On augmentera encore la probabilité de précision des longitudes ainsi déterminées, en ayant l'attention de les conclure de la manière qui va être indiquée. Il faut, en premier lieu, se rappeler ce qui a été dit dans le cours de ce Traité, que le même observateur mesure toujours les angles, ou un peu trop grands, ou un peu trop petits, soit par la qualité de sa vue, soit par la manière dont il a pris l'habitude de placer à côté l'un de l'autre, les bords des objets qu'il veut faire coïncider dans le champ de la lunette. Il en résulte que les distances observées par une même personne, sont toutes trop grandes ou trop petites. La valeur des erreurs dont elles peuvent être affectées par cette cause, est sujète à varier ; mais les erreurs qui sont de nature à agir, dans le même sens, sur l'heure de Paris, conclue d'observations faites quand les distances des tables augmentent, agiront en sens contraire lorsque les distances des tables diminueront. Les distances augmentent, lorsque l'étoile ou le soleil est à l'occident de la lune, et alors les distances s'appellent *distances occidentales ;* elles diminuent lorsque l'étoile ou le soleil est à l'orient de la lune, et, dans ce cas, elles prennent le nom de *distances orientales.* Il faudra donc prendre

un milieu arithmétique entre la longitude moyenne conclue seulement des distances occidentales et la longitude moyenne des distances orientales, afin d'obtenir une dernière longitude qui soit dégagée, en grande partie, des erreurs provenant du coup-d'œil de l'observateur. Il est probable que l'erreur des longitudes obtenues, en combinant ainsi les résultats, ne serait pas une erreur de plus de 30 minutes.

124. La distinction que nous venons de faire, entre les longitudes des distances occidentales, et celles que l'on obtient par des distances orientales, ne peut guères être utile que lorsqu'il s'agit des résultats de distances du soleil à la lune. Plusieurs causes, qu'il serait trop long de rapporter ici, rendent les erreurs des distances des étoiles à la lune sujètes à des irrégularités dont il est impossible de reconnaître les diverses influences, d'après les circonstances qui accompagnent les observations; ainsi il faudra toujours conclure la longitude du port de relâche avec la longitude moyenne de toutes les observations, que l'on prendra sans faire de distinction entre les longitudes obtenues par des distances orientales et celles qui l'ont été par des distances occidentales. Les erreurs des longitudes déterminées par des distances de la lune aux étoiles, ne doivent jamais être de plus de 15′ de degré; elles seront donc susceptibles d'une précision un peu moins grande que celle des distances de la lune au soleil : c'est pourquoi il ne faut en faire usage pour déterminer une position géographique, que dans le cas où l'on n'aurait pas pu se procurer un assez grand nombre de ces dernières.

125. Les longitudes observées en mer, sont presque toutes conclues de distances prises dans des lieux différens, et ne paraissent pas d'abord susceptibles de procurer

la position du vaisseau avec une grande précision ; il sera cependant facile de leur donner à-peu-près la précision des longitudes observées pendant les relâches, toutes les fois que l'on aura des montres marines. En effet, ces montres donneront la faculté de mesurer, avec exactitude, les différences en longitude de tous les lieux où l'on a observé des distances ; il sera donc possible de rapporter à un seul lieu, les résultats des longitudes observées dans des lieux différens, et sa longitude aura bien plus de précision que si elle n'avait été déterminée que par le petit nombre de distances qu'il eût été possible de se procurer sur le lieu même. Toutes les fois que l'on se conformera aux règles suivantes, la longitude ne sera affectée que de l'erreur provenant de celle des distances, et l'influence des erreurs des différences en longitudes, mesurées même longtems après que la montre aura été réglée, pourront être considérées comme nulles.

126. Rapportez les longitudes des distances qui ont été observées à des jours consécutifs ou peu éloignés les uns des autres, au lieu dont vous avez déterminé la longitude par la montre marine, dans la matinée ou dans la soirée du jour qui est également éloigné en tems du premier et du dernier jour d'observation de distance.

S'il s'agit des longitudes obtenues par des distances de la lune au soleil, vous rapporterez ainsi toutes les longitudes des distances occidentales à un seul point. Vous rapporterez pareillement à un autre point les longitudes conclues des distances orientales; ensuite vous calculerez la longitude d'un troisième point, en rapportant les longitudes des deux jours intermédiaires, dont l'une résulte des distances occidentales, et l'autre des distances orientales, au lieu dont vous aurez déterminé la longitude par la montre, dans la matinée ou dans la soirée du jour

qui est également éloigné en tems des deux jours intermédiaires dont on vient de parler. La longitude de ce troisième point aura toute la précision dont la méthode des distances observées en mer est susceptible ; elle sera même aussi grande, à peu de chose près, que celle des longitudes obtenues par des observations qui auraient été faites dans un même lieu.

127. S'il s'agit des longitudes obtenues par des distances de la lune aux étoiles, vous pourrez rapporter de la même manière à un seul point, les longitudes moyennes que vous aurez conclues de deux ou de plusieurs groupes d'observations, sans faire de distinction entre les distances occidentales et les distances orientales : la seule attention qu'il faut avoir est que le jour intermédiaire du dernier groupe, ne réponde pas à une époque plus éloignée que de 20 ou 30 jours, de l'époque à laquelle répond le jour intermédiaire du premier groupe d'observations. Vous pourrez faire concourir, par ce moyen, à la détermination de la longitude d'un seul lieu, un si grand nombre d'observations, que vous l'obtiendrez avec une précision qui sera à-peu-près égale à celle des longitudes que l'on conclut par les distances de la lune au soleil.

CHAPITRE VII

Trouver la déclinaison de l'aiguille aimantée par l'observation de l'azimuth ou de l'amplitude du soleil, et par le relèvement astronomique d'un objet terrestre.

128. LA déclinaison de l'aiguille aimantée, est l'angle que la direction de cette aiguille fait avec la ligne Nord et Sud. Si l'on relevait avec la boussole un objet terrestre situé exactement au Nord ou au Sud, l'observation donnerait directement la déclinaison de l'aiguille ; mais comme tous les rhumbs de vent de la boussole font avec les véritables rhumbs de vent du monde, des angles égaux à cette déclinaison, il suffit de relever un objet dont le véritable relèvement soit connu : alors la différence de ce relèvement à celui qui a été observé est la déclinaison que l'on cherche. La question se réduit donc à trouver par un moyen quelconque le véritable relèvement d'un objet situé de manière à ce qu'il puisse être relevé avec une boussole. Lorsqu'on est en mer, le soleil est le seul objet que l'on peut observer commodément avec la boussole ; le relèvement de cet astre est l'arc de l'horison compris entre son vertical et le méridien du lieu, et doit être égal à l'angle formé par ces deux cercles, ou à l'azimuth du soleil. Il faut donc chercher par le calcul quel était l'azimuth du soleil à l'instant où cet astre a été relevé. L'astronomie nautique enseigne aussi les moyens d'observer et de calculer les véritables relève-

mens des objets terrestres ; ainsi lorsqu'on est près d'une côte, il est possible d'employer des observations faites sur ces objets, pour reconnaître la déclinaison de l'aiguille aimantée. Les derniers relèvemens s'appellent *relèvemens astronomiques ;* et comme ils sont ceux qui comportent le plus de précision, et que, d'ailleurs, ils contribuent beaucoup à la perfection des cartes hydrographiques ou marines, nous nous proposons d'en parler avec quelque étendue.

Calculs de l'azimuth et de l'amplitude du soleil.

129. Nous avons déjà dit que la hauteur du soleil variait à tous les instans de la journée, et qu'il était possible de se procurer l'heure du lieu où l'on est, par l'observation de la hauteur de cet astre : on peut également obtenir par le calcul l'azimuth du soleil correspondant à l'instant de l'observation. Il ne s'agira donc plus, si l'on veut connaître la déclinaison de l'aiguille aimantée, que de mesurer avec une boussole l'azimuth de cet astre à l'instant même où l'on prend sa hauteur. La différence de l'azimuth calculé à l'azimuth observé sera égale à la déclinaison de l'aiguille.

130. Les circonstances dans lesquelles l'observation de la hauteur du soleil fait connaître son azimuth avec le plus de précision, sont à-peu-près les mêmes que celles où cette même hauteur doit être observée, lorsqu'on veut calculer l'heure du lieu. Cependant, comme l'azimuth calculé est presque toujours susceptible d'une beaucoup plus grande précision que l'azimuth observé avec une boussole ; il ne faut, dans ce cas-ci, avoir aucun égard aux règles qui ont été données relativement aux circonstances qui doivent accompagner une observation d'angle horaire. Il sera toujours plus avantageux de faire l'observation, lorsque le soleil est très-près de l'horison ; alors son azimuth peut être observé

avec une boussole, bien plus facilement que lorsqu'il est parvenu à une certaine hauteur. Les erreurs, dont l'azimuth calculé pourrait dans ce cas être affecté par l'incertitude des réfractions et de la latitude du lieu, seront très-petites en comparaison de celles dont l'azimuth observé est lui-même susceptible. Ainsi dès que, en regardant à travers un instrument à réflexion, vous ne verrez plus l'image directe du soleil dans le champ de la lunette de cet instrument, vous pourrez commencer l'observation : la hauteur du soleil sera alors d'un peu plus de 4 degrés. Les relèvemens du soleil deviennent susceptibles d'assez grandes erreurs, lorsque cet astre est parvenu à 15° de hauteur ; vous n'observerez donc pas d'azimuth lorsqu'il sera au-dessus de 15°. On pourrait à la rigueur pratiquer cette espèce d'observation, tant que le soleil peut être apperçu entre les pinnules qui sont placées sur le couvercle des boussoles; mais lorsqu'on voudra obtenir toute la précision dont elle est susceptible, il vaudra mieux cesser l'observation, dès que le soleil aura plus de 15° de hauteur.

131. Tandis que deux observateurs seront occupés à prendre le relèvement du soleil avec une boussole, en se conformant à ce qui a été dit à l'art. 362 du 1er. volume, un troisième observateur mesurera la hauteur du soleil avec un sextant ou un cercle ; il ramenera l'image de cet astre à l'horison, et en suivant ses mouvemens avec la vis de rappel, il maintiendra toujours son bord inférieur en contact avec ce dernier cercle. A l'instant où les deux observateurs qui prennent le relèvement, auront la certitude d'avoir fait une bonne observation, ils avertiront celui qui prend la hauteur, et ce dernier comptera l'arc marqué par l'alidade sur le limbe de son instrument : ce sera la hauteur correspondante à l'azimuth observé. On peut recommencer une autre observation et l'on conclura la hauteur moyenne, qui

doit correspondre au milieu arithmétique que l'on prendra entre les deux azimuths observés. Si l'on mesure la hauteur avec un cercle, l'arc parcouru par l'alidade ne doit être compté qu'à la fin de la seconde observation; et l'on en conclura, comme à l'ordinaire, la hauteur moyenne correspondante à l'azimuth moyen. Il serait avantageux d'observer de la sorte plusieurs séries composées chacune de deux observations; le milieu arithmétique des déclinaisons déduites de chacune de ces séries, sera susceptible d'une assez grande précision. Il n'est pas nécessaire de compter sur une montre à secondes, l'heure à laquelle les hauteurs ont été prises; on peut même se contenter d'une heure approchée, qui pourrait sans inconvénient différer de 15′ à 20′ de l'heure vraie du lieu d'observation.

132. Voici comment il faut procéder au calcul de l'azimuth. Calculez l'heure de Paris correspondante à l'instant de l'observation, au moyen de l'heure approchée du lieu et de la longitude estimée. Vous chercherez dans la Connaissance des tems la déclinaison que le soleil avait à cet instant, et vous en conclurez sa distance au pôle élevé. Cette distance polaire, la hauteur vraie que vous déduirez de la hauteur observée par les règles du chapitre II, et la latitude du vaisseau, sont les trois données nécessaires au calcul.

Ecrivez les unes au-dessous des autres et dans l'ordre suivant, la distance du soleil au pôle élevé, sa hauteur vraie et la latitude. Ajoutez ensemble ces trois quantités, et prenez la moitié de leur somme. Ensuite placez au-dessous de la demi-somme la différence qui existe entre cette demi-somme et la distance polaire; c'est-à-dire retranchez la plus petite de ces deux quantités de la plus grande. Vous prendrez d'abord dans les tables, les complémens arithmétiques des logarithmes cosinus de la hauteur vraie du soleil et

de la latitude ; ensuite vous écrirez au-dessous de ces complémens les deux logarithmes des cosinus de la demi-somme et de la différence de cette demi-somme à la distance polaire. Ajoutez ces quatre quantités ensemble, et la moitié de leur somme sera le logarithme cosinus de demi-angle azimuthal ; le double de l'arc correspondant sera l'azimuth du soleil, qui sera toujours compté en partant du côté du pôle élevé : dès-lors si le pôle élevé se trouve dans la partie du méridien qui est du côté du Nord, l'azimuth sera compté en partant du Nord ; si le pôle élevé est du côté du Sud, l'azimuth sera compté en partant du Sud. Il faut par conséquent que l'azimuth observé avec la boussole soit compté à partir du pôle élevé ou du même côté que l'azimuth calculé, avant de pouvoir en conclure la déclinaison de l'aiguille aimantée.

Le calcul de l'azimuth doit se faire sans avoir égard aux secondes de degré ; ainsi l'on ne prendra les logarithmes qu'avec cinq décimales.

133. Nous avons déja vu que la déclinaison de l'aiguille est égale à la différence qui existe entre l'azimuth observé, avec la boussole et l'azimuth calculé ; mais pour savoir de quel côté du méridien elle doit avoir lieu, il faut avoir égard aux remarques suivantes : Supposez pour un instant que vous êtes tourné du côté du soleil, et que vous regardez dans la direction où il a été relevé ; alors il vous sera bien facile de reconnaître si l'azimuth qui résulte du calcul, répond sur la rose du compas, à gauche ou à *Bâbord* (*) de l'azimuth observé avec la boussole; vous reconnaîtrez également s'il répond à droite ou à *Tribord.*

(*) En terme de marine, *bâbord* veut dire la gauche, et *tribord* la droite.

Mais la direction de l'aiguille aimantée doit être située à l'égard de la ligne Nord et Sud, exactement de la même manière que la direction résultante du calcul, est située à l'égard de celle qui a été observée avec la boussole; dès-lors toutes les fois que l'azimuth calculé répond sur la rose du compas, à bâbord de l'azimuth observé avec la boussole, il s'ensuit que la direction de l'aiguille doit être à bâbord du Nord du monde: dans ce cas cette aiguille décline du côté de l'O, et sa déclinaison prend la dénomination de Nord-Ouest. Si l'azimuth calculé place le soleil à tribord de l'azimuth observé, l'aiguille décline vers l'Est, et la déclinaison prend la dénomination de Nord-Est. Les marins appellent vulgairement la déclinaison de l'aiguille aimantée, *Variation de la Boussole*, et disent que la Variation est Nord-Ouest ou Nord-Est.

134. Lorsque l'aiguille décline de deux rhumbs de vent vers le Nord-Ouest ou à Bâbord du Nord du monde, la véritable direction du Nord de la boussole est le Nord-Nord-Ouest; et lorsqu'elle décline de deux rhumbs vers le Nord-Est ou à Tribord, la véritable direction du Nord de la boussole est le Nord-Nord-Est. Le rhumb de vent corrigé est donc toujours situé à l'égard du rhumb observé, de la même manière que le Nord de la boussole par rapport au Nord du monde. Cette considération fait croire qu'il y aurait de l'avantage à conserver les deux dénominations à la déclinaison de l'aiguille aimantée; on dirait par exemple déclinaison Nord-Ouest ou Bâbord, et déclinaison Nord-Est ou Tribord. On en tirerait une règle générale bien simple, pour corriger la route d'un vaisseau et les relèvemens observés avec une boussole. Il suffirait de recommander d'employer la déclinaison de l'aiguille, de manière que le relèvement corrigé fût à bâbord ou à tribord du

relèvement observé, selon la dénomination que doit avoir cette declinaison. Les dénominations de Nord-Ouest et de Nord-Est dérivent plus naturellement des principes, et sont essentielles à ceux qui s'occupent de la théorie de l'aimant; les autres dénominations seraient d'une grande commodité dans la pratique, et pourraient sauver bien des méprises qui n'ont lieu que, parce que les hommes même les plus exercés, sont sujets à se tromper sur le véritable sens dans lequel les relèvemens doivent être corrigés. Les marins ont sans doute été guidés par une analogie de cette espèce, quand ils ont dit que la dérive était à bâbord ou à tribord, et que la variation était du même côté ou du côté opposé. Nous ne cherchons donc pas à introduire un nouveau terme, nous proposons seulement de rendre générale une dénomination dont on s'est servi dans un cas particulier.

Exemple.

Le 2 mars 1792, à environ 6 heures du matin, étant par 34°.48′ de latitude Sud, et par 35°.49′ de longitude orientale; on a observé la hauteur du bord inférieur du soleil, de 6°.15′. Au même instant, l'azimuth du soleil observé avec une boussole, était de 57°.17′, c'est-à-dire que le centre du soleil avait été relevé au S. 57°.17′ Est; l'élévation de l'œil au-dessus de la surface de la mer était de $6^{m},17$. On demande l'azimuth vrai du soleil et la déclinaison de l'aiguille aimantée.

L'heure de Paris correspondante à l'instant de l'observation est, le 1er. mars à 15 .37′; on trouve dans la Connaissance des tems que la déclinaison du soleil à cet instant était 6°.37′ S. Mais la latitude est de même dénomination que cette déclinaison, par conséquent la distance au pôle élevé est de 83°.3′. La hauteur vraie du centre du soleil est

6°. 19′. On disposera ces données, et l'on effectuera le calcul de la manière suivante.

[redacted] au pôle élevé.	83°. 3′		
Hauteur vraie du ⊙.	6 . 19	com. cos.	0,00264
Latitude.	34 . 48	com. cos.	0,08558
Somme . . .	124°. 10′		
Demi-somm. . . .	62 . 5	cos.	9,67042
Dist. pol. — ½ som.	20 . 58	cos.	9,97025
	Somme.		19,72889
	Demi-somm. cos.		9,86444
	Demi-azimuth . .		42°. 57′
Double. Azimuth du S. à l'E.			85 . 54
Le soleil a été relevé au S.			57 . 17 E.
DÉCLINAISON de l'aiguille aimantée .			28°. 37′ N. O. ou bâbord.

Dans cet exemple le pôle Sud est celui qui est élevé sur l'horison; par conséquent l'azimuth du soleil calculé est compté à partir de ce pôle. Il faut aussi que l'azimuth observé à la boussole soit compté en partant du même pôle, et il est le Sud 57°. 17′ Est. La différence de cet azimuth observé à l'azimuth qui résulte du calcul est la déclinaison cherchée, et elle se trouve de 28°. 37′. A présent pour savoir dans quel sens cette déclinaison doit avoir lieu, je remarque que, l'azimuth calculé étant plus grand que l'azimuth observé avec la boussole, il doit répondre sur la rose du compas, à gauche ou à bâbord de l'azimuth observé; il s'ensuit que la déclinaison de l'aiguille doit être Nord-Ouest, et si l'on adopte la double

dénomination que l'on vient de proposer, elle sera Nord-Ouest ou bâbord.

135. L'instant où il est le plus facile d'observer le relèvement du soleil avec une boussole, est celui de son lever ou de son coucher, parce qu'alors cet astre se trouve à peu de chose près dans le plan de la rose du compas. Les marins font plus d'usage de cette observation que de la précédente, parce que le calcul en est moins long, et qu'il n'est pas nécessaire d'observer la hauteur du soleil qui est nulle à l'instant où son centre est à l'horison : cependant le résultat n'est pas susceptible, comme on le verra bientôt de la précision à laquelle il est possible d'atteindre par l'autre méthode. On a inséré dans presque tous les recueils de tables d'astronomie nautique des tables à double entrée, à l'aide desquelles il est facile de trouver, au moyen de la latitude et de la déclinaison du soleil, l'amplitude de cet astre à l'instant de son lever ou de son coucher. Cet arc n'est autre chose que la partie de l'horison comprise entre le soleil et le véritable point de l'Est ou de l'Ouest; il est le complément de l'azimuth du soleil, ou bien dans certains cas, il est égal à la quantité dont ce même azimuth est plus grand que 90°. La différence de l'amplitude trouvée dans ces tables à l'amplitude observée avec la boussole, est égale à la déclinaison de l'aiguille ; on pourra reconnaître par des moyens semblables à ceux que l'on vient de donner relativement à l'azimuth, si l'aiguille décline vers le Nord-Ouest ou vers le Nord-Est.

Les tables des amplitudes doivent avoir, pour être utiles, une certaine étendue. Les limites dans lesquelles nous avons été obligés de renfermer le Recueil de tables que l'on trouve à la fin de ce Traité, nous a forcés de supprimer celles-ci ; mais on peut y suppléer par un calcul très-court qui fera

connaître l'amplitude du soleil par l'addition de deux logarithmes à cinq décimales.

136. Avant de faire le calcul, cherchez l'heure de Paris correspondante à l'instant du lever ou du coucher du soleil; et vous prendrez dans la Connaissance des tems la déclinaison que le soleil avait à cet instant. Ensuite ajoutez le logarithme du sinus de la déclinaison avec le complément arithmétique du logarithme cosinus de la latitude, et la somme sera le logarithme sinus de l'amplitude du soleil. Lorsque le soleil se trouve au Nord de l'équateur, il se lève et se couche au Nord de la ligne Est et Ouest; et lorsqu'il est au Sud de l'équateur, il se lève ou se couche au Sud de cette même ligne : l'amplitude est donc toujours de même dénomination que la déclinaison.

137. L'amplitude que l'on trouve dans les tables, et celle que l'on obtient par le calcul précédent, supposent que l'on a relevé le soleil avec une boussole, à l'instant où son centre était réellement à l'horison; mais, en vertu de la réfraction le centre du soleil doit alors paraître élevé de 33′, il ne faudra donc observer le relèvement que, lorsque le bord inférieur paraîtra être au-dessus de l'horison d'environ la valeur du demi-diamètre. C'est la difficulté de saisir cet instant qui rend les déclinaisons de l'aiguille conclues de l'observation de l'amplitude, susceptibles d'une moindre précision que celles qui résultent de l'observation d'un azimuth. Néanmoins, si l'on a l'attention de relever le soleil peu de tems avant que son bord inférieur se détache de l'horison, et de ne pas prendre le relèvement quand la hauteur de ce bord paraît plus grande que le diamètre entier, alors l'erreur de l'amplitude calculée ne sera jamais de beaucoup plus d'un demi-degré, pourvu toutefois que la latitude ne soit pas de plus de 60°. Mais d'un autre côté, l'amplitude observée peut être aussi affectée d'une

erreur d'un demi-degré ; ainsi, quand les circonstances ne seront pas très-défavorables, c'est-à-dire, lorsque la mer ne sera pas très-agitée, on pourra obtenir la déclinaison de l'aiguille aimantée à un degré près : cette exactitude est suffisante pour la sûreté de la navigation ; mais si l'on veut l'obtenir avec une plus grande précision, il ne faut faire usage que de l'observation de l'azimuth du soleil.

EXEMPLE.

Le 11 juin 1792, à environ $6^h.50'$ du matin, étant par $27°.10'$ de latitude Sud, et par $164°.22'$ de longitude orientale ; on a observé avec une boussole, l'amplitude ortive du soleil, de $37°.27'$ vers le Nord. On demande quelle était la déclinaison de l'aiguille aimantée.

L'heure de Paris, à l'instant du lever du soleil dans le lieu de l'observation, était, le 10 juin, à $7^h.53'$; par conséquent, la déclinaison se trouvait de $23°.7'$ Nord.

Déclin. du ⊙ *N.* .	$23°.\ 7'$	sin.	9,59396
Latitude.	27 .10	com. cos.	0,05077
	Somme . . .	sin.	9,64473
Amplitude du ⊙		*E.*	$26°.11'$ *N.*
Le soleil a été relevé à l'*E.*			37 .27 *N.*
DÉCLINAISON de l'aiguille aimantée. .			$11°.16'$ *N. E.* ou tribord.

Dans cet exemple, le relèvement calculé répond sur la rose du compas, à droite où à tribord du relèvement pris avec la boussole ; la déclinaison de l'aiguille est donc Nord-Est ou tribord.

Des relèvemens astronomiques.

138. On vient de donner le moyen de calculer l'azimuth ou le relèvement du soleil par l'observation de sa hauteur. Si, en même tems que l'on prend cette hauteur, on mesure la distance du soleil à un objet terrestre et la hauteur de cet objet lui-même, l'astronomie nautique fournit les moyens de calculer, avec ces données, la différence qui existe à l'instant de l'observation, entre le relèvement du soleil et le relèvement de l'objet dont la distance au soleil a été mesurée. Le relèvement du soleil étant connu, et la différence de ce relèvement à celui de l'objet l'étant aussi, il est facile d'en conclure le relèvement de l'objet lui-même. Ce sont ces relèvemens que l'on appelle relèvemens astronomiques, parce qu'ils dérivent immédiatement de l'observation des astres. Ils sont, comme on va le voir, les plus propres à faire connaître avec exactitude la déclinaison de l'aiguille aimantée; on doit aussi les employer de préférence aux relèvemens faits à la boussole, lorsqu'on veut construire des cartes hydrographiques ou marines.

139. L'observation des relèvemens astronomiques exige le concours de deux observateurs, tandis que l'un d'eux prend la hauteur du soleil, le second observateur doit mesurer la distance de l'objet au bord du soleil qui en est le plus proche. On pourra faire deux observations de distance et de hauteur, et l'on en conclura la hauteur moyenne correspondante à la distance moyenne. La hauteur de l'objet doit toujours être très-petite, et ne peut pas varier d'une quantité sensible dans un court intervalle de tems; il faudra donc la mesurer peu de tems avant ou après les observations de la hauteur du

soleil et de la distance. Comme il est inutile d'obtenir le relèvement d'un objet terrestre à un petit nombre de secondes près, ce genre d'observation n'exige pas que l'on ait égard aux règles que nous avons recommandé de suivre, lorsqu'on observe des distances de la lune au soleil et aux étoiles; ainsi les observations simultanées de la distance du soleil à l'objet et de la hauteur du soleil, auront toujours l'exactitude nécessaire.

On ne tiendra pas compte de l'heure, de la minute et de la seconde auxquelles chaque observation a été faite, et l'on pourra calculer les quantités que l'on cherche dans la Connaissance des tems, avec l'heure de Paris conclue d'une heure approchée du lieu, qui pourrait, sans inconvénient, être en erreur de 15 minutes à 20 minutes.

Lorsqu'on veut conclure la déclinaison de l'aiguille aimantée du relèvement astronomique d'un objet terrestre, il faut que deux autres observateurs prennent avec une boussole le relèvement du même objet, à l'instant où l'on observe sa distance au soleil. Cette manière d'obtenir la déclinaison de l'aiguille, exige donc le concours de quatre observateurs, c'est-à-dire, celui d'une personne de plus, que quand on l'obtient par l'observation de l'azimuth du soleil. La méthode des amplitudes n'exige que deux observateurs, et c'est une des raisons qui la rendent d'un usage plus commode.

140. Le calcul des relèvemens astronomiques, d'après ce qui a été dit plus haut, est composé de deux parties; 1°. du calcul de l'azimuth du soleil; 2°. du calcul de la différence de l'azimuth de cet astre à celui de l'objet. Il s'ensuit que la précision du résultat dépend de celle avec laquelle la hauteur du soleil fera connaître son azi-

muth ; elle dépend aussi de la précision de la différence en azimuth calculée. Nous avons vu que les mouvemens en hauteurs étaient très-lents près du méridien ; par conséquent, les hauteurs prises à une petite distance de midi, ne sont pas propres à faire connaître l'azimuth correspondant. En général, il ne faudra jamais calculer l'azimuth du soleil avec des hauteurs prises entre 10 heures et demie du matin, et 1 heure et demie du soir. Les hauteurs qui auraient été prises à tous les autres instans de la journée, procureront l'azimuth à 2′ près. Il y a cependant des circonstances où l'on pourra obtenir le relèvement astronomique par une distance observée entre 10 heures et demie du matin et une heure et demie du soir ; mais alors il faut calculer l'azimuth du soleil avec son angle horaire au lieu de sa hauteur : nous donnerons dans la suite la manière de faire ce calcul.

141. Toutes les circonstances ne sont pas non plus également favorables à l'observation de la différence de l'azimuth du soleil à celui d'un objet terrestre ; on pourrait même faire des observations dont les résultats seraient très-défectueux ; c'est pourquoi il sera essentiel de consulter les règles suivantes, avant de faire les observations, et, si l'on a l'attention de s'y conformer, on obtiendra, dans tous les cas, la différence en azimuth à 2′ ou 3′ près.

1°. N'observez jamais de relèvement astronomique, quand le soleil a plus de 60° de hauteur.

2°. Choisissez un objet qui ne soit pas éloigné du point où le vertical du soleil coupe l'horison de beaucoup plus ou de beaucoup moins de 90° degrés.

3°. Dans le cas où vous ne pouvez pas observer un objet éloigné d'environ 90° du vertical du soleil ; choi-

sissez-en un autre situé par rapport au soleil, de manière que l'angle d'inclinaison de l'instrument avec lequel vous mesurerez la distance, ne soit pas de plus de 45 degrés.

Une erreur de 10° à 12° dans l'estime que vous pouvez faire, soit de la différence des azimuths du soleil et de l'objet, soit de l'angle d'inclinaison de l'instrument avec lequel vous mesurerez la distance, ne peut pas avoir une grande influence sur le résultat.

142. Voici les règles que l'on doit suivre pour se procurer les quantités nécessaires au calcul. De l'heure approchée du lieu et de la longitude, vous déduirez l'heure de Paris correspondante à l'instant de l'observation; ensuite vous chercherez dans la Connaissance des tems, la déclinaison que le soleil avait à cet instant, et vous en conclurez sa distance au pôle élevé. Corrigez la hauteur observée du soleil de la dépression de l'horison et de son demi-diamètre, et vous aurez la hauteur apparente de cet astre, que vous diminuerez de la réfraction, afin d'obtenir la hauteur vraie avec laquelle vous ferez le calcul de l'azimuth par les règles de l'article 132. Vous ajouterez le demi-diamètre du soleil à la distance observée, si vous avez mis l'objet en contact avec le bord du soleil, qui en était le plus voisin; vous retrancherez au contraire le demi-diamètre du soleil de la distance, si vous avez mis l'objet en contact avec le bord qui en était le plus éloigné. Dans ces deux cas, vous obtiendrez la distance apparente de l'objet au centre du soleil; vous retrancherez aussi la dépression de l'horison de la hauteur de l'objet, le reste sera la hauteur apparente de cet objet qui, avec la distance apparente et la hauteur apparente du soleil, doit vous servir à trouver la différence des azimuths par les règles que l'on va donner.

143. Écrivez, dans l'ordre suivant, la distance apparente, la hauteur apparente du soleil et la hauteur apparente de l'objet; ajoutez ensemble ces trois quantités, et prenez la moitié de leur somme; prenez aussi la différence de la demi-somme à la distance apparente. Ensuite cherchez dans les tables, le complément arithmétique du logarithme cosinus de la hauteur apparente du soleil, et le complément arithmétique du logarithme cosinus de la hauteur apparente de l'objet. Vous placerez au-dessous de ces deux complémens arithmétiques, le logarithme du cosinus de la demi-somme, et celui du cosinus de la différence de la demi-somme à la distance apparente. La moitié de la somme de ces quatre nombres sera le logarithme cosinus de la demi-différence des azimuths du soleil et de l'objet. Prenez le double de l'angle correspondant, et vous aurez la différence des azimuths que vous cherchez.

Supposez pour un instant que vous faites face au pôle élevé, et remarquez si le vertical du soleil est à gauche ou à droite de ce pôle; remarquez également si l'objet dont vous avez pris la distance était à gauche ou à droite du vertical du soleil. Toutes les fois que le vertical du soleil sera à gauche du pôle élevé, et que l'objet se trouvera en même tems à gauche de ce vertical, ajoutez la différence des azimuths à l'azimuth du soleil. Ajoutez également ces mêmes quantités, lorsque le vertical du soleil étant à droite du pôle élevé, l'objet sera aussi à droite de ce vertical; mais si le soleil est à droite du pôle élevé, et que l'objet soit à gauche du même vertical et réciproquement, alors prenez la différence qui existe entre l'azimuth du soleil et la différence en azimuth qui résulte du calcul. L'azimuth de l'objet calculé d'après ces règles, sera toujours compté à partir du pôle élevé

et dans le même sens que l'azimuth du soleil : cette règle est générale, toutes les fois que l'on a pris la somme des résultats des deux calculs ; mais dans le cas où l'on aurait retranché l'un de l'autre, et que la différence des azimuths eût été plus grande que l'azimuth du soleil, alors l'azimuth de l'objet devrait être compté dans un sens contraire à celui du soleil, c'est-à-dire, que l'un serait vers l'Est et l'autre vers l'Ouest.

EXEMPLE.

Le 10 juillet 1792, à 7^h heures du matin, étant par $7°.31'$ de latitude Sud, et $153°.10'$ de longitude orientale, on a observé la hauteur du bord inférieur du soleil de $10°.30'$; au même instant on a pris la distance du sommet d'une montagne que l'on voyait dans l'éloignement, au bord le plus proche du soleil ; elle a été trouvée de $95°.16'$. Cette montagne se trouvait à gauche du vertical du soleil, et la hauteur observée de sa partie la plus élevée, était, à l'instant de l'observation, de $3°.20'$; l'élévation de l'œil de l'observateur était de $6^m,17$. On demande le relèvement de cette montagne.

Latitude *S.*	$7°.31'$
Longitude orientale	$153°.10'$
en tems	$10^h.37'$
Heure approchée du lieu	19 . 0
Heure de Paris	$8^h.23'$
Déclinaison du ☉	$22°.14'$ *N.*
Distance au pôle élevé	112 .14

Hauteur observée du ⊙	10°.30′
Élévation de l'œil 6m,17. Dépression	— 4
	10°.26′
Demi-diamètre du ⊙	+ 16
Hauteur apparente du ⊙	10°.42′
Réfraction	— 5
Hauteur vraie du ⊙	10°.37′
Distance au bord le plus proche du ⊙	95°.16′
Demi-diamètre du ⊙	+ 16
Distance au centre du ⊙	95°.32′
Hauteur de la montagne	3°.20′
Élévation de l'œil 6m,17. Dépression	— 4
Hauteur apparente de la montagne	3°.16′

Calcul de l'azimuth du ⊙.

Distance polaire du ⊙	112°.14′		
Hauteur vraie du ⊙	10 .37	com. cos.	0,00750
Latitude	7 .31	com. cos.	0,00375
Somme	130°.22′		
Demi-somme	65 .11	cos.	9,62296
Dist. pol. — Demi-somm.	47 . 3	cos.	9,83338
	Somme		19,46759
	Demi-somme	cos.	9,73379
	Demi-angle azimuthal		57°.12′

Double. Le soleil restait au *S*. . . . . 114°.24′ *E*.

Calcul de la différence des azimuths.

Distance apparente au ⊙.	95°.3′		
Hauteur apparente du ⊙.	10 .42	com. cos.	0,00762
Haut. appar. de la mont.	3 .16	com. cos.	0,00071
Somme.	109°.30′		
Demi-somme.	54 .45	cos.	9,76129
Dist. app. — Demi-somm.	40 .47	cos.	9,87920
Somme			19,64882
Demi-somme		cos.	9,82441
Demi-différence des azimuths,			48°. 8′
La mont. *à gauche* du vert. du ⊙. Diff. des azim.			96 .16
Le ⊙ *à gauche* du pôle élevé, restait au *S.*			114 .24 *E.*
Ajoutez. LA MONTAGNE restait au *S.*			210°.40′ *E.*
Retranchez 180°. ou au *N.*			30 .40 *O.*

La latitude est Sud dans cet exemple, par conséquent le pôle élevé, est le pôle Sud, et tous les relèvemens que l'on conclut immédiatement du calcul, doivent être comptés à partir de ce pôle. L'azimuth du soleil est 114°.24′, et parce que l'observation a été faite le matin, son relèvement est le Sud 114°.24′ Est ; le vertical du soleil était donc à gauche du pôle élevé. Mais la montagne se trouvait à l'instant de l'observation aussi à gauche du vertical du soleil ; dès-lors il faut ajouter ensemble l'azimuth du soleil et la différence des azimuths ; leur somme sera le relèvement de la montagne compté en partant du pôle Sud et en allant vers l'Est, ou

dans le même sens que l'on a compté l'azimuth du soleil. Dans ce cas-ci, la somme de ces deux quantités est 210°.40′; et elle est plus grande que 180°, ce qui fait connaître que la montagne est au-delà du pôle Nord, et à gauche de ce pôle; par conséquent il faut en retrancher 180°, le reste sera le relèvement de la montagne, ou le Nord 30°.40′ Ouest, comme on le voit ci-dessus.

144. Nous avons dit que l'on pouvait obtenir l'azimuth du soleil à 2′ près; la différence de l'azimuth de cet astre à celui d'un objet terrestre, peut être également calculée à 2 ou 3′ près. En conséquence, si l'on se conforme aux règles qui ont été données relativement aux circonstances où il faut faire l'observation, on aura la certitude que les relèvemens astronomiques résultans du calcul, ne seront pas affectés d'une erreur plus grande que 4 à 5 minutes.

145. Lorsque le soleil passe au méridien au-dessous de 60° de hauteur, il est possible d'obtenir, comme nous l'avons déja dit, le relèvement astronomique d'un objet terrestre, par une observation faite entre 10 heures et demie du matin et une heure et demie du soir. Ces relèvemens pourront même être observés très-près du passage du soleil au méridien. Dans ce cas, il faut compter les heures correspondantes aux distances du soleil à l'objet sur une montre à secondes dont on a observé l'avance ou le retard sur le tems vrai, quelque tems avant de prendre cette distance, ou quelque tems après l'avoir mesurée. L'avance ou le retard de la montre servira à trouver l'heure que l'on devait compter dans le lieu de l'observation d'angle horaire à l'instant où l'on a observé le relèvement astronomique. Il faudra, au moyen du chemin fait en longitude, rapporter cette heure

au lieu où l'on a observé le relèvement, et l'on obtiendra l'heure vraie correspondante à la distance du soleil à l'objet. Si cette distance a été prise avant le passage au méridien, on en prendra le complément à 24 heures ou à 12 heures, et l'on aura l'angle horaire du soleil; mais dans le cas où elle aurait été observée après midi, l'angle horaire sera égal à l'heure du lieu de l'observation. On calculera l'heure de Paris qui lui correspond au moyen de la longitude; cette heure servira à trouver la déclinaison du soleil, d'où on conclura sa distance au pôle élevé. La distance polaire du soleil, le complément de la latitude et l'angle horaire du soleil, sont les trois données qui servent à calculer l'azimuth : voici les règles que l'on doit suivre pour effectuer le calcul.

146. Écrivez la distance polaire du soleil, et placez au-dessous le complément de la latitude; prenez la somme de ces deux quantités, et immédiatement après leur différence. Écrivez à la suite la demi-somme et la demi-différence; au-dessous de la demi-différence, vous écrirez l'angle horaire, et vous en prendrez la moitié. Vous ajouterez ensemble le complément arithmétique du logarithme sinus de la demi-somme, le logarithme sinus de la demi-différence, et le logarithme de la cotangente du demi-angle horaire; la somme sera le logarithme de la tangente d'un arc que vous appellerez le premier angle. Vous écrirez à la droite de ces premiers logarithmes, le complément arithmétique du logarithme cosinus de la demi-somme, le logarithme du cosinus de la demi-différence et le logarithme de la cotangente du demi-angle horaire. Vous ajouterez pareillement ensemble ces trois logarithmes, vous aurez le logarithme de la tangente d'un second angle que vous chercherez dans les tables.

Il est à remarquer que ces deux calculs ont un logarithme commun, et qu'il ne faut réellement chercher dans les tables que cinq logarithmes. Le calcul se trouvera beaucoup abrégé, si l'on supprime les secondes de toutes les données, et si l'on ne prend le logarithme qu'avec cinq chiffres décimaux. On disposera ces données, comme on le voit dans l'exemple suivant; alors immédiatement après avoir pris le complément arithmétique du logarithme sinus de la demi-somme, on pourra prendre celui de son cosinus qui se trouve à côté; on prendra également le logarithme du cosinus de la demi-différence, immédiatement après avoir pris celui de son sinus.

Toutes les fois que le soleil passe au méridien du côté du pôle abaissé, ajoutez ensemble le 1er. et le 2me. angle que vous venez de calculer; leur somme sera l'azimuth du soleil, qui sera compté à partir du pôle élevé; c'est-à-dire, dans ce cas-ci, du côté opposé à celui du passage au méridien: il sera donc plus grand que 90°, et même approchera souvent de 180°.

Toutes les fois que le soleil passe au méridien du côté du pôle élevé, prenez la différence des deux angles que vous avez trouvée par le calcul; cette différence sera l'azimuth du soleil qui, alors, sera compté à partir du pôle élevé, c'est-à-dire, du côté où le soleil passe au méridien, et, dans ce cas, il sera toujours plus petit que 90°.

Vous calculerez la différence des azimuths du soleil et de l'objet dont vous avez observé la distance d'après les règles de l'art. 142, et vous conclurez l'azimuth de l'objet ou son relèvement, de la même manière que si vous aviez calculé l'azimuth du soleil par sa hauteur.

Les règles que l'on vient de donner vont être éclaircies dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

Le 17 juin 1792, étant par 22°.53′ de latitude Sud, et par 164°.43′ de longitude orientale ; lorsqu'une montre marquait 2ʰ.25′.31″, on a observé la distance du bord le plus proche du soleil au sommet le plus élevé de l'île des Pins, situé à l'extrémité Sud-Est de la Nouvelle Calédonie ; elle était de 85°.51′. L'île des Pins se trouvait à droite du vertical du soleil. La hauteur du bord inférieur du soleil au même instant, était de 43°.11′ ; celle de l'objet 5°.10′ ; l'œil de l'observateur était élevé de 6ᵐ,17 au-dessus de la surface de la mer.

On avait reconnu, par des observations de la hauteur du soleil faites dans la matinée, que la montre avançait sur le tems vrai de 2ʰ.2′.27″ ; le lieu de l'observation du relèvement se trouvait de 2′ de degré, ou de 8 secondes de tems, dans l'Ouest du lieu où l'on avait observé l'angle horaire.

Heure à la montre	2ʰ.25′.31″
Avance sur le tems vrai. *Retranchez* . . .	2 . 2 . 27
Heure du lieu de l'angle horaire . . . . :	0ʰ.23′. 4″
Le lieu du relèvement à l'*O.* de	— 8
Tems vrai du relèvement, ou angle horaire.	0ʰ.22′.56″
Angle horaire en degrés.	5°.44′

Latitude *S.*	22°.53′
Complément de la latitude	67 . 7
Longitude orientale	164 .43
Longitude en tems	10 .59
Heure du relèvement	0 .23
Heure de Paris	13ʰ.24′
Déclinaison du ⊙ *N.*	23°.25′
Distance du ⊙ au pôle élevé	113 .35
Hauteur observée du ⊙	43°.11′
Élévation de l'œil 6ᵐ,17. Dépression	— 4
	43°. 7′
Demi-diamètre du ⊙	+ 16
Hauteur apparente du ⊙	43°.23′
Distance au bord le plus proche du ⊙	85°.51′
Demi-diamètre du ⊙	+ 16
Distance au centre du ⊙	86°. 7′
Hauteur observée de la montagne	5°.10′
Élévation de l'œil 6ᵐ,17. Dépression	— 4
Hauteur apparente de la montagne	5°. 6′

Calcul de l'azimuth du soleil.

Dist. du ⊙ au pôle élevé.	113°.25			
Complém. de la latit. . .	67 . 7′			
Somme	180°.32′			
Différence	46 .18			
Demi-somme	90°.16′	com. sin. 0,00009	com. cos.	2,33216
Demi-différence	23 . 9	sin. 9,59455	cos.	9,96354
Angle horaire	5 .44			
Demi-angle-horaire. . .	2 .52	cotang. 1,30038	cotang.	1,30038
		tang. 0,89493	tang	3,59608
		1er. ang. 82°.44′	2e. ang.	89°,59′
			1er. ang.	82 .44

Le soleil passe au méridien du côté du pôle abaissé. *Ajoutez.* 172°.43′
Le soleil restait au *S.* . . . . . 172 .43′ *O.*

Calcul de la différence des azimuths.

Distance apparente au ⊙.	86°. 7′		
Hauteur apparente du ⊙.	43 .23	com. cos.	0,13860
Haut. appar. de la mont.	5 . 6	com. cos.	0,00172
Somme	134°.36′		
Demi-somme.	67 .18	cos.	9,58648
Dist. app. — Demi-somm.	18 .49	cos.	9,97615
Somme			19,70295
Demi-somme.		cos.	9,85147
Demi-différence des azimuths.			44°.44′

La mont. A DROITE *du vert.* du ⊙. Diff. des azim. 89 .28
Le ⊙ A DROITE *du pôle élevé*, restait au *S.* . . . 172 .43 *O.*

AJOUTEZ. La montagne restait au *S.* 262°.11′ *O.*
Retranchez 180°. ou au *N.* 82 .11 *E.*

L'observation a été faite après midi, par conséquent le soleil était à droite du pôle Sud, qui, dans ce cas-ci, était le pôle élevé; mais la montagne était aussi à droite du vertical du soleil, il faut donc ajouter ensemble l'azimuth du soleil et la différence des azimuths. La somme de 262°.11′ est un arc compté à partir du pôle Sud, en allant vers l'Ouest, ou dans le même sens que l'azimuth du soleil. Cet arc étant plus grand que 180°, doit se terminer au-delà du Nord. Il faut donc retrancher 180° de la somme qu'on vient de trouver; alors le véritable relèvement de la montagne est le Nord 82°.11′ Est, comme on l'a vu ci-dessus.

147. Les relèvemens astronomiques observés aux environs de midi, ne sont pas, en général, susceptibles d'une aussi grande précision que ceux qui résultent d'une observation faite lorsque le soleil est peu élevé sur l'horison; mais ils sont toujours préférables aux relèvemens observés avec une boussole, pourvu toutefois que l'on se conforme aux règles qui ont été données, art. 141, relativement aux circonstances dans lesquelles cette observation doit être faite. Lorsque le soleil ne sera pas élevé de plus de 40°, l'erreur dont ils pourront être affectés ne sera jamais de plus de 6′ à 8′; et, si la hauteur du soleil approche de 60°, elle ne dépassera jamais 12 ou 14 minutes. Il est utile cependant de remarquer que ces erreurs seront, la plupart du tems, beaucoup au-dessous de l'évaluation qui vient d'en être faite.

148. Lorsqu'on veut employer les relèvemens astronomiques à la construction des cartes hydrographiques ou marines, il faut choisir l'objet de la côte le mieux terminé et le plus avantageusement situé, par rapport au vertical du soleil, et observer son relèvement. Pendant que

l'on fera cette observation, plusieurs observateurs mesureront, avec des instrumens à réflexion, les distances angulaires de l'objet relevé à tous les autres objets que l'on veut placer sur la carte. Il sera facile de conclure de tous ces angles, le relèvement de chaque objet en particulier. Les erreurs des distances angulaires mesurées avec des octans ou avec des sextans les plus ordinaires, ne seront jamais de plus de 1′ ou 2′. Tous les relèvemens observés de cette manière, auront donc, à peu de chose près, la précision du relèvement astronomique d'où ils ont été conclus ; et les cartes construites avec des relèvemens de cette espèce, auront par conséquent une très-grande exactitude.

149. Les circonstances ne permettent pas toujours d'observer des relèvemens astronomiques ; alors on est forcé de relever les objets avec une boussole, mais il faut, dans ce cas, suivre la méthode qui va être indiquée : elle jouit de l'avantage de remédier à une partie des imperfections dont les relèvemens faits avec la boussole sont susceptibles. Je suppose, dans tout ce qui va être dit, que l'on ait déterminé la déclinaison de l'aiguille aimantée, le plus exactement qu'il est possible, par un des moyens qui ont été enseignés dans ce chapitre. Choisissez un objet bien distinct et assez éloigné pour que son relèvement ne puisse pas changer sensiblement pendant le peu de tems que doit durer l'observation : les objets que l'on voit à-peu-près de l'avant ou de l'arrière du vaisseau, sont ceux qui doivent être préférés. Observez d'abord avec une boussole le relèvement de l'objet que vous avez choisi ; ensuite dérangez les pinnules et prenez un second relèvement. Vous ferez de la sorte, trois ou quatre observations, et vous obtiendrez, par le milieu de tous les relèvemens observés, un dernier relèvement

qui aura bien plus de précision, que si vous vous étiez contentés de faire une seule observation. Tandis que l'on prend ce relèvement, d'autres observateurs doivent mesurer, avec des instrumens à réflexion ; comme dans le cas précédent, les distances angulaires de l'objet relevé à tous les autres objets qu'on veut placer sur la carte ; ces angles feront connaître le relèvement de chacun des objets en particulier. Les distances angulaires peuvent être considérées comme très-exactes ; dès-lors les erreurs de tous les relèvemens seront à peu-près les mêmes, et auront en conséquence peu d'influence sur les positions relatives que l'on doit conclure de tous ces relèvemens.

NOTES.

Il n'a été question, dans le Traité précédent, que de la manière de faire les observations astronomiques lorsqu'on est en mer ; et l'on n'a parlé avec quelqu'étendue que des moyens de les calculer. On a cependant cru devoir ajouter aux règles qui y ont été prescrites, des éclaircissemens propres à en faciliter l'application. C'est dans cette vue que l'on a tâché d'expliquer, par des raisonnemens simples, et qui pussent être à la portée de toutes les classes de lecteurs, les diverses règles qui dérivent des premières notions de la sphère ; mais il a été indispensable de renvoyer à la fin de l'Ouvrage, la démonstration de celles qui tiennent à la théorie plus compliquée de la résolution des triangles sphériques. C'est ici le lieu de remplir l'engagement que nous avons pris de les donner. Nous ferons connaître comment l'on parvient à trouver les formules d'après lesquelles on doit faire les différens calculs dont nous avons donné des exemples ; ensuite nous développerons les principes de la construction des nouvelles tables destinées à rapporter une hauteur prise dans un lieu quelconque, à un autre lieu peu éloigné du premier, et situé sur le même méridien. On ne verra peut-être pas sans intérêt, l'usage que l'on pourrait faire des mêmes tables pour corriger les hauteurs observées de la lune et du soleil, afin d'obtenir la distance réduite de ces deux astres, dans l'hypothèse que la terre est un sphéroïde applati vers les pôles. Nous donnerons enfin la démonstration d'une méthode assez simple, et dont nous avons eu occasion de parler, qui peut servir à calculer l'inclinaison du rayon visuel, lors-

qu'il va aboutir au pied d'une côte par laquelle l'horison se trouve borné. On pourra juger, après en avoir pris connaissance, de la valeur des motifs qui nous ont engagés à n'en faire aucun usage.

Soit *ZHNO* le méridien, *Z* le zénith, et *HO* l'horison. Si *P* est le pôle élevé et *EQ* l'équateur, l'arc *PO* sera égal à la latitude, *ZP* sera son complément à 90°. Je suppose que le soleil soit au point *S* du parallèle à l'équateur *RV*, l'arc *PS* sera la distance du soleil au pôle élevé, et l'arc *SI* sera sa hauteur ; par conséquent *SZ*, qui est la distance de cet astre au zénith, sera le complément de la hauteur. Le triangle *ZPS* est formé par la distance polaire *SP*, et par les côtés *ZP* et *ZS*, qui sont les compléments de la latitude et de la hauteur. On doit remarquer que l'angle *ZPS*, formé par le cercle de déclinaison *SP* et le méridien, est l'angle horaire de l'astre *S* ; l'angle *PZS* formé par le vertical et le méridien, est l'azimuth ; enfin l'angle *ZSP* formé par le vertical *ZS* et le cercle de déclinaison *PS*, est l'angle de variation. Soit que l'on veuille connaître l'angle horaire ou l'azimuth d'un astre par l'observation de sa hauteur, soit que l'on veuille calculer la hauteur avec l'angle horaire, ainsi que la latitude avec l'angle de variation, il est nécessaire de résoudre le triangle *ZSP*.

Nommons *H* la hauteur *SI* de l'astre, *D* sa distance au pôle élevé, *L* la latitude *PO*, *h* l'angle horaire *ZPS*, *A* l'azimuth *PZS*, et *V* l'angle de variation *ZSP*, on aura les dénominations de toutes les parties du triangle *ZPS* ; ce sont celles dont nous ferons usage dans les calculs suivans.

La trigonométrie enseigne à trouver un grand nombre de formules différentes, qui toutes seraient propres à calculer une de ces six quantités, lorsqu'on en connaît trois autres. Nous avons choisi parmi les méthodes connues, celles qui sont généralement regardées comme les plus simples ; et si nous avons cherché à en introduire de nouvelles, ce n'est que parce qu'elles nous ont paru encore plus propres que les anciennes à simplifier les calculs, ou à rendre les opérations plus uniformes.

NOTE Ire.

Calcul de l'angle horaire (*).

On a généralement, dans le triangle ZPS,

$$\cos ZPS = \frac{\cos ZS - \cos PZ \cdot \cos PS}{\sin PZ \cdot \sin PS};$$

mais $ZPS = h$, $ZS = 90^\circ - H$, $PZ = 90^\circ - L$ et $PS = D$; on aura donc l'équation suivante :

$$\cos h = \frac{\sin H - \sin L \cdot \cos D}{\cos L \cdot \sin D}.$$

D'après les règles de la trigonométrie,

$$\cos h = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} h,$$

et $$\sin L \cdot \cos D = \sin (L + D) - \cos L \cdot \sin D.$$

Substituant dans l'équation précédente, au lieu de $\cos h$ et de $\sin L \cdot \cos D$, leurs valeurs, on aura

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} h = \frac{\sin (L + D) - \sin H}{\cos L \cdot \sin D}.$$

Mais

$$\sin (L + D) - \sin H = 2 \cos \tfrac{1}{2} (L + D + H) \cdot \sin \tfrac{1}{2} (L + D - H);$$

d'où il suit que

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} h = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (L + D + H) \cdot \sin \tfrac{1}{2} (L + D - H)}{\cos L \cdot \sin D};$$

(*) *Voy.* art. 75.

bien

$$\sin \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{L+D+H}{2}\right)\sin\left(\frac{L+D+H}{2} - H\right)}{\cos L \,.\, \sin D}}.$$

Les règles de l'art. 75 sont tirées de cette formule, qui est de *Borda*. On est obligé de chercher le même nombre de logarithmes, que par les autres méthodes; mais la préparation du calcul est un peu plus simple.

NOTE II.

Calcul de la hauteur (*).

L'ÉQUATION du problème précédent,

$$\cos h = \frac{\sin H - \sin L \,.\, \cos D}{\cos L \,.\, \sin D},$$

nous donne

$$\sin H = \sin L \,.\, \cos D + \cos h \,.\, \cos L \,.\, \sin D;$$

mais $\cos h = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} h - 1$, et substituant cette valeur dans l'équation, on a

$$\sin H = \sin L \,.\, \cos D + 2\cos^2 \tfrac{1}{2} h \,.\, \cos L \,.\, \sin D - \cos L \,.\, \sin D;$$

ou bien

$$\sin H = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} h \,.\, \cos L \,.\, \sin D - \sin (D - L).$$

D'un autre côté,

$$\sin H = 1 - 2\cos^2 \tfrac{1}{2} (90^\circ + H),$$

et

$$\sin (D - L) = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} (90^\circ - D - L) - 1.$$

(*) *Voy.* art. 80.

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on a

$$\overline{\cos}^2 \tfrac{1}{2}(90^\circ + H) = \overline{\cos}^2 \tfrac{1}{2}(90^\circ - \overline{D - L}) - \overline{\cos}^2 \tfrac{1}{2} h . \cos L . \sin D ;$$

d'où l'on tire

$$\sin M = \frac{\cos \tfrac{1}{2} h . \sqrt{\cos L . \sin D}}{\cos \tfrac{1}{2}(90^\circ - \overline{D - L})},$$

et

$$\cos \tfrac{1}{2}(90^\circ + H) = \cos \tfrac{1}{2}(90^\circ - \overline{D - L}) \cos M.$$

Borda a donné dans son *Traité du Cercle à réflexion*, les formules suivantes pour résoudre le même problème.

$$\text{tang } M = \frac{\sin \tfrac{1}{2} h . \sqrt{\cos L . \sin D}}{\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - \overline{L + D})},$$

et

$$\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - H) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - \overline{L + D})}{\cos M}.$$

On doit d'abord remarquer que $\sin \frac{1}{2}(90^\circ - H) = \cos \frac{1}{2}(90^\circ + H)$; mais on conclut plus facilement la hauteur de $\frac{1}{2}(90^\circ + H)$ que de $\frac{1}{2}(90^\circ - H)$, et c'est un des avantages de la formule que nous avons adoptée. Ensuite, d'après la disposition du calcul, on obtient aussi plus promptement $\cos \frac{1}{2}(90^\circ - \overline{D - L}) \times \cos M$ que . . . $\frac{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - \overline{L + D})}{\cos M}$; notre méthode simplifie donc un peu les opérations.

NOTE III.

Calcul de la latitude par deux hauteurs du soleil prises hors du méridien, et par l'intervalle de tems écoulé entre les observations (*).

Soit S, *fig.* 1 et 2, le lieu du soleil lors de l'observation de la petite hauteur, S' le lieu du soleil à l'instant de l'observation de la grande. Imaginons que les deux lieux du soleil soient joints par un arc de grand cercle SS'; conservons les dénominations que nous avons adoptées, et nommons de plus H' la grande hauteur $S'I'$, et t l'intervalle de tems écoulé entre les observations, réduit en degrés. L'angle SPS', formé par les deux cercles de déclinaison PS et PS', est égal à t, et l'arc de grand cercle SS' est la distance des lieux du soleil.

Cela posé, dans le triangle SPS', que l'on suppose isocèle pour abréger les opérations, on calcule la distance SS' et le premier angle au soleil PSS', formé par cette distance et le cercle de déclinaison correspondant à la petite hauteur. On connaît dans le triangle ZSS', les trois côtés, dont l'un est la distance des lieux du soleil, et les deux autres sont les complémens des deux hauteurs observées; il est donc possible de calculer le second angle au soleil ZSS', formé par le cercle de distance et le vertical du soleil, lors de l'observation de la petite hauteur. La différence des deux angles au soleil $PSS' - ZSS'$ *fig.* 1, ou leur somme $PSS' + ZSS'$, *fig.* 2, est l'angle de variation ZSP du triangle ZPS, qui sert à calculer le côté ZP, ou la latitude.

Distance des lieux au soleil, et premier angle au soleil. Si l'on suppose que les deux déclinaisons soient les mêmes, les côtés PS et PS' seront égaux, et le triangle PSS' sera isocèle; alors on a, par les règles ordinaires de la trigonométrie,

(*) *Voy.* art. 67.

$$\sin \tfrac{1}{2} SS' = \sin \tfrac{1}{2} t \,.\, \sin D,$$

et

$$\text{tang } PSS' = \frac{\cot \tfrac{1}{2} t}{\cos D}.$$

Ce sont ces deux équations qui servent à calculer la distance SS' et le premier angle au soleil PSS'.

Deuxième angle au soleil. Dans le triangle ZSS', on a l'équation

$$\cos ZSS' = \frac{\cos ZS' - \cos ZS \,.\, \cos SS'}{\sin ZS \,.\, \sin SS'}.$$

Si l'on emploie les dénominations que l'on a adoptées, elle devient

$$\cos ZSS' = \frac{\sin H' - \sin H \,.\, \cos SS'}{\cos H \,.\, \sin SS'};$$

mais

$$\cos ZSS' = 1 - 2 \overline{\sin}^2 \tfrac{1}{2} ZSS'$$

et

$$\sin H \,.\, \cos SS' = \sin (H + SS') - \cos H \,.\, \sin SS'.$$

substituant ces valeurs de ces ZSS' et de $\sin H \,.\, \cos SS'$ dans l'équation précédente, on a, toutes réductions faites,

$$2 \overline{\sin}^2 \tfrac{1}{2} ZSS' = \frac{\sin (H + SS') - \sin H'}{\cos H \,.\, \sin SS'}.$$

On a aussi

$$\sin (H + SS') - \sin H' = 2 \cos \tfrac{1}{2} (H + SS' + H') \sin \tfrac{1}{2} (H + SS' - H'),$$

donc

$$2 \overline{\sin}^2 \tfrac{1}{2} ZSS' = \frac{2 \cos \tfrac{1}{2} (H + SS' + H') \sin \tfrac{1}{2} (H + SS' - H')}{\cos H \,.\, \sin SS'};$$

ou bien

$$\sin \tfrac{1}{2} ZSS' = \sqrt{\frac{\cos \left(\frac{H + SS' + H'}{2} \right) \sin \left(\frac{H + SS' + H'}{2} - H' \right)}{\cos H \,.\, \sin SS'}}.$$

Cette formule, par laquelle on trouve le deuxième angle au soleil, est analogue à celle qui sert au calcul de l'angle horaire. Les données doivent être disposées de la même manière, et la préparation du calcul doit être aussi simple.

Latitude. Le triangle ZSP nous donne

$$\cos PSZ = \frac{\cos ZP - \cos PS . \cos ZS}{\sin PS \text{ s.n } ZS},$$

ou

$$\cos V = \frac{\sin L - \cos D . \sin H}{\sin D . \cos H},$$

d'où l'on tire

$$\sin L = \cos V . \sin D . \cos H + \cos D . \sin H.$$

On sait que $\cos V = 2\cos^2 \frac{1}{2} V - 1$, et en substituant cette valeur, on a

$$\sin L = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} V . \sin D . \cos H - \sin (D - H);$$

mais

$$\sin L = 1 - 2\cos^2 \tfrac{1}{2} (90° + L),$$

et

$$\sin (D - H) = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} (90° - D - H) - 1.$$

Substituant ces valeurs de $\sin L$ et de $\sin (D - H)$, on aura

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} (90° + L) = \cos^2 \tfrac{1}{2} (90° - D - H) - \cos^2 \tfrac{1}{2} V . \sin D . \cos H;$$

d'où l'on tire

$$\sin M = \frac{\cos \frac{1}{2} V . \sqrt{\sin D . \cos H}}{\cos \frac{1}{2} (90° - D - H)},$$

et

$$\cos \tfrac{1}{2} (90° + L) = \cos \tfrac{1}{2} (90° - D - H) \cos M.$$

Cette formule est analogue à celle qui sert à calculer la hauteur, et jouit, par conséquent, des mêmes avantages.

NOTE IV.

Calcul de la distance vraie de la lune au soleil ou à une étoile (*).

Soit Z le zénith, *fig.* 3, ZH le vertical de la lune, et ZO celui du soleil. Si L est le lieu apparent de la lune et L' le lieu vrai, de même si S est le lieu apparent du soleil et S' le lieu vrai, SL sera la distance apparente et $S'L'$ la distance vraie. Nommons H la hauteur apparente HL de la lune et H' sa hauteur vraie; B la hauteur apparente du soleil et B' sa hauteur vraie; Δ la distance apparente et x la distance vraie que l'on cherche.

Cela posé, dans le triangle LZS, formé par la distance apparente des deux astres et par la distance apparente de chaque astre au zénith, on a

$$\cos Z = \frac{\cos \Delta - \sin H . \sin B}{\cos H . \cos B}.$$

Dans le triangle $L'ZS'$ des hauteurs vraies et de la distance vraie, on a

$$\cos Z = \frac{\cos x - \sin H' . \sin B'}{\cos H' . \cos B'},$$

donc

$$\frac{\cos \Delta - \sin H . \sin B}{\cos H . \cos B} = \frac{\cos x - \sin H' . \sin B'}{\cos H' . \cos B'};$$

mais

$$\sin H . \sin B = \cos H . \cos B - \cos . (H + B),$$

et

$$\sin H' . \sin B' = \cos H' . \cos B' - \cos (H' + B').$$

Substituant ces valeurs de $\sin H . \sin B$ et de $\sin H' . \sin B'$, on aura

(*) *Voy.* art. 113.

$$\frac{\cos\Delta + \cos(H+B)}{\cos H.\cos B} = \frac{\cos x + \cos.(H'+B')}{\cos H'.\cos B'},$$

et

$$\cos x = \frac{\cos H'.\cos B'}{\cos H.\cos B}\left[\cos\Delta + \cos(H+B)\right] - \cos(H'+B').$$

On sait que

$$\cos\Delta + \cos(H+B) = 2\cos\tfrac{1}{2}(H+B+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(H+B-\Delta),$$

$$\cos(H'+B') = 2\overline{\cos}^{2}\tfrac{1}{2}(H'+B') - 1,$$

$$\cos x = 1 - 2\overline{\sin}^{2}\tfrac{1}{2}x.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation, on aura

$$\overline{\sin}^{2}\tfrac{1}{2}x = \overline{\cos}^{2}\tfrac{1}{2}(H'+B') - \frac{\cos\frac{1}{2}(H+B+\Delta)\cos\frac{1}{2}(H+B-\Delta)\cos H'\cos B'}{\cos H.\cos B}.$$

Faisons à présent

$$\sin M = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(H+B+\Delta)\cos\frac{1}{2}(H+B-\Delta)\cos H'.\cos B'}{\cos H.\cos B}} : \cos\tfrac{1}{2}(H'+B');$$

nous aurons enfin

$$\sin\tfrac{1}{2}x = \cos\tfrac{1}{2}(H'+B')\cos M.$$

Cette formule est connue sous le nom de *Borda*; elle est la plus généralement usitée, lorsqu'on fait usage des tables de logarithmes ordinaires.

NOTE V.

Calcul de l'azimuth et de l'amplitude du soleil (*).

Le triangle ZSP, *fig.* 1 et 2, nous donne l'équation

$$\cos PZS = \frac{\cos PS - \cos PZ.\cos SZ}{\sin PZ.\sin SZ},$$

ou

$$\cos A = \frac{\cos D. - \sin L.\sin H}{\cos L.\cos H};$$

mais

$$\cos A = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A - 1,$$

et

$$\sin L.\sin H = \cos L.\cos H - \cos(L+H).$$

Substituant ces valeurs de $\cos A$ et de $\sin L.\sin H$ dans l'équation précédente, on a

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos D. + \cos(L+H)}{\cos L.\cos H}.$$

D'après les règles connues,

$$\cos D + \cos(L+H) = 2\cos \tfrac{1}{2}(D+L+H)\cos \tfrac{1}{2}(L+H-D),$$

on aura donc

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(D+L+H)\cos \tfrac{1}{2}(L+H-D)}{\cos L.\cos H},$$

ou bien

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{D+L+H}{2}\right)\cos\left(\frac{D+L+H}{2} - D\right)}{\cos L.\cos H}}.$$

(*) *Voy.* art. 132.

Cette formule est tirée du Traité du cercle à réflexion. On voit à l'inspection des *fig.* 1 et 2, que l'angle PZS est toujours formé par le vertical du soleil et la partie du méridien qui est du côté du pôle élevé. Ainsi l'azimuth calculé A doit, dans tous les cas, être compté à partir du pôle élevé sur l'horison, comme nous l'avons dit art. 132.

Reprenons l'équation

$$\cos A = \frac{\cos D - \sin L . \sin H}{\cos L . \cos H}.$$

Supposons que le soleil est à l'horison, alors H et $\sin H$ deviennent égaux à zéro, $\cos H = 1$, et l'on a

$$\cos A = \frac{\cos D}{\cos L}.$$

Si l'on emploie la déclinaison d au lieu de la distance polaire, on a $\sin d = \cos D$. D'un autre côté, $90^\circ - A$ ou $A - 90$ est l'amplitude de l'astre, on aura donc

$$\sin \text{amplitude} = \frac{\sin d}{\cos L}.$$

C'est cette formule qui nous a servi à calculer l'amplitude du soleil (*voy.* art. 136).

Les règles que nous avons données, art. 146, pour calculer l'azimuth du soleil par le moyen de l'angle horaire, dérivent de deux analogies de *Néper*, très-connues, et qui servent à calculer un des angles d'un triangle sphérique, lorsque l'on connaît deux côtés et l'angle compris entre ces côtés. En effet, *fig.* 1 et 2, dans le triangle PZS, connaissant l'angle $ZPS = h$, le côté $PZ = 90^\circ - L$ et le côté $PS = D$, on a

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A \sim V) = \cot \tfrac{1}{2} h \, \frac{\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - L \sim D)}{\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - L + D)},$$

et

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A + V) = \cot \tfrac{1}{2} h \, \frac{\cos \tfrac{1}{2}(90^\circ - L \sim D)}{\cos \tfrac{1}{2}(90^\circ - L + D)}.$$

Lorsque le soleil passe au méridien du côté du pôle abaissé, *fig.* 1, A est plus grand que V, et l'on aura

$$A = \tfrac{1}{2}(A - V) + \tfrac{1}{2}(A + V),$$

c'est-à-dire que l'azimuth est égal à la somme du premier et du second angle.

Si le soleil passe au méridien du côté du pôle élevé, *fig.* 2, A est au contraire plus petit que V, et l'on aura

$$A = \tfrac{1}{2}(A + V) - \tfrac{1}{2}(V - A),$$

c'est-à-dire, que l'azimuth est égal à la différence du premier et du second angle. On doit s'appercevoir, à l'inspection des *fig.* 1 et 2, que l'angle A est toujours compté comme dans les calculs précédens, à partir du pôle élevé.

NOTE VI.

Calcul de la différence qui existe entre l'azimuth du soleil et l'azimuth d'un objet terrestre (*).

Soit S le lieu apparent du soleil, M le sommet d'une montagne dont on a observé la distance SM au soleil. Nommons Δ cette distance apparente SM, H la hauteur apparente SH du soleil, et O la hauteur apparente de l'objet M; soit de plus Z la différence des azimuths, ou l'angle SZM. Dans le triangle ZSM, nous avons

$$\cos SZM = \frac{\cos SM - \cos ZS \cos ZM}{\sin ZS . \sin ZM},$$

ou bien

$$\cos Z = \frac{\cos \Delta - \sin H . \sin O}{\cos H . \cos O};$$

(*) *Voy.* art. 142.

mais

$$\cos Z = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} Z - 1,$$

et

$$\sin H . \sin O = \cos H . \cos O - \cos (H + O).$$

Substituant ces valeurs, on a

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} Z = \frac{\cos \Delta - \cos (H + O)}{\cos H . \cos O}.$$

D'après les règles de la trigonométrie,

$$\cos \Delta - \cos (H + O) = 2 \cos \tfrac{1}{2} (\Delta + H + O) \cos \tfrac{1}{2} (H + O - \Delta),$$

on aura donc

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} Z = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (\Delta + H + O) \cos \tfrac{1}{2} (H + O - \Delta)}{\cos H . \cos O};$$

et enfin

$$\cos \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\cos \left(\frac{\Delta + H + O}{2} \right) \cos \left(\frac{\Delta + H + O}{2} - \Delta \right)}{\cos H . \cos O}}.$$

Cette dernière formule est de *Borda*; elle est analogue à celle qui sert à calculer l'azimuth du soleil, au moyen de la hauteur. Les quantités que l'on cherche pour en conclure le relèvement astronomique d'un objet quelconque, pourront donc être obtenues, la plupart du tems, par deux calculs à-peu-près semblables.

NOTE VII.

Principes de la construction des tables destinées à trouver la correction de la plus petite des deux hauteurs prises hors du méridien, pour obtenir la latitude.

Soit A l'azimuth, L la latitude et H la hauteur du soleil. Si δH est le changement en hauteur correspondant à une petite différence δL dans la latitude, on a, par les règles connues, ... $\delta H = \mp \delta L . \cos A$; le signe *moins* quand le soleil passe au méridien du côté du pôle abaissé, et le signe *plus* quand il y passe du côté du pôle élevé. En effet, dans le premier cas, *fig.* 1, l'angle A est plus grand que 90°, et son cosinus est négatif; dans le second cas, *fig.* 2, l'angle A est plus petit que 90°, et son cosinus est positif. A présent, si l'on considère l'effet que le changement en latitude doit produire sur la hauteur méridienne, on verra que l'erreur des hauteurs, lorsque le soleil est hors du méridien, a lieu dans le même sens que celle de la hauteur méridienne; dès lors, si l'on compte l'azimuth A à partir du côté où le soleil passe au méridien, on aura toujours $\delta H = diff.\ haut.\ mérid. \times \cos A$. Lorsque le changement en latitude tend à augmenter la hauteur méridienne, il faut ajouter δH à la hauteur observée, et le retrancher dans le cas contraire. Si A est plus grand que 90°, cos A devient négatif; alors δH doit être employé avec un signe différent de celui de la variation de la hauteur méridienne. On peut faire disparaître cette dernière distinction de cas, en employant au lieu de cos A sa valeur $1 - \text{sin ver.}\ A$, et l'on aura $\delta H = diff.\ haut.\ mérid. - diff.\ haut.\ mérid. \times \text{sin ver.}\ A$. Toutes les fois que A sera plus petit que 90°, sin ver. A sera plus petit que l'unité, et la correction sera positive. Lorsque A sera plus grand que 90°, sin ver. A sera aussi plus grand que l'unité, et la correction sera négative. Les tables XII et XIII sont destinées à calculer le sinus verse de A, en supposant que cet angle, comme on vient de le dire, est compté à partir du côté où le soleil passe au méridien.

Au lieu de la distance polaire dont nous avons fait usage jusqu'à présent, employons la déclinaison du soleil, et nommons d cet élément. Le triangle PZS, *fig.* 1, nous donne

$$\cos A = \frac{\sin d - \sin L . \sin H}{\cos L . \cos H},$$

ou

$$\text{sin ver. } A = \frac{\cos (L \sim H) - \sin d}{\cos L . \cos H}.$$

Lorsque la déclinaison est de différente dénomination que la latitude, sin d change de signe; on aura donc généralement

$$\text{sin ver. } A = \frac{\cos (L \sim H)}{\cos L . \cos H} \mp \frac{\sin d}{\cos L . \cos H}.$$

Le signe supérieur quand la déclinaison est de même dénomination que la latitude, et le signe inférieur quand elle est de dénomination différente.

La page de la table XII, qui est à gauche, contient le premier terme $\frac{\cos (L \sim H)}{\cos L . \cos H}$; il faut le chercher avec la latitude L et la hauteur H. La seconde page de la droite contient, sous le nom d'argument, la valeur du dénominateur $\cos L . \cos H$; et c'est avec cet argument et la déclinaison que l'on trouve, dans la table XIII, le second terme $\frac{\sin d}{\cos L . \cos H}$.

L'angle A que l'on obtiendrait par le calcul de la formule précédente, serait compté à partir du pôle élevé; mais d'après ce qui vient d'être dit, il est nécessaire d'obtenir l'azimuth compté, dans tous les cas, à partir du côté où le soleil passe au méridien, qui est tantôt celui du pôle élevé et tantôt celui du pôle abaissé; on y est parvenu de la manière suivante :

Faisons, pour abréger,

$$\frac{\cos (L \sim H)}{\cos L . \cos H} = P \quad \text{et} \quad \frac{\sin d}{\cos L . \cos H} = S,$$

on aura sin ver. $A = P \mp S$.

Si la déclinaison et la latitude sont de même dénomination, et que la déclinaison soit plus grande que la latitude, le soleil passe au méridien du côté du pôle élevé; alors on a

$$\text{sin ver.}\, A = P - S.$$

Lorsqu'on aura trouvé P et S par les règles de l'art. 40, il faudra retrancher le second terme du premier.

Dans le cas où la latitude est plus grande que la déclinaison, le soleil passe au méridien du côté du pôle abaissé, et le sinus verse de l'azimuth, compté à partir de ce pôle, est $2 -$ sin ver. A; on aura donc

$$2 - \text{sin ver.}\, A = 2 - P + S = \overline{2 + S} - P.$$

Il faudra retrancher le premier terme du second, augmenté de deux unités, ainsi que nous l'avons recommandé.

Lorsque la déclinaison est de différente dénomination que la latitude, le soleil passe au méridien du côté du pôle abaissé, et l'on a

$$2 - \text{sin ver.}\, A = 2 - P - S = \overline{2 - S} - P.$$

Dans la seconde partie de la table XIII, où la déclinaison doit être de différente espèce que la latitude, on a écrit $2 - S$ au lieu de S; par ce moyen, il faut retrancher le premier terme du second, mais il n'est pas nécessaire d'augmenter le second terme de deux unités.

Ce que nous avons appelé le multiplicateur du chemin fait en latitude, est donc le sinus verse de l'azimuth du soleil compté à partir du côté du passage du méridien : on trouvera dans la table XIV, l'arc qui lui correspond.

Les tables XII et XIII peuvent aussi servir à corriger les hauteurs observées en même tems que la distance apparente de la lune au soleil ou à une étoile, dans le cas où l'on voudrait obtenir la distance réduite de ces deux astres, dans l'hypothèse que la terre est un sphéroïde applati vers les pôles. En effet, d'après ce qui a été dit art. 122, il suffit de calculer les hauteurs avec la latitude du lieu de l'observation de distance, diminuée de l'angle à la verticale. Dès lors, si les hauteurs ont été obtenues directement par l'observation,

il faut y ajouter ou en retrancher les quantités dont elles auraient dû être plus grandes ou plus petites, en vertu d'une diminution dans la latitude, qui serait égale à l'angle à la verticale. Afin de rendre uniforme l'usage des tables XII et XIII, il sera nécessaire de considérer si une diminution dans la latitude du lieu des observations de distances, tend à augmenter ou à rendre plus petite la hauteur méridienne de l'astre dont on veut corriger la hauteur. Ensuite, on opérera, relativement à l'angle à la verticale, absolument de la même manière que nous avons recommandé de le faire à l'égard du changement en latitude qui a eu lieu entre les observations de hauteurs prises hors du méridien pour obtenir la latitude. On obtiendra, dans ce cas, des hauteurs corrigées, qui procureront la distance vraie des deux astres, dans l'hypothèse que la terre est un sphéroïde applati vers les pôles.

NOTE VIII.

Moyens de calculer l'inclinaison du rayon visuel qui va aboutir au pied d'une côte par laquelle l'horison se trouve borné.

Soit AO une portion de la surface du globe, et A le point du rivage qui borne l'horison dans le vertical d'un astre quelconque. Si du point B, qui est élevé d'une quantité égale à BO, on observe la hauteur de cet astre, et qu'on fasse coïncider son image réfléchie avec le point A, l'inclinaison du rayon visuel BA, qu'il s'agit de trouver, sera égale à l'angle LBA, que ce rayon visuel fait avec la ligne horisontale LB. Lorsque la distance AB, ou l'arc AO, sont inconnus, il faut se procurer l'angle LBA de la manière suivante. Tandis qu'un observateur mesure la hauteur de l'astre étant au point B, un autre observateur observera la même hauteur d'un autre point b, beaucoup plus élevé que le point B; la différence des deux hauteurs bO et BO, ainsi que celle des deux angles observés, serviront à trouver l'angle LBA.

Nommons I l'angle LBA, ou la correction de la hauteur observée en B, et I' l'angle lbA, ou la correction de la hauteur observée en b. Soit h l'élévation de l'œil BO, et h' l'élévation bO. Menons AD perpendiculaire au rayon CO, qui est prolongé jusqu'en b. Cela posé, les triangles rectangles bAD, BAD donnent, par les règles de la trigonométrie, les deux équations suivantes :

$$\cot AbD = \text{tang } I' = \frac{bD}{AD},$$

$$\cot ABD = \text{tang } I = \frac{BD}{AD};$$

d'où l'on tire

$$\text{tang } I' - \text{tang } I = \frac{bD - BD}{AD}.$$

Les angles I' et I ne sont jamais que d'un petit nombre de minutes; on aura donc, sans erreur sensible (*),

$$\sin 1''(I' - I) = \frac{h' - h}{AD},$$

et

$$AD = \frac{h' - h}{\sin 1''(I' - I)};$$

mais

$$\text{tang } I = \frac{BD}{AD} = \frac{BO + DO}{AD} = \frac{h + DO}{AD}.$$

D'un autre côté, à très-peu près, tang $I = \sin 1''.I$, on aura donc

$$I = \frac{h}{\sin 1''.AD} + \frac{DO}{\sin 1''.AD}.$$

On doit remarquer que DO est le sinus verse de l'arc AO, dont le sinus AD est connu; il faut donc substituer à DO sa valeur en fonction de AD.

(*) Cette supposition est d'autant plus permise, qu'il ne s'agit ici d'obtenir l'angle I qu'à quelques secondes près.

On a par les règles connues, en supposant le rayon égal à l'unité,

$$\text{sin ver.}\,AO = \frac{\overline{AQ}^2}{2} - \frac{\overline{AO}^4}{24},$$

et

$$AO = \sin AO + \frac{\overline{\sin}^3 AO}{4}.$$

Substituons la valeur de AO, donnée par la seconde équation, dans l'expression du sinus verse de AO, nous aurons, en négligeant les termes qui sont au-dessus de quatre dimensions,

$$\text{sin ver.}\,AO = \frac{\overline{\sin}^2 AO}{2} + \frac{3.\overline{\sin}^4 AO}{24}.$$

Soit a le rayon de la terre, et mettons dans l'équation précédente DO au lieu de sin ver. AO, et AD au lieu de sin AO, nous aurons

$$DO = \frac{\overline{AD}^2}{2a} + \frac{3.\overline{AD}^4}{24.a^3}.$$

Mais nous avons déja l'équation

$$I = \frac{h}{\sin 1''.AD} + \frac{DO}{\sin 1''.AD};$$

substituons-y la valeur de DO, et nous aurons

$$I = \frac{h}{\sin 1''.AD} + \frac{AD}{2a.\sin 1''} + \frac{\overline{AD}^3}{8a^3.\sin 1''};$$

mais

$$AD = \frac{h'-h}{\sin 1''(I'-I)},$$

l'équation précédente devient donc

$$I = \frac{h(I'-I)}{h'-h} + \frac{h'-h}{2a.\overline{\sin}^2 1''(I'-I)} + \frac{h'-h)^3}{8a^3.\overline{\sin}^4 1''(I'-I)^3}.$$

La valeur du troisième terme sera toujours insensible, et l'on pourra, dans tous les cas, se borner au calcul des deux premiers; on aura donc

$$I = \frac{h(I'-I)}{h'-h} + \frac{h'-h}{2a.\overline{\sin 1''}^2 (I'-I)}.$$

Le premier terme peut se calculer par une simple règle de proportion. Quant au second, il serait facile de construire une petite table à deux argumens; et avec la différence des deux hauteurs de l'œil et la différence des angles observés, on pourrait le trouver sans être obligé de prendre des parties proportionnelles. Ce second terme procurerait même l'avantage de pouvoir corriger l'inclinaison du rayon visuel BA de l'effet des réfractions terrestres; car on a . . $\sin AO = \sin 1''.AO$; d'où l'on tire $AO = \frac{\sin AO}{\sin 1''}$, ou . . $AO = \frac{AD}{\sin 1''}$. Si l'on veut avoir AO en parties de la circonférence, il faut employer AD en parties du rayon; alors on a . . $AO = \frac{AD}{a \sin 1''}$, ou bien $AO = \frac{h'-h}{a\overline{\sin 1''}^2 (I'-I)}$; d'où il suit que le second terme de l'expression de la dépression I, est toujours égal à la moitié de l'arc terrestre compris entre l'observateur et le point du rivage auquel on ramène l'image réfléchie du soleil. Dès lors on pourra retrancher de cette moitié, la quantité qui est nécessaire pour avoir la réfraction correspondante à l'arc entier.

Reprenons l'équation qui nous a donné la valeur de I,

$$I = \frac{h(I'-I)}{(h'-h)} + \frac{1}{2a\overline{\sin 1''}^2} \frac{(h'-h)}{(I'-I)},$$

Si on la différentie en regardant I et $(I'-I)$ comme variables, on aura

$$\delta I = \delta(I'-I)\frac{h}{(h'-h)} - \delta(I'-I)\frac{(h'-h)}{2a.\sin 1''(I'-I)^2}.$$

L'erreur du premier terme sera d'autant plus petite que $h'-h$

sera plus grand, ou que le point h' sera plus élevé. Le contraire aura lieu à l'égard du second terme; mais comme ce terme a un signe contraire à celui du premier, la valeur de l'erreur de I sera, dans tous les cas, diminuée de celle dont ce terme est affecté. On peut donc conclure, en premier lieu, qu'il ne faut jamais négliger le second terme; et en second lieu, que l'on doit observer une des deux hauteurs dans un lieu très-élevé. Un des observateurs doit donc se placer sur le pont du vaisseau, et l'autre dans une des hunes; alors la quantité $\frac{h}{h'-h}$ pourra être égale à $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{6}$, et l'erreur de l'angle I sera toujours moindre que $\frac{1}{5}\delta(I'-I)$, ou $\frac{1}{6}\delta(I'-I)$.

On obtiendra la hauteur observée du point inférieur à 1′ près; mais l'observateur placé dans la hune, ou le mouvement du vaisseau est le plus sensible, ne pourra guère la mesurer qu'à 3′ ou 4′ près. Nous pouvons donc supposer que l'erreur $I'-I$ est de 4′; alors celle de l'angle I, ou de la dépression que l'on obtiendrait par le calcul, pourrait être des $\frac{1}{5}$ ou des $\frac{1}{6}$ d'une minute, qui valent 48″ ou 40″. Toutes les fois que l'on ne sera pas à moins d'une lieue de terre, il y aura donc bien peu d'avantage à se servir de cette méthode. On doit même s'appercevoir qu'il ne faut jamais employer les hauteurs observées de cette manière à la détermination des positions géographiques.

Les circonstances qui paraissent d'abord devoir être plus avantageuses, sont celles où le vaisseau se trouve à moins de deux milles de la côte; cependant $(I'-I)$ deviendra alors plus grand, l'erreur augmentera à proportion, et pourra être de plus d'une minute. D'un autre côté, à une aussi petite distance de terre, les ondulations du rivage deviendront sensibles, et les deux observateurs seront exposés à rapporter les images du soleil à deux différens points, qui pourront être tous les deux hors du vertical du soleil. Il est difficile d'évaluer les erreurs dont $I'-I$ et la hauteur elle-même pourraient être affectées dans ce cas; on sait seulement qu'elles peuvent être assez considérables, et rendre les résultats très-défectueux. C'est principalement cette dernière cause d'erreur qui nous a engagés à ne point donner, dans le Traité précédent, la manière de corriger les hauteurs observées près de terre, par des observations simultanées faites à des degrés d'élévation très-différens. Au reste, il paraît que la difficulté de

prendre des hauteurs dans des lieux aussi élevés que les hunes d'un vaisseau, a rebuté les navigateurs; et ils font très-peu d'usage de cette méthode : ils préfèrent toujours s'éloigner du rivage, ainsi que nous l'avons recommandé, lorsqu'ils veulent obtenir des hauteurs auxquelles ils puissent ajouter quelque confiance.

TABLES
D'ASTRONOMIE NAUTIQUE.

TABLE Ire.

Dépression de l'horison.

Élévation de l'œil en pieds.	Élévation de l'œil en mètres.	Dépression.	Distance.	Élévation de l'œil en pieds.	Élévation de l'œil en mètres.	Dépression.	Distance.	Élévation de l'œil en pieds.	Élévation de l'œil en mètres.	Dépression.	Distance.
pi. po.	mètr.		mill.	pi. po.	mètr.		mill.	pi. p.	mètr.		
1. 6,5	0,5	1′.15″	1	23. 1,1	7,5	4′.51″		58. 5,9	19,0	7′.44″	
3. 0,9	1,0	1 .46	2	24. 7,5	8,0	5 . 1		61. 6,8	20,0	7 .56	
4. 7,4	1,5	2 .10	2	26. 2,0	8,5	5 .10	6	64. 7,8	21,0	8 . 8	9
6. 1,9	2,0	2 .30	3	27. 8,5	9,0	5 .19		67. 8,7	22,0	8 .19	
7. 8,4	2,5	2 .48	3	29. 2,9	9,5	5 .28		70. 9,7	23,0	8 .30	
9. 2,8	3,0	3 . 4		30. 9,4	10,0	5 .36		73.10,6	24,0	8 . 41	
10.10,3	3,5	3 .19		33.10,4	11,0	5 .53		80. 0,5	26,0	9 . 2	
12. 5,8	4,0	3 .33	4	36.11,3	12,0	6 . 9	7	86. 2,4	28,0	9 .23	1
13.10,2	4,5	3 .46		40. 0,2	13,0	6 .24		92. 4,2	30,0	9 .43	
15. 4,7	5,0	3 .58		43. 1,2	14,0	6 .38		98. 6,1	32,0	10 . 2	
16.11,2	5,5	4 .10		46. 2,1	15,0	6 .53		104. 8,0	34,0	10 .20	
18. 5,7	6,0	4 .21		49. 3,0	16,0	7 . 6		111. 9,9	36,0	10 .38	
20. 0,1	6,5	4 .31	5	52. 4,0	17,0	7 .19	8	116.11,8	38,0	10 .56	1
21. 6,6	7,0	4 .41		55. 4,9	18,0	7 .31		123. 1,7	40,0	11 .13	
23. 1,1	7,5	4 .51		58. 5,9	19,0	7 .44		129. 3,5	42,0	11 .29	

TABLE II.

Augmentation du demi-diamètre de la lune.

Hauteur apparente.	Demi-diamètre horisontal. 14′.30″	15′.30″	16′.30″
0°	0″	0″	0″
4	1	1	1
8	2	2	2
12	3	3	4
16	4	4	5
20	5	5	6
25	6	7	7
30	7	8	9
35	8	9	10
40	9	10	11
45	10	11	12
55	11	13	14
65	12	14	16
75	13	15	17
90	14	16	18

TABLE III.

Diminution de la parallaxe équatoriale, à divers degrés de latitude.

Latitude.	Parallaxe équatoriale 53′	61′
0°	0″	0″
20	1	1
25	2	2
30	3	3
35	4	4
40	4	5
45	5	6
50	6	7
55	7	8
60	8	9
65	9	10
75	10	11

TABLE IV.

Des erreurs des surfaces du grand miroir, lorsque ces surfaces font entre elles un angle de 1′.

Angles observés.	observat. à droite.	observat à gauche.	observat. croisées.
0°	0″	0″	0″
10	2	1	2
20	6	2	4
30	10	1	6
40	16	0	8
45	19	1	9
50	23	2	11
55	28	4	12
60	33	6	14
65	38	8	15
70	47	10	18
75	55	13	21
80	1′ 4	16	24
85	1 15	19	28
90	1 28	23	32
95	1 43	28	37
100	2 1	33	45
105	2 23	38	53
110	2 50	47	1′ 2
115	3 23	55	1 12
120	4 5	1′ 4	1 31
125	5 0	1 15	1 55
130	5 58	1 28	2 15

TABLE V.

Réfraction pour 0^{m},760 *du baromètre, et* + 14° *du thermomètre centigrade.*

Hauteur apparente.	Réfraction moins parallaxe du ⊙	Réfraction des ✶	Différences.	Hauteur apparente.	Réfraction moins parallaxe du ⊙	Réfraction des ✶	Différences.
0°. 0′	33′. 7″	33′.16″	110″	6°. 0′	8′.13″	8′.22″	11″
10	31 .17	31 .25	103	10	8 . 2	8 .11	11
20	29 .33	29 .42	96	20	7 .51	7 .59	11
30	27 .57	28 . 6	88	30	7 .40	7 .48	11
40	26 .29	26 .38	82	40	7 .29	7 .38	10
50	25 . 7	25 .15		50	7 .19	7 .28	
1 . 0	23 .50	23 .59	76	7 . 0	7 . 9	7 .18	10
10	22 .40	22 .49	70	10	7 . 0	7 . 9	9
20	21 .35	21 .44	65	20	6 .51	7 . 0	9
30	20 .34	20 .43	61	30	6 .43	6 .51	9
40	19 .38	19 .47	56	40	6 .35	6 .44	8
50	18 .45	18 .54	53	50	6 .27	6 .36	8
2 . 0	17 .57	18 . 6	48	8 . 0	6 .20	6 .28	7
10	17 .12	17 .20	45	10	6 .13	6 .21	7
20	16 .29	16 .38	43	20	6 . 5	6 .14	7
30	15 .50	15 .59	39	30	5 .58	6 . 7	7
40	15 .13	15 .22	37	40	5 .52	6 . 1	6
50	14 .39	14 .47	35	50	5 .46	5 .54	6
3 . 0	14 . 6	14 .15	32	9 . 0	5 .39	5 .48	6
10	13 .36	13 .45	30	10	5 .33	5 .42	6
20	13 . 7	13 .16	29	20	5 .28	5 .36	6
30	12 .41	12 .49	27	30	5 .22	5 .31	5
40	12 .15	12 .24	25	40	5 .17	5 .25	5
50	11 .51	12 . 0	24	50	5 .12	5 .20	5
4 . 0	11 .29	11 .38	22	10 . 0	5 . 6	5 .15	5
10	11 . 7	11 .16	22	11 . 0	4 .39	4 .47	28
20	10 .47	10 .56	20	12 . 0	4 .15	4 .24	23
30	10 .28	10 .37	19	13 . 0	3 .55	4 . 4	20
40	10 .10	10 .19	18	14 . 0	3 .38	3 .46	18
50	9 .53	10 . 2	17	15 . 0	3 .23	3 .31	15
5 . 0	9 .37	9 .45	16	16 . 0	3 . 9	3 .18	14
10	9 .21	9 .30	15	17 . 0	2 .57	3 . 6	12
20	9 . 6	9 .15	15	18 . 0	2 .47	2 .55	11
30	8 .52	9 . 1	14	19 . 0	2 .37	2 .45	10
40	8 .38	8 .47	14	20 . 0	2 .28	2 .36	9
50	8 .26	8 .34	13	21 . 0	2 .20	2 .28	8
6 . 0	8 .13	8 .22	12				

TABLE V.

Réfraction pour $0^m,760$ *du baromètre, et* $+ 14°$ *du thermomètre centigrade.*

Hauteur apparente.	Réfraction moins parallaxe du ⊙	Réfraction des ✶	Différences.	Hauteur apparente.	Réfraction moins parallaxe du ⊙	Réfraction des ✶	Différences.
21°	2′.20″	2′.28″		56°	0′.34″	0′.39″	
22	2 .13	2 .21	7″	57	0 .33	0 .37	1″
23	2 . 6	2 .14	7	58	0 .31	0 .36	1
24	2 . 0	2 . 8	6	59	0 .30	0 .35	1
25	1 .55	2 . 3	5	60	0 .29	0 .33	1
26	1 .49	1 .57	6	61	0 .28	0 .32	1
27	1 .44	1 .52	5	62	0 .26	0 .31	1
28	1 .40	1 .48	4	63	0 .25	0 .29	1
29	1 .36	1 .43	4	64	0 .24	0 .28	1
30	1 .32	1 .39	4	65	0 .23	0 .27	1
31	1 .28	1 .35	4	66	0 .22	0 .26	1
32	1 .24	1 .32	4	67	0 .21	0 .24	
33	1 .21	1 .28	3	68	0 .20	0 .23	1
34	1 .18	1 .25	3	69	0 .19	0 .22	1
35	1 .15	1 .22	3	70	0 .18	0 .21	1
36	1 .12	1 .19	3	71	0 .17	0 .20	1
37	1 . 9	1 .16	3	72	0 .16	0 .19	1
38	1 . 6	1 .13		73	0 .15	0 .18	
39	1 . 4	1 .11	2	74	0 .14	0 .17	1
40	1 . 2	1 . 8	2	75	0 .13	0 .15	1
41	0 .59	1 . 6	2	76	0 .12	0 .14	1
42	0 .57	1 . 4	2	77	0 .11	0 .13	1
43	0 .55	1 . 2	2	78	0 .10	0 .12	1
44	0 .53	0 .59		79	0 .10	0 .11	
45	0 .51	0 .57	2	80	0 . 9	0 .10	1
46	0 .49	0 .55	2	81	0 . 8	0 . 9	1
47	0 .48	0 .54	1	82	0 . 7	0 . 8	1
48	0 .46	0 .52	2	83	0 . 6	0 . 7	1
49	0 .44	0 .50	2	84	0 . 5	0 . 6	1
50	0 .43	0 .48	1	85	0 . 4	0 . 5	1
51	0 .41	0 .46	2	86	0 . 3	0 . 4	1
52	0 .39	0 .45	1	87	0 . 3	0 . 3	1
53	0 .38	0 .43	1	88	0 . 2	0 . 2	1
54	0 37	0 .42	1	89	0 . 1	0 . 1	1
55	0 .35	0 .40	2	90	0 . 0	0 . 0	
56	0 .34	0 .39	1				

TABLE. VI.

Corrections des réfractions, relatives à la température.

Les réfractions de la TABLE V, répondent à + 14° du thermomètre centigrade.
Le froid augmente la réfraction.

Ajoutez les nombres ci-dessous aux réfractions de la TABLE V;

Retranchez-les des nombres de la TABLE VIII, ou de la parallaxe de la ☾ moins la réfraction.

Thermomètre centigrade.

Hauteur apparente.	— 2°.	0°.	+ 2°.	+ 4°.	+ 6°.	+ 8°.	+ 10°.	+ 12°.	+ 14°
5°	3′ 7″	3′ 2″	28″	23″	18″	14″	9″	5″	0″
5½	35	30	26	21	17	13	8	4	0
6	32	28	24	20	16	12	8	4	0
7	28	24	21	17	14	10	7	3	0
8	25	22	18	15	12	9	6	3	0
9	22	19	16	14	11	8	5	3	0
10	20	17	15	12	10	7	5	3	0
12	17	15	12	10	8	6	4	2	0
14	14	13	11	9	7	5	4	2	0
16	13	11	9	8	6	5	3	2	0
18	11	10	8	7	5	4	3	1	0
20	10	9	7	6	5	4	2	1	0
25	8	7	6	5	4	3	2	1	0
30	6	6	5	4	3	2	2	1	0
40	4	4	3	3	2	2	1	1	0
50	3	3	2	2	2	1	1	0	0
60	2	2	2	1	1	1	1	0	0
70	1	1	1	1	1	1	0	0	0
80	1	1	1	0	0	0	0	0	0
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Hauteur apparente	— 1°,6	0°.	+ 1°,6	+ 3°,2	+ 4°,8	+ 6°,4	+ 8°	+ 9,6	+ 11,2

Thermomètre de Réaumur.

TABLE VI.

Corrections des réfractions, relatives à la température.

s réfractions de la TABLE V, répondent à + 14° du thermomètre centigrade.
La chaleur diminue la réfraction.

etranchez les nombres ci-dessous des réfractions de la TABLE V;

joutez-les aux nombres de la TABLE VIII, ou à la parallaxe de la ☾ moins réfraction.

Thermomètre centigrade.

auteur parente.	+ 14°.	+ 16°.	+ 18°.	+ 20°.	+ 22°.	+ 24°.	+ 26°.	+ 28°.	+ 30°.
5°	0″	4″	9″	13″	17″	21″	25″	29″	33″
5½	0	4	8	12	16	20	23	27	31
6	0	4	7	11	14	18	22	25	28
7	0	3	6	10	13	16	19	22	25
8	0	3	6	9	11	14	17	21	22
9	0	3	5	8	10	13	15	17	20
10	0	2	5	7	9	11	14	16	18
12	0	2	4	6	8	10	11	13	15
14	0	2	3	5	7	8	10	11	13
16	0	1	3	4	6	7	9	10	11
18	0	1	3	4	5	6	8	9	10
20	0	1	2	3	5	6	7	8	9
25	0	1	2	3	4	5	5	6	7
30	0	1	2	2	3	4	4	5	6
40	0	1	1	2	2	3	3	3	4
50	0	0	1	1	1	2	2	2	3
60	0	0	1	1	1	1	1	2	2
70	0	0	0	1	1	1	1	1	1
80	0	0	0	0	0	0	0	1	1
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
auteur parente.	+ 11°,2	+ 12°,8	+ 14°,4	+ 16°	+ 17°,6	+ 19°,2	+ 20°,8	+ 22°,4	+ 24°

Thermomètre de Réaumur.

TABLE VII.

Corrections des réfractions, relatives au poids de l'atmosphère.

Les réfractions de la TABLE V ont lieu, lorsque l'atmosphère soutien une colonne de mercure de $0^m,760$.

Les réfractions augmentent en même tems que le poids de l'atmosphèr

Ajoutez les nombres ci-dessous aux réfractions de la TABLE V ;

Retranchez-les des nombres de la TABLE VIII, ou de la parallaxe de la moins la réfraction.

Hauteur du baromètre, en mètres.

Hauteur apparente	$0^m,795$	$0^m,790$	$0^m,785$	$0^m,780$	$0^m,775$	$0^m,770$	$0^m,765$	$0^m,760$
5°	27″	23″	19″	16″	12″	8″	4″	0″
5½	25	22	18	14	11	7	4	0
6	24	20	17	13	10	7	3	0
7	21	18	15	12	9	6	3	0
8	18	16	13	10	8	5	3	0
9	16	14	12	9	7	5	2	0
10	15	12	11	8	6	4	2	0
12	12	11	9	7	5	4	2	0
14	10	9	8	6	5	3	2	0
16	9	8	7	5	4	2	1	0
18	8	7	6	5	4	2	1	0
20	7	6	5	4	3	2	1	0
25	6	5	4	3	3	2	1	0
30	5	4	3	3	2	1	1	0
40	3	3	2	2	1	1	1	0
50	2	2	2	1	1	1	0	0
60	2	1	1	1	1	1	0	0
70	1	1	1	1	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0
90	0	0	0	0	0	0	0	0
Hauteur apparente.	29p.4l,4	29p.2l,2	29p.0l,0	28p.9l,8	28p.7l,6	28p.5l,4	28p.3l,1	28p.0l,9

Hauteur du baromètre, en pouces.

TABLE VII.

Corrections des réfractions, relatives au poids de l'atmosphère.

Les réfractions de la TABLE V ont lieu, lorsque l'atmosphère soutient une colonne de mercure de $0^m,760$.

Les réfractions diminuent en même tems que le poids de l'atmosphère.

Retranchez les nombres ci-dessous des réfractions de la TABLE V ;

Ajoutez-les aux nombres de la TABLE VIII, ou à la parallaxe de la ☾ moins la réfraction.

Hauteur du baromètre, en mètres.

Hauteur apparente.	$0^m,760$	$0^m,755$	$0^m,750$	$0^m,745$	$0^m,740$	$0^m,735$	$0^m,730$	$0^m,725$
5	0″	4″	8″	12″	16″	20″	24″	27″
5½	0	4	7	11	15	18	22	25
6	0	3	7	10	14	17	20	24
7	0	3	6	9	12	15	18	21
8	0	3	5	8	11	14	16	18
9	0	2	5	7	10	12	14	16
10	0	2	4	6	9	11	13	15
12	0	2	4	5	7	9	11	12
14	0	2	3	5	6	8	9	11
16	0	1	3	4	5	7	8	9
18	0	1	2	4	5	6	7	8
20	0	1	2	3	4	5	6	7
25	0	1	2	2	3	4	5	6
30	0	1	1	2	3	3	4	5
40	0	0	1	1	2	2	3	3
50	0	0	1	1	1	2	2	2
60	0	0	0	1	1	1	1	2
70	0	0	0	0	1	1	1	1
80	0	0	0	0	0	0	0	1
90	0	0	0	0	0	0	0	0
Hauteur apparente.	$28^p.0^l,9$	$27^p.10^l,8$	$27^p.8^l,5$	$27^p.6^l,3$	$27^p.4^l,1$	$27^p.1^l,8$	$26^p.11^l,6$	$26^p.9^l,4$

Hauteur du baromètre, en pouces.

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
0°. 0′	19′. 44″	20′. 44″	21′. 44″	22′. 44″	23′. 44″	24′. 44″	25′. 44
10	21 . 36	22 . 36	23 . 36	24 . 36	25 . 36	26 . 36	27 . 36
20	23 . 18	24 . 18	25 . 18	26 . 18	27 . 18	28 . 18	29 . 18
30	24 . 54	25 . 54	26 . 54	27 . 54	28 . 54	29 . 54	30 . 54
40	26 . 22	27 . 22	28 . 22	29 . 22	30 . 22	31 . 22	32 . 22
50	27 . 45	28 . 45	29 . 45	30 . 45	31 . 45	32 . 45	33 . 45
1 . 0	29 . 1	30 . 1	31 . 1	32 . 1	33 . 1	34 . 1	35 . 1
10	30 . 9	31 . 9	32 . 9	33 . 9	34 . 9	35 . 9	36 . 9
20	31 . 16	32 . 16	33 . 16	34 . 16	35 . 16	36 . 16	37 . 16
30	32 . 16	33 . 16	34 . 16	35 . 16	36 . 16	37 . 16	38 . 16
40	33 . 12	34 . 12	35 . 12	36 . 12	37 . 12	38 . 12	39 . 12
50	34 . 5	35 . 5	36 . 5	37 . 5	38 . 5	39 . 5	40 . 5
2 . 0	34 . 52	35 . 52	36 . 52	37 . 52	38 . 52	39 . 52	40 . 52
10	35 . 38	36 . 38	37 . 38	38 . 38	39 . 38	40 . 37	41 . 37
20	36 . 19	37 . 19	38 . 19	39 . 19	40 . 19	41 . 19	42 . 19
30	36 . 58	37 . 58	38 . 58	39 . 57	40 . 57	41 . 57	42 . 57
40	37 . 35	38 . 35	39 . 35	40 . 35	41 . 34	42 . 34	43 . 34
50	38 . 9	39 . 9	40 . 9	41 . 9	42 . 9	43 . 9	44 . 9
3 . 0	38 . 41	39 . 41	40 . 40	41 . 40	42 . 40	43 . 40	44 . 40
10	39 . 10	40 . 10	41 . 10	42 . 10	43 . 10	44 . 9	45 . 9
20	39 . 38	40 . 38	41 . 38	42 . 38	43 . 38	44 . 38	45 . 38
30	40 . 5	41 . 5	42 . 5	43 . 4	44 . 4	45 . 4	46 . 4
40	40 . 30	41 . 30	42 . 29	43 . 29	44 . 29	45 . 29	46 . 29
50	40 . 53	41 . 53	42 . 53	43 . 53	44 . 53	45 . 53	46 . 52
4 . 0	41 . 14	42 . 14	43 . 14	44 . 14	45 . 14	46 . 13	47 . 13
10	41 . 36	42 . 36	43 . 35	44 . 35	45 . 35	46 . 35	47 . 35
20	41 . 55	42 . 55	43 . 55	44 . 55	45 . 54	46 . 54	47 . 54
30	42 . 13	43 . 13	44 . 13	45 . 13	46 . 13	47 . 13	48 . 12
40	42 . 30	43 . 30	44 . 30	45 . 30	46 . 30	47 . 30	48 . 29
50	42 . 47	43 . 47	44 . 46	45 . 46	46 . 46	47 . 46	48 . 45
5 . 0	43 . 3	44 . 3	45 . 3	46 . 2	47 . 2	48 . 2	49 . 2
10	43 . 17	44 . 17	45 . 17	46 . 17	47 . 16	48 . 16	49 . 16
20	43 . 32	44 . 32	45 . 31	46 . 31	47 . 31	48 . 31	49 . 30
30	43 . 44	44 . 44	45 . 44	46 . 44	47 . 44	48 . 43	49 . 43
40	43 . 57	44 . 57	45 . 57	46 . 57	47 . 57	48 . 56	49 . 56
50	44 . 9	45 . 9	46 . 9	47 . 8	48 . 8	49 . 8	50 . 7

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′		
′. 44″	27′. 44″	0″	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
. 36	29 . 36	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
. 18	31 . 18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
. 54	32 . 54	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
. 22	34 . 22	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
. 45	35 . 45	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		
. 1	37 . 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
. 9	38 . 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
. 16	39 . 16	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
. 16	40 . 16	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
. 12	41 . 12	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
. 5	42 . 5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		
. 52	42 . 52	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
. 37	43 . 37	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
. 19	44 . 19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
. 57	44 . 57	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
. 34	45 . 34	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
. 9	46 . 9	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		
. 40	46 . 40	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
. 9	47 . 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
. 38	47 . 37	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
. 4	48 . 4	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
. 29	48 . 29	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
. 52	48 . 52	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		
. 13	49 . 13	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
. 35	49 . 34	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
. 54	49 . 54	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
. 12	50 . 12	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
. 29	50 . 29	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
. 45	50 . 45	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		
. 1	51 . 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
. 16	51 . 15	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
. 30	51 . 30	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
. 43	51 . 42	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
. 56	51 . 55	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
7	52 . 7	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
6°. 0′	44′. 21″	45′. 21″	46′. 20″	47′. 20″	48′. 20″	49′. 19″	50′. 1
10	44. 31	45. 31	46. 30	47. 30	48. 30	49. 29	50. 2
20	44. 41	45. 41	46. 41	47. 41	48. 40	49. 40	50. 4
30	44. 51	45. 51	46. 51	47. 51	48. 50	49. 50	50. 5
40	45. 0	46. 0	47. 0	47. 59	48. 59	49. 58	50. 58
50	45. 9	46. 9	47. 9	48. 8	49. 8	50. 7	51. 7
7. 0	45. 18	46. 18	47. 17	48. 17	49. 16	50. 16	51. 16
10	45. 26	46. 26	47. 26	48. 25	49. 25	50. 24	51. 24
20	45. 34	46. 34	47. 34	48. 33	49. 33	50. 32	51. 32
30	45. 41	46. 41	47. 41	48. 40	49. 40	50. 39	51. 39
40	45. 48	46. 48	47. 48	48. 47	49. 47	50. 46	51. 46
50	45. 54	46. 54	47. 54	48. 53	49. 53	50. 52	51. 51
8. 0	46. 1	47. 1	48. 0	49. 0	49. 59	50. 58	51. 58
10	46. 6	47. 6	48. 5	49. 5	50. 4	51. 3	52. 3
20	46. 12	47. 12	48. 11	49. 10	50. 10	51. 9	52. 9
30	46. 17	47. 17	48. 17	49. 16	50. 15	51. 15	52. 14
40	46. 23	47. 23	48. 22	49. 21	50. 21	51. 20	52. 19
50	46. 28	47. 28	48. 27	49. 26	50. 26	51. 25	52. 24
9. 0	46. 33	47. 32	48. 32	49. 31	50. 30	51. 30	52. 29
10	46. 37	47. 37	48. 36	49. 36	50. 35	51. 34	52. 33
20	46. 42	47. 41	48. 41	49. 40	50. 39	51. 38	52. 37
30	46. 46	47. 45	48. 44	49. 43	50. 42	51. 41	52. 40
40	46. 49	47. 48	48. 48	49. 47	50. 46	51. 45	52. 44
50	46. 52	47. 52	48. 51	49. 50	50. 50	51. 49	52. 48
10. 0	46. 57	47. 56	48. 55	49. 54	50. 53	51. 52	52. 51
10	47. 0	47. 59	48. 58	49. 57	50. 56	51. 55	52. 54
20	47. 3	48. 2	49. 1	50. 0	50. 59	51. 58	52. 57
30	47. 6	48. 5	49. 4	50. 3	51. 2	52. 1	53. 0
40	47. 9	48. 8	49. 7	50. 6	51. 5	52. 4	53. 3
50	47. 12	48. 11	49. 10	50. 9	51. 8	52. 7	53. 6
11. 0	47. 14	48. 13	49. 12	50. 11	51. 10	52. 9	53. 8
10	47. 17	48. 16	49. 15	50. 14	51. 12	52. 11	53. 10
20	47. 19	48. 18	49. 17	50. 16	51. 15	52. 13	53. 12
30	47. 21	48. 20	49. 19	50. 18	51. 17	52. 15	53. 14
40	47. 23	48. 22	49. 21	50. 20	51. 19	52. 17	53. 16
50	47. 25	48. 24	49. 23	50. 22	51. 20	52. 19	53. 18

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		+
19″	52′. 18″	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
29	52 . 28	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
39	52 . 39	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
49	52 . 49	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
58	52 . 57	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
7	53 . 6	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		
15	53 . 15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
23	53 . 23	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
31	53 . 31	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
38	53 . 38	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
45	53 . 45	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
51	53 . 50	50	51	52	53	54	55	56	57	58	58		
57	53 . 57	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
2	54 . 2	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
8	54 . 7	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
13	54 . 13	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
18	54 . 18	40	41	42	43	44	45	45	46	47	48		
23	54 . 23	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58		
28	54 . 27	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
32	54 . 32	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
37	54 . 36	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
40	54 . 39	30	31	32	33	34	35	36	36	37	38		
43	54 . 43	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48		
47	54 . 46	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58		
50	54 . 49	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1′	0″
53	54 . 53	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	2	0
57	54 . 56	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	3	1
59	54 . 58	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	4	1
2	55 . 1	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	5	1
4	55 . 3	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	6	1
												7	2
7	55 . 6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	2
9	55 . 8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	9	2
11	55 . 10	20	21	22	23	24	24	25	26	27	28		
13	55 . 12	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38		
15	55 . 14	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48		
16	55 . 15	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Haute ur apparente	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59
12°. 0″	47′. 27″	48′. 26″	49′. 25″	50′. 23″	51′. 22″	52′. 21″	53′.
10	47 . 29	48 . 27	49 . 26	50 . 25	51 . 23	52 . 22	53 .
20	47 . 30	48 . 29	49 . 28	50 . 26	51 . 25	52 . 23	53 .
30	47 . 32	48 . 30	49 . 29	50 . 28	51 . 26	52 . 25	53 .
40	47 . 33	48 . 32	49 . 30	50 . 29	51 . 27	52 . 26	53 .
50	47 . 34	48 . 33	49 . 31	50 . 30	51 . 28	52 . 27	53 .
13 . 0	47 . 35	48 . 34	49 . 32	50 . 31	51 . 29	52 . 28	53 .
10	47 . 36	48 . 35	49 . 33	50 . 32	51 . 30	52 . 28	53 .
20	47 . 36	48 . 36	49 . 34	50 . 32	51 . 31	52 . 29	53 .
30	47 . 38	48 . 36	49 . 35	50 . 33	51 . 31	52 . 30	53 .
40	47 . 39	48 . 37	49 . 35	50 . 34	51 . 32	52 . 30	53 .
50	47 . 39	48 . 38	49 . 36	50 . 34	51 . 32	52 . 31	53 .
14 . 0	47 . 40	48 . 38	49 . 36	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
10	47 . 40	48 . 38	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
20	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
30	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
40	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
50	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
15 . 0	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
10	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
20	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 35	51 . 33	52 . 31	53 .
30	47 . 41	48 . 39	49 . 37	50 . 34	51 . 32	52 . 30	53 .
40	47 . 41	48 . 38	49 . 36	50 . 34	51 . 32	52 . 30	53 .
50	47 . 40	48 . 38	49 . 36	50 . 34	51 . 31	52 . 29	53 .
16 . 0	47 . 40	48 . 38	49 . 35	50 . 33	51 . 31	52 . 28	53 .
10	47 . 40	48 . 37	49 . 35	50 . 32	51 . 30	52 . 28	53 .
20	47 . 39	48 . 36	49 . 34	50 . 32	51 . 29	52 . 27	53 .
30	47 . 38	48 . 36	49 . 33	50 . 31	51 . 29	52 . 26	53 .
40	47 . 38	48 . 35	49 . 33	50 . 30	51 . 28	52 . 25	53 .
50	47 . 37	48 . 34	49 . 32	50 . 29	51 . 27	52 . 24	53 .
17 . 0	47 . 36	48 . 34	49 . 31	50 . 28	51 . 26	52 . 23	53 .
10	47 . 35	48 . 33	49 . 30	50 . 27	51 . 25	52 . 22	53 .
20	47 . 34	48 . 32	49 . 29	50 . 26	51 . 24	52 . 21	53 .
30	47 . 34	48 . 31	49 . 28	50 . 25	51 . 22	52 . 20	53 .
40	47 . 33	48 . 30	49 . 27	50 . 24	51 . 21	52 . 18	53 .
50	47 . 31	48 . 29	49 . 26	50 . 23	51 . 20	52 . 16	53 .

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		+
′.18″	55′.17″	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1′	0″
.19	55 .18	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	2	0
.21	55 .19	20	21	21	22	23	24	25	26	27	28	3	0
.22	55 .20	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	4	0
.23	55 .21	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	5	1
.24	55 .22	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	6	1
												7	1
.25	55 .23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	1
.25	55 .24	10	11	12	13	14	15	16	17	18	18	9	1
.26	55 .24	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		
.26	55 .25	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38		
.27	55 .25	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48		
.27	55 .25	49	50	51	52	53	53	54	55	56	57		
.27	55 .26	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0
.28	55 .26	10	11	12	13	14	15	15	16	17	18	2	0
.28	55 .26	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	3	0
.28	55 .26	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	4	0
.28	55 .26	39	40	41	42	43	44	45	46	46	47	5	0
.27	55 .25	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	6	0
												7	0
.27	55 .25	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	0
.27	55 .24	10	11	12	13	14	14	15	16	17	18	9	0
.26	55 .24	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		
.26	55 .24	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38		
.25	55 .23	39	39	40	41	42	43	44	45	46	47		
.24	55 .22	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57		—
.24	55 .21	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0
.23	55 .21	10	11	12	12	13	14	15	16	17	18	2	0
.22	55 .20	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	3	0
.21	55 .19	29	30	31	32	33	34	35	35	36	37	4	0
.20	55 .18	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	5	1
.19	55 .16	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	6	1
												7	1
.18	55 .15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	1
.17	55 .14	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	9	1
.15	55 .13	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		
.14	55 .11	29	30	30	31	32	33	34	35	36	37		
.14	55 .10	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47		
.12	55 . 8	48	49	50	51	51	52	53	54	55	56		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
18°. 0″	47′. 30″	48′. 27″	49′. 24″	50′. 22″	51′. 19″	52′. 16″	53′. 13″
10	47 . 29	48 . 26	49 . 23	50 . 20	51 . 17	52 . 14	53 . 11
20	47 . 28	48 . 25	49 . 22	50 . 19	51 . 16	52 . 13	53 . 10
30	47 . 27	48 . 24	49 . 20	50 . 17	51 . 14	52 . 11	53 . 8
40	47 . 25	48 . 22	49 . 19	50 . 16	51 . 13	52 . 9	53 . 6
50	47 . 24	48 . 21	49 . 17	50 . 14	51 . 11	52 . 8	53 . 5
19 . 0	47 . 22	48 . 19	49 . 16	50 . 13	51 . 9	52 . 6	53 . 3
10	47 . 21	48 . 18	49 . 14	50 . 11	51 . 8	52 . 4	53 . 1
20	47 . 19	48 . 16	49 . 13	50 . 9	51 . 6	52 . 2	52 . 59
30	47 . 18	48 . 14	49 . 11	50 . 8	51 . 4	52 . 1	52 . 57
40	47 . 16	48 . 13	49 . 9	50 . 6	51 . 2	51 . 59	52 . 55
50	47 . 14	48 . 11	49 . 7	50 . 4	51 . 0	51 . 57	52 . 53
20 . 0	47 . 13	48 . 9	49 . 5	50 . 2	50 . 58	51 . 55	52 . 51
10	47 . 11	48 . 7	49 . 3	50 . 0	50 . 56	51 . 52	52 . 49
20	47 . 9	48 . 5	49 . 2	49 . 58	50 . 54	51 . 50	52 . 47
30	47 . 7	48 . 3	49 . 0	49 . 56	50 . 52	51 . 48	52 . 44
40	47 . 5	48 . 1	48 . 57	49 . 54	50 . 50	51 . 46	52 . 42
50	47 . 3	47 . 59	48 . 55	49 . 51	50 . 48	51 . 44	52 . 40
21 . 0	47 . 1	47 . 57	48 . 53	49 . 49	50 . 45	51 . 41	52 . 37
10	46 . 59	47 . 55	48 . 51	49 . 47	50 . 43	51 . 39	52 . 35
20	46 . 57	47 . 53	48 . 49	49 . 45	50 . 41	51 . 36	52 . 32
30	46 . 55	47 . 51	48 . 46	49 . 42	50 . 38	51 . 34	52 . 30
40	46 . 53	47 . 48	48 . 44	49 . 40	50 . 36	51 . 31	52 . 27
50	46 . 50	47 . 46	48 . 42	49 . 37	50 . 33	51 . 29	52 . 25
22 . 0	46 . 48	47 . 44	48 . 39	49 . 35	50 . 31	51 . 26	52 . 22
10	46 . 46	47 . 41	48 . 37	49 . 32	50 . 28	51 . 24	52 . 19
20	46 . 43	47 . 39	48 . 34	49 . 30	50 . 25	51 . 21	52 . 16
30	46 . 41	47 . 36	48 . 32	49 . 27	50 . 23	51 . 18	52 . 14
40	46 . 39	47 . 34	48 . 29	49 . 25	50 . 20	51 . 15	52 . 11
50	46 . 36	47 . 31	48 . 27	49 . 22	50 . 17	51 . 13	52 . 8
23 . 0	46 . 34	47 . 29	48 . 24	49 . 19	50 . 14	51 . 10	52 . 5
10	46 . 31	47 . 26	48 . 21	49 . 17	50 . 12	51 . 7	52 . 2
20	46 . 28	47 . 23	48 . 19	49 . 14	50 . 9	51 . 4	51 . 59
30	46 . 26	47 . 21	48 . 16	49 . 11	50 . 6	51 . 1	51 . 56
40	46 . 23	47 . 18	48 . 13	49 . 8	50 . 3	50 . 58	51 . 53
50	46 . 20	47 . 15	48 . 10	49 . 5	50 . 0	50 . 55	51 . 50

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
′. 10″	55′. 7″	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1′	0″
. 8	55 . 5	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	2	0
. 7	55 . 4	19	20	21	22	23	24	25	26	27	27	3	0
. 5	55 . 2	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	4	1
. 3	55 . 0	38	39	40	41	42	43	44	45	46	46	5	1
. 1	54 . 58	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	6	1
												7	1
. 0	54 . 56	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	8	1
. 58	54 . 54	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	9	1
. 56	54 . 52	19	20	21	22	23	24	24	25	26	27		
. 54	54 . 50	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37		
. 52	54 . 48	38	39	40	41	41	42	43	44	45	46		
. 49	54 . 46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56		
. 47	54 . 44	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	1	0
. 45	54 . 41	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	2	0
. 43	54 . 39	19	20	21	22	22	23	24	25	26	27	3	1
. 41	54 . 37	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	4	1
. 38	54 . 34	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	5	1
. 36	54 . 32	47	48	49	50	51	51	52	53	54	55	6	1
												7	2
. 33	54 . 29	0	1	2	3	4	5	6	7	7	8	8	2
. 31	54 . 27	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	9	2
. 28	54 . 24	19	20	20	21	22	23	24	25	26	27		
. 26	54 . 21	28	29	30	31	32	33	33	34	35	36		
. 23	54 . 19	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46		
. 20	54 . 16	47	47	48	49	50	51	52	53	54	55		
. 18	54 . 13	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	1	0
. 15	54 . 10	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	2	1
. 12	54 . 7	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	3	1
. 9	54 . 4	28	29	30	30	31	32	33	34	35	36	4	1
. 6	54 . 1	37	38	39	40	41	42	43	43	44	45	5	1
. 3	54 . 58	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	6	2
												7	2
. 0	53 . 55	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	8	2
. 57	53 . 52	9	10	11	12	13	14	15	16	17	17	9	2
. 54	53 . 49	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27		
. 51	53 . 46	28	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
. 48	53 . 43	37	38	39	39	40	41	42	43	44	45		
. 45	53 . 39	46	47	48	49	50	50	51	52	53	54		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
24°. 0′	46′. 18″	47′. 12″	48′. 7″	49′. 2″	49′. 57″	50′. 52″	51′. 46
10	46. 15	47. 9	48. 4	48. 59	49. 54	50. 48	51. 4
20	46. 12	47. 7	48. 1	48. 56	49. 51	50. 45	51. 4
30	46. 9	47. 4	47. 58	48. 53	49. 48	50. 42	51. 3
40	46. 6	47. 1	47. 55	48. 50	49. 44	50. 39	51. 3
50	46. 3	46. 57	47. 51	48. 47	49. 41	50. 36	51. 3
25. 0	46. 0	46. 55	47. 49	48. 43	49. 38	50. 32	51. 2
10	45. 57	46. 52	47. 46	48. 40	49. 35	50. 29	51. 2
20	45. 54	46. 48	47. 43	48. 37	49. 31	50. 25	51. 2
30	45. 51	46. 45	47. 40	48. 34	49. 28	50. 22	51. 1
40	45. 48	46. 42	47. 36	48. 30	49. 24	50. 18	51. 13
50	45. 45	46. 39	47. 33	48. 27	49. 21	50. 15	51. 9
26. 0	45. 42	46. 36	47. 30	48. 24	49. 17	50. 11	51. 5
10	45. 38	46. 32	47. 26	48. 20	49. 14	50. 8	51. 2
20	45. 35	46. 29	47. 23	48. 17	49. 10	50. 4	50. 58
30	45. 32	46. 26	47. 19	48. 13	49. 7	50. 0	50. 54
40	45. 29	46. 22	47. 16	48. 9	49. 3	49. 57	50. 50
50	45. 25	46. 19	47. 12	48. 6	48 59	49. 53	50. 47
27. 0	45. 22	46. 15	47. 9	48. 2	48. 56	49. 49	50. 43
10	45. 18	46. 11	47. 5	47. 59	48. 52	49. 45	50. 39
20	45. 15	46. 8	47. 2	47. 55	48. 48	49. 42	50. 35
30	45. 12	46. 5	46. 58	47. 51	48. 44	49. 38	50. 31
40	45. 8	46. 1	46. 54	47. 47	48. 41	49. 34	50. 27
50	45. 4	45. 58	46. 51	47. 44	48. 37	49. 30	50. 23
28. 0	45. 1	45. 54	46. 47	47. 40	48. 33	49. 26	50. 19
10	44. 57	45. 50	46. 43	47. 36	48. 29	49. 22	50. 15
20	44. 54	45. 46	46. 39	47. 32	48. 25	49. 18	50. 11
30	44. 50	45. 43	46. 35	47. 28	48. 21	49. 14	50. 6
40	44. 46	45. 39	46. 32	47. 24	48. 17	49. 9	50. 2
50	44. 43	45. 35	46. 28	47. 20	48. 13	49. 5	49. 58
29. 0	44. 39	45. 31	46. 24	47. 16	48. 9	49. 1	49. 54
10	44. 35	45. 27	46. 20	47. 12	48. 5	48. 57	49. 49
20	44. 31	45. 23	46. 16	47. 8	48. 0	48. 53	49. 45
30	44. 27	45. 20	46. 12	47. 4	47. 56	48. 48	49. 41
40	44. 23	45. 16	46. 8	47. 0	47. 52	48. 44	49. 36
50	44. 19	45. 11	46. 4	46. 56	47. 48	48. 40	49. 3

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
′.41″	53′.36′	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	1′	0″
.38	53.33	9	10	11	12	13	14	15	15	16	17	2	1
.35	53.28	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	3	1
.31	53.26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	35	4	1
.28	53.22	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	5	2
.24	53.19	46	46	47	48	49	50	51	52	53	54	6	2
												7	2
.21	53.15	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	3
.17	53.12	9	10	11	12	13	14	14	15	16	17	9	3
.14	53. 7	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26		
.10	53. 4	27	28	29	30	31	32	32	33	34	35		
. 7	53. 1	36	37	38	39	40	41	41	42	43	44		
. 3	52.57	45	46	47	48	49	50	51	51	52	53		
.59	52.53	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	1	0
.55	52.49	9	10	11	12	13	13	14	15	16	17	2	1
.52	52.45	18	19	20	21	21	22	23	24	25	26	3	1
.48	52.42	27	28	29	30	30	31	32	33	34	35	4	1
.44	52.38	36	37	38	38	39	40	41	42	43	44	5	2
.40	52.34	45	46	47	47	48	49	50	51	52	53	6	2
												7	2
.36	52.30	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	8	3
.32	52.26	9	10	11	12	12	13	14	15	16	17	9	3
.28	52.21	18	19	20	20	21	22	23	24	25	26		
.24	52.17	27	27	28	29	30	31	32	33	34	35		
.20	52.13	35	36	37	38	39	40	41	42	43	43		
.16	52. 9	44	45	46	47	48	49	50	51	51	52		
.12	52. 5	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	1	0
. 8	52. 0	9	10	11	11	12	13	14	15	16	17	2	1
. 3	51.56	18	18	19	20	21	22	23	24	25	25	3	1
.59	51.52	26	27	28	29	30	31	32	32	33	34	4	2
.55	51.47	35	36	37	38	39	40	40	41	42	43	5	2
.50	51.43	44	45	46	47	47	48	49	50	51	52	6	2
												7	3
.46	51.39	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	8	3
.42	51.34	9	10	10	11	12	13	14	15	16	17	9	4
.37	51.30	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25		
.33	51.24	26	27	28	29	30	30	31	32	33	34		
.28	51.20	35	36	37	37	38	39	40	41	42	43		
.24	51.16	44	44	45	46	47	48	49	50	50	51		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59
30°. 0′	44′. 16″	45′. 7″	45′. 59″	46′. 51″	47′. 43″	48′. 35″	49′. 2
10	44 . 12	45 . 3	45 . 55	46 . 47	47 . 39	48 . 31	49 . 2
20	44 . 7	44 . 59	45 . 51	46 . 43	47 . 35	48 . 26	49 . 1
30	44 . 3	44 . 55	45 . 47	46 . 39	47 . 30	48 . 22	49 . 1
40	43 . 59	44 . 51	45 . 43	46 . 34	47 . 26	48 . 17	49 .
50	43 . 55	44 . 47	45 . 38	46 . 30	47 . 21	48 . 13	49 .
31 . 0	43 . 51	44 . 43	45 . 34	46 . 25	47 . 17	48 . 8	49 .
10	43 . 47	44 . 38	45 . 30	46 . 21	47 . 12	48 . 4	48 . 5
20	43 . 43	44 . 34	45 . 25	46 . 17	47 . 8	47 . 59	48 . 5
30	43 . 39	44 . 30	45 . 21	46 . 12	47 . 3	47 . 54	48 . 4
40	43 . 34	44 . 25	45 . 16	46 . 8	46 . 59	47 . 50	48 . 4
50	43 . 30	44 . 21	45 . 12	46 . 3	46 . 54	47 . 45	48 . 3
32 . 0	43 . 16	44 . 17	45 . 8	45 . 58	46 . 49	47 . 40	48 . 3
10	43 . 21	44 . 12	45 . 3	45 . 54	46 . 45	47 . 35	48 . 2
20	43 . 17	44 . 8	44 . 58	45 . 49	46 . 40	47 . 31	48 . 2
30	43 . 13	44 . 3	44 . 54	45 . 45	46 . 35	47 . 26	48 . 1
40	43 . 8	43 . 59	44 . 49	45 . 40	46 . 30	47 . 21	48 . 1
50	43 . 4	43 . 53	44 . 45	45 . 35	46 . 26	47 . 16	48 .
33 . 0	42 . 59	43 . 50	44 . 40	45 . 30	46 . 21	47 . 11	48 .
10	42 . 55	43 . 45	44 . 35	45 . 26	46 . 16	47 . 6	47 . 5
20	42 . 50	43 . 39	44 . 31	45 . 21	46 . 11	47 . 1	47 . 5
30	42 . 46	43 . 36	44 . 26	45 . 16	46 . 6	46 . 56	47 . 4
40	42 . 41	43 . 31	44 . 21	45 . 11	46 . 1	46 . 51	47 . 4
50	42 . 37	43 . 26	44 . 16	45 . 6	45 . 56	46 . 46	47 . 3
34 . 0	42 . 32	43 . 22	44 . 12	45 . 1	45 . 51	46 . 41	47 . 3
10	42 . 27	43 . 17	44 . 7	44 . 56	45 . 46	46 . 36	47 . 2
20	42 . 23	43 . 12	44 . 2	44 . 51	45 . 41	46 . 30	47 . 2
30	42 . 18	43 . 7	43 . 57	44 . 46	45 . 36	46 . 25	47 . 1
40	42 . 13	43 . 3	43 . 52	44 . 41	45 . 31	46 . 20	47 .
50	42 . 8	42 . 58	43 . 47	44 . 36	45 . 25	46 . 15	47 .
35 . 0	42 . 4	42 . 53	43 . 42	44 . 31	45 . 20	46 . 9	46 .
10	41 . 59	42 . 48	43 . 37	44 . 26	45 . 15	46 . 4	46 .
20	41 . 54	42 . 43	43 . 32	44 . 21	45 . 10	45 . 59	46 .
30	41 . 49	42 . 38	43 . 27	44 . 16	45 . 5	45 . 53	46 .
40	41 . 44	42 . 33	43 . 22	44 . 10	44 . 59	45 . 48	46
50	41 . 39	42 . 28	43 . 17	44 . 5	44 . 54	45 . 43	46 .

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

60′	61′	Parties proportionnelles pour la parallaxe. 0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″	Pour la hauteur.	—
. 19″	51′. 11″	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	1′	0″
. 15	51 . 6	9	9	10	11	12	13	14	15	16	16	2	1
. 10	51 . 2	17	18	19	20	21	22	22	23	24	25	3	1
. 5	50 . 57	26	27	28	28	29	30	31	32	33	34	4	2
. 1	50 . 51	34	35	36	37	38	39	40	41	41	42	5	2
. 56	50 . 47	43	44	45	46	47	47	48	49	50	51	6	3
												7	3
. 51	50 . 43	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	8	4
. 46	50 . 38	9	9	10	11	12	13	14	15	15	16	9	4
. 42	50 . 33	17	18	19	20	20	21	22	23	24	25		
. 37	50 . 28	26	26	27	28	29	30	31	32	32	33		
. 32	50 . 23	34	35	36	37	38	38	39	40	41	42		
. 27	50 . 18	43	44	44	45	46	47	48	49	49	50		
. 22	50 . 13	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	1	0
. 17	50 . 8	8	9	10	11	12	13	13	14	15	16	2	1
. 12	50 . 3	17	18	19	19	20	21	22	23	24	24	3	1
. 7	49 . 58	25	26	27	28	29	30	30	31	32	33	4	2
. 2	49 . 52	34	35	35	36	37	38	39	40	40	41	5	2
. 57	49 . 47	42	43	44	45	46	47	47	48	49	50	6	3
												7	3
. 52	49 . 42	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	8	4
. 46	49 . 37	8	9	10	11	12	13	13	14	15	16	9	4
. 41	49 . 31	17	18	18	19	20	21	22	23	23	24		
. 36	49 . 26	25	26	27	28	28	29	30	31	32	33		
. 31	49 . 21	33	34	35	36	37	38	38	39	40	41		
. 26	49 . 15	42	43	43	44	45	46	47	48	48	49		
. 20	49 . 10	0	1	2	2	3	4	5	6	7	7	1	1
. 15	49 . 4	8	9	10	11	12	12	13	14	15	16	2	1
. 9	48 . 59	16	17	18	19	20	21	21	22	23	24	3	2
. 4	48 . 54	25	26	26	27	28	29	30	30	31	32	4	2
. 59	48 . 48	33	34	35	35	36	37	38	39	40	40	5	3
. 53	48 . 42	41	42	43	44	44	45	46	47	48	49	6	3
												7	4
. 48	48 . 37	0	1	2	2	3	4	5	6	7	7	8	4
. 42	48 . 31	8	9	10	11	11	12	13	14	15	15	9	5
. 37	48 . 26	16	17	18	19	20	20	21	22	23	24		
. 31	48 . 20	24	25	26	27	28	28	29	30	31	32		
. 25	48 . 14	33	33	34	35	36	37	37	38	39	40		
. 20	48 . 8	41	42	42	43	44	45	46	46	47	48		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
36°. 0′	41′. 34″	42′. 23″	43′. 11″	44′. 0″	44′. 49″	45′. 37″	46′. 26
10	41. 29	42. 18	43. 6	43. 55	44. 43	45. 32	46. 20
20	41. 24	42. 13	43. 1	43. 49	44. 38	45. 26	46. 14
30	41. 19	42. 8	42. 56	43. 44	44. 32	45. 21	46. 9
40	41. 14	42. 2	42. 51	43. 39	44. 27	45. 15	46. 3
50	41. 9	41. 57	42. 46	43. 33	44. 21	45. 9	45. 57
37. 0	41. 4	41. 52	42. 40	43. 28	44. 16	45. 4	45. 52
10	40. 59	41. 47	42. 35	43. 22	44. 10	44. 58	45. 46
20	40. 54	41. 42	42. 29	43. 17	44. 5	44. 52	45. 40
30	40. 49	41. 36	42. 24	43. 12	43. 59	44. 47	45. 34
40	40. 43	41. 31	42. 18	43. 6	43. 53	44. 41	45. 28
50	40. 38	41. 26	42. 13	43. 0	43. 48	44. 35	45. 23
38. 0	40. 33	41. 20	42. 8	42. 55	43. 42	44. 29	45. 17
10	40. 28	41. 15	42. 2	42. 49	43. 36	44. 24	45. 11
20	40. 22	41. 10	41. 57	42. 44	43. 31	44. 18	45. 5
30	40. 17	41. 4	41. 51	42. 38	43. 25	44. 12	44. 59
40	40. 12	40. 59	41. 45	42. 32	43. 19	44. 6	44. 53
50	40. 6	40. 53	41. 40	42. 27	43. 13	44. 0	44. 47
39. 0	40. 1	40. 48	41. 34	42. 21	43. 8	43. 54	44. 41
10	39. 56	40. 42	41. 29	42. 15	43. 2	43. 48	44. 35
20	39. 50	40. 37	41. 23	42. 9	42. 56	43. 42	44. 29
30	39. 45	40. 31	41. 17	42. 4	42. 50	43. 36	44. 23
40	39. 39	40. 25	41. 12	41. 58	42. 44	43. 30	44. 16
50	39. 34	40. 20	41. 6	41. 52	42. 38	43. 24	44. 10
40. 0	39. 28	40. 14	41. 0	41. 46	42. 32	43. 18	44. 4
10	39. 23	40. 8	40. 54	41. 40	42. 26	43. 12	43. 58
20	39. 17	40. 3	40. 48	41. 34	42. 20	43. 6	43. 51
30	39. 11	39. 57	40. 43	41. 28	42. 14	43. 0	43. 45
40	39. 6	39. 51	40. 37	41. 22	42. 8	42. 53	43. 39
50	39. 0	39. 46	40. 31	41. 16	42. 2	42. 47	43. 33
41. 0	38. 54	39. 40	40. 25	41. 10	41. 56	42. 41	43. 26
10	38. 49	39. 34	40. 19	41. 4	41. 50	42. 35	43. 20
20	38. 43	39. 28	40. 13	40. 58	41. 43	42. 28	43. 13
30	38. 37	39. 22	40. 7	40. 52	41. 37	42. 22	43.
40	38. 32	39. 16	40. 1	40. 46	41. 31	42. 16	43. 0
50	38. 26	39. 11	39. 55	40. 40	41. 25	42. 9	42. 54

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.									Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
. 14″	48′. 3″	0	1	2	2	3	4	5	6	6	7	1′	1″
. 8	47 . 57	8	9	10	10	11	12	13	14	14	15	2	1
. 3	47 . 51	16	17	18	18	19	20	21	22	23	23	3	2
. 57	47 . 45	24	25	26	27	27	28	29	30	31	31	4	2
. 51	47 . 39	32	33	34	35	35	36	37	38	39	39	5	3
. 45	47 . 33	40	41	42	43	43	44	45	46	47	47	6	3
												7	4
. 40	47 . 28	0	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	4
. 34	47 . 22	8	9	10	10	11	12	13	13	14	15	9	5
. 28	47 . 16	16	17	17	18	19	20	21	21	22	23		
. 22	47 . 10	24	25	25	26	27	28	29	29	30	31		
. 16	47 . 3	32	33	33	34	35	36	36	37	38	39		
. 10	46 . 57	40	40	41	42	43	44	44	45	46	47		
. 4	46 . 51	0	1	2	2	3	4	5	5	6	7	1	1
. 58	46 . 45	8	9	9	10	11	12	13	13	14	15	2	1
. 52	46 . 39	16	16	17	18	19	20	20	21	22	23	3	2
. 46	46 . 33	23	24	25	26	27	27	28	29	30	31	4	2
. 40	46 . 27	31	32	33	34	34	35	36	37	38	38	5	3
. 34	46 . 20	39	40	41	41	42	43	44	45	45	46	6	3
												7	4
. 27	46 . 14	0	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8	4
. 21	46 . 8	8	9	9	10	11	12	12	13	14	15	9	5
. 15	46 . 1	15	16	17	18	19	19	20	21	22	23		
. 9	45 . 55	23	24	25	25	26	27	28	29	29	30		
. 3	45 . 49	31	32	32	33	34	35	36	36	37	38		
. 56	45 . 42	39	39	40	41	42	42	43	44	45	46		
. 50	45 . 36	0	1	1	2	3	4	5	5	6	7	1	1
. 44	45 . 29	8	8	9	10	11	11	12	13	14	14	2	1
. 37	45 . 23	15	16	17	17	18	19	20	21	21	22	3	2
. 31	45 . 17	23	24	24	25	26	27	27	28	29	30	4	2
. 24	45 . 10	30	31	32	33	33	34	35	36	36	37	5	3
. 18	45 . 3	38	39	40	40	41	42	43	43	44	45	6	4
												7	4
. 11	44 . 57	0	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	5
. 5	44 . 50	7	8	9	10	10	11	12	13	13	14	9	5
. 58	44 . 43	15	16	16	17	18	19	19	20	21	22		
. 52	44 . 37	22	23	24	25	25	26	27	28	28	29		
. 45	44 . 30	30	31	31	32	33	34	34	35	36	37		
. 39	44 . 23	37	38	39	40	40	41	42	43	43	44		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
42°. 0′	38′. 20″	39′. 5″	39′. 49″	40′. 34″	41′. 18″	42′. 3″	42′. 4
10	38 . 14	38 . 59	39 . 43	40 . 28	41 . 12	41 . 56	42 . 4
20	38 . 8	38 . 53	39 . 37	40 . 21	41 . 6	41 . 50	42 . 3
30	38 . 2	38 . 47	39 . 31	40 . 15	40 . 59	41 . 44	42 . 28
40	37 . 57	38 . 41	39 . 25	40 . 9	40 . 53	41 . 37	42 . 21
50	37 . 51	38 . 35	39 . 19	40 . 3	40 . 47	41 . 31	42 . 15
43 . 0	37 . 45	38 . 29	39 . 12	39 . 56	40 . 40	41 . 24	42 . 8
10	37 . 39	38 . 22	39 . 6	39 . 50	40 . 34	41 . 17	42 . 1
20	37 . 33	38 . 16	39 . 0	39 . 44	40 . 27	41 . 11	41 . 55
30	37 . 27	38 . 10	38 . 54	39 . 37	40 . 21	41 . 4	41 . 48
40	37 . 21	38 . 4	38 . 47	39 . 31	40 . 14	40 . 58	41 . 41
50	37 . 15	37 . 58	38 . 41	39 . 24	40 . 8	40 . 51	41 . 34
44 . 0	37 . 9	37 . 52	38 . 35	39 . 18	40 . 1	40 . 44	41 . 28
10	37 . 2	37 . 44	38 . 28	39 . 11	39 . 54	40 . 37	41 . 20
20	36 . 56	37 . 39	38 . 22	39 . 5	39 . 48	40 . 31	41 . 14
30	36 . 50	37 . 33	38 . 16	38 . 59	39 . 41	40 . 24	41 . 7
40	36 . 44	37 . 27	38 . 9	38 . 52	39 . 35	40 . 17	41 . 0
50	36 . 38	37 . 20	38 . 3	38 . 46	39 . 28	40 . 11	40 . 53
45 . 0	36 . 32	37 . 14	37 . 56	38 . 39	39 . 21	40 . 4	40 . 46
10	36 . 25	37 . 8	37 . 50	38 . 32	39 . 15	39 . 57	40 . 39
20	36 . 19	37 . 1	37 . 44	38 . 26	39 . 8	39 . 50	40 . 32
30	36 . 13	36 . 55	37 . 37	38 . 19	39 . 1	39 . 43	40 . 25
40	36 . 7	36 . 49	37 . 31	38 . 12	38 . 54	39 . 36	40 . 18
50	36 . 0	36 . 42	37 . 24	38 . 6	38 . 48	39 . 29	40 . 11
46 . 0	35 . 54	36 . 36	37 . 17	37 . 59	38 . 41	39 . 22	40 . 4
10	35 . 48	36 . 29	37 . 11	37 . 52	38 . 34	39 . 15	39 . 57
20	35 . 41	36 . 23	37 . 4	37 . 46	38 . 27	39 . 8	39 . 50
30	35 . 35	36 . 16	36 . 58	37 . 39	38 . 20	39 . 1	39 . 43
40	35 . 29	36 . 9	36 . 51	37 . 32	38 . 13	38 . 54	39 . 36
50	35 . 22	36 . 3	36 . 44	37 . 26	38 . 6	38 . 47	39 . 28
47 . 0	35 . 16	35 . 57	36 . 38	37 . 18	37 . 59	38 . 40	39 . 21
10	35 . 9	35 . 50	36 . 31	37 . 12	37 . 52	38 . 33	39 . 14
20	35 . 3	35 . 43	36 . 24	37 . 5	37 . 45	38 . 26	39 . 7
30	34 . 56	35 . 37	36 . 17	36 . 58	37 . 38	38 . 19	38 . 59
40	34 . 50	35 . 30	36 . 10	36 . 51	37 . 31	38 . 12	38 . 52
50	34 . 43	35 . 23	36 . 4	36 . 44	37 . 24	38 . 5	38 . 45

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
43′. 32″	44′. 17″	0	1	1	2	3	4	4	5	6	7	1′	1″
43 . 25	44 . 10	7	8	9	10	10	11	12	13	13	14	2	1
43 . 19	44 . 3	15	15	16	17	18	18	19	20	21	21	3	2
43 . 12	43 . 56	22	23	24	24	25	26	27	27	28	29	4	3
43 . 5	43 . 49	29	30	31	32	32	33	34	35	35	36	5	3
42 . 59	43 . 43	37	38	38	39	40	41	41	42	43	43	6	4
												7	5
42 . 52	43 . 36	0	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	5
42 . 45	43 . 29	7	8	9	9	10	11	12	12	13	14	9	6
42 . 38	43 . 22	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21		
42 . 31	43 . 15	22	22	23	24	25	25	26	27	28	28		
42 . 24	43 . 8	29	30	30	31	32	33	33	34	35	36		
42 . 18	43 . 1	36	37	38	38	39	40	41	41	42	43		
42 . 11	42 . 54	0	1	1	2	3	4	4	5	6	6	1	1
42 . 4	42 . 47	7	8	9	9	10	11	11	12	13	14	2	1
41 . 57	42 . 40	14	15	16	16	17	18	19	19	20	21	3	2
41 . 50	42 . 33	21	22	23	24	24	25	26	26	27	28	4	3
41 . 43	42 . 25	29	29	30	31	31	32	33	34	34	35	5	3
41 . 36	42 . 18	36	36	37	38	39	39	40	41	41	42	6	4
												7	5
41 . 29	42 . 11	0	1	1	2	3	4	4	5	6	6	8	5
41 . 22	42 . 4	7	8	8	9	10	11	11	12	13	13	9	6
41 . 14	41 . 57	14	15	15	16	17	18	18	19	20	20		
41 . 7	41 . 49	21	22	22	23	24	25	25	26	27	27		
41 . 0	41 . 42	28	29	29	30	31	32	32	33	34	34		
40 . 53	41 . 35	35	36	36	37	38	39	39	40	41	41		
40 . 46	41 . 27	0	1	1	2	3	4	4	5	6	6	1	1
40 . 39	41 . 20	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	2	1
40 . 31	41 . 13	14	14	15	16	17	17	18	19	19	20	3	2
40 . 24	41 . 5	21	21	22	23	23	24	25	25	26	27	4	3
40 . 17	40 . 58	28	28	29	30	30	31	32	32	33	34	5	4
40 . 9	40 . 50	34	35	36	36	37	38	39	39	40	41	6	4
												7	5
40 . 2	40 . 43	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	8	6
39 . 55	40 . 36	7	7	8	9	9	10	11	11	12	13	9	6
39 . 47	40 . 28	14	14	15	16	16	17	18	18	19	20		
39 . 40	40 . 20	20	21	22	22	23	24	24	25	26	26		
39 . 33	40 . 13	27	28	28	29	30	30	31	32	32	33		
39 . 25	40 . 5	34	34	35	36	37	37	38	39	39	40		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
48°. 0′	34′. 37″	35′. 17″	35′. 57″	36′. 37″	37′. 17″	37′. 57″	38′. 37″
10	34 . 30	35 . 10	35 . 50	36 . 30	37 . 10	37 . 50	38 . 30
20	34 . 23	35 . 3	35 . 43	36 . 23	37 . 3	37 . 43	38 . 23
30	34 . 17	34 . 56	35 . 36	36 . 16	36 . 56	37 . 36	38 . 15
40	34 . 10	34 . 50	35 . 29	36 . 9	36 . 49	37 . 28	38 . 8
50	34 . 3	34 . 43	35 . 22	36 . 2	36 . 41	37 . 21	38 . 0
49 . 0	33 . 57	34 . 36	35 . 16	35 . 55	36 . 34	37 . 14	37 . 53
10	33 . 50	34 . 29	35 . 9	35 . 48	36 . 27	37 . 6	37 . 45
20	33 . 43	34 . 22	35 . 2	35 . 41	36 . 20	36 . 59	37 . 38
30	33 . 37	34 . 16	34 . 55	35 . 34	36 . 12	36 . 51	37 . 30
40	33 . 30	34 . 9	34 . 48	35 . 26	36 . 5	36 . 44	37 . 23
50	33 . 23	34 . 2	34 . 40	35 . 19	37 . 58	36 . 37	37 . 15
50 . 0	33 . 16	33 . 55	34 . 33	35 . 12	35 . 51	36 . 29	37 . 8
10	33 . 9	33 . 48	34 . 26	35 . 5	35 . 43	36 . 22	37 . 0
20	33 . 3	33 . 41	34 . 19	34 . 58	35 . 36	36 . 14	36 . 52
30	32 . 56	33 . 34	34 . 12	34 . 50	35 . 28	36 . 7	36 . 45
40	32 . 49	33 . 27	34 . 5	34 . 43	35 . 21	35 . 59	36 . 37
50	32 . 42	33 . 20	33 . 58	34 . 36	35 . 14	35 . 51	36 . 29
51 . 0	32 . 35	33 . 13	33 . 51	34 . 28	35 . 6	35 . 44	36 . 22
10	32 . 28	33 . 6	33 . 43	34 . 21	34 . 59	35 . 36	36 . 14
20	32 . 21	32 . 59	33 . 36	34 . 14	34 . 51	35 . 29	36 . 6
30	32 . 14	32 . 52	33 . 29	34 . 6	34 . 44	35 . 21	35 . 58
40	32 . 7	32 . 45	33 . 22	33 . 59	34 . 36	35 . 13	35 . 51
50	32 . 0	32 . 37	33 . 14	33 . 52	34 . 29	35 . 6	35 . 43
52 . 0	31 . 53	32 . 30	33 . 7	33 . 44	34 . 21	34 . 58	35 . 35
10	31 . 46	32 . 23	33 . 0	33 . 37	34 . 13	34 . 50	35 . 27
20	31 . 39	32 . 16	32 . 53	33 . 29	34 . 6	34 . 43	35 . 19
30	31 . 32	32 . 9	32 . 45	33 . 22	33 . 58	34 . 35	35 . 11
40	31 . 25	32 . 1	32 . 38	33 . 14	33 . 51	34 . 27	35 . 3
50	31 . 18	31 . 54	32 . 30	33 . 7	33 . 43	34 . 49	34 . 55
53 . 0	31 . 11	31 . 47	32 . 23	32 . 59	33 . 35	34 . 11	34 . 48
10	31 . 4	31 . 40	32 . 16	32 . 52	33 . 28	34 . 4	34 . 40
20	30 . 57	31 . 32	32 . 8	32 . 44	33 . 20	33 . 56	34 . 32
30	30 . 49	31 . 25	32 . 1	32 . 36	33 . 12	33 . 48	34 . 24
40	30 . 42	31 . 18	31 . 53	32 . 29	33 . 4	33 . 40	34 . 15
50	30 . 35	31 . 10	31 . 45	32 . 21	32 . 57	33 . 32	34 . 7

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
39′. 18″	39′. 58″	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	1′	1′
39 . 10	39 . 50	7	7	8	9	9	10	11	11	12	13	2	1
39 . 3	39 . 42	13	14	15	15	16	17	17	18	19	19	3	2
38 . 55	39 . 35	20	21	21	22	23	23	24	25	25	26	4	3
38 . 47	39 . 27	27	27	28	29	29	30	30	31	32	32	5	4
38 . 40	39 . 19	33	34	34	35	36	36	37	38	38	39	6	4
												7	5
38 . 32	39 . 12	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	8	6
38 . 25	39 . 4	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	9	6
38 . 17	38 . 56	13	14	14	15	16	16	17	18	18	19		
38 . 9	38 . 48	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25		
38 . 2	38 . 41	26	27	27	28	29	29	30	31	31	32		
37 . 54	38 . 33	32	33	34	34	35	36	36	37	38	38		
37 . 46	38 . 25	0	1	1	2	3	3	4	4	5	6	1	1
37 . 38	38 . 17	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	2	2
37 . 31	38 . 9	13	13	14	15	15	16	17	17	18	18	3	2
37 . 23	38 . 1	19	20	20	21	22	22	23	24	24	25	4	3
37 . 15	37 . 53	25	26	27	27	28	29	29	30	31	31	5	4
37 . 7	37 . 45	32	32	33	34	34	35	36	36	37	38	6	5
												7	5
36 . 59	37 . 37	0	1	1	2	3	3	4	4	5	6	8	6
36 . 52	37 . 29	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12	9	7
36 . 44	37 . 21	12	13	14	14	15	16	16	17	17	18		
36 . 36	37 . 13	19	19	20	21	21	22	22	23	24	24		
36 . 28	37 . 5	25	26	26	27	27	28	29	29	30	30		
36 . 20	36 . 57	31	32	32	33	34	34	35	35	36	37		
36 . 12	36 . 49	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	1	1
36 . 4	36 . 41	6	7	7	8	9	9	10	10	11	12	2	2
35 . 56	36 . 33	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	3	2
35 . 48	36 . 24	18	19	19	20	21	21	22	23	23	24	4	3
35 . 40	36 . 16	24	25	26	26	27	27	28	29	29	30	5	4
35 . 32	36 . 8	30	31	32	32	33	33	34	35	35	36	6	5
												7	5
35 . 24	36 . 0	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	8	6
35 . 15	35 . 51	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11	9	7
35 . 17	35 . 43	12	12	13	14	14	15	15	16	17	17		
34 . 59	35 . 35	18	18	19	20	20	21	21	22	23	23		
34 . 51	35 . 27	24	24	25	26	26	27	27	28	29	29		
34 . 43	35 . 18	30	30	31	32	32	33	33	34	35	35		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
54°. 0′	30′. 28″	31′. 3″	31′. 38″	32′. 13″	32′. 49″	33′. 24″	33′. 59″
10	30 . 21	30 . 56	31 . 31	32 . 6	32 . 41	33 . 16	33 . 51
20	30 . 13	30 . 48	31 . 23	31 . 58	32 . 33	33 . 8	33 . 43
30	30 . 6	30 . 41	31 . 16	31 . 51	32 . 25	33 . 0	33 . 35
40	29 . 59	30 . 33	31 . 8	31 . 43	32 . 18	32 . 52	33 . 27
50	29 . 51	30 . 26	31 . 1	31 . 35	32 . 10	32 . 44	33 . 19
55 . 0	29 . 44	30 . 19	30 . 53	31 . 27	32 . 2	32 . 36	33 . 11
10	29 . 37	30 . 11	30 . 45	31 . 20	31 . 54	32 . 28	33 . 2
20	29 . 29	30 . 4	30 . 38	31 . 12	31 . 46	32 . 20	32 . 54
30	29 . 22	29 . 56	30 . 30	31 . 4	31 . 38	32 . 12	32 . 46
40	29 . 15	29 . 47	30 . 21	30 . 55	31 . 29	32 . 3	32 . 37
50	29 . 7	29 . 40	30 . 14	30 . 47	31 . 21	31 . 55	32 . 28
56 . 0	29 . 0	29 . 33	30 . 7	30 . 40	31 . 14	31 . 48	32 . 21
10	28 . 52	29 . 26	29 . 59	30 . 33	31 . 6	31 . 39	32 . 14
20	28 . 45	29 . 18	29 . 51	30 . 25	30 . 58	31 . 31	32 . 4
30	28 . 37	29 . 11	29 . 44	30 . 17	30 . 50	31 . 23	31 . 56
40	28 . 30	29 . 3	29 . 36	30 . 9	30 . 42	31 . 15	31 . 48
50	28 . 22	28 . 55	29 . 28	30 . 1	30 . 34	31 . 7	31 . 39
57 . 0	28 . 15	28 . 48	29 . 20	29 . 53	30 . 26	30 . 58	31 . 31
10	28 . 7	28 . 40	29 . 12	29 . 45	30 . 18	30 . 50	31 . 22
20	28 . 0	28 . 32	29 . 5	29 . 37	30 . 9	30 . 42	31 . 14
30	27 . 52	28 . 24	28 . 57	29 . 29	30 . 1	30 . 33	31 . 6
40	27 . 45	28 . 17	28 . 49	29 . 21	29 . 53	30 . 25	30 . 57
50	27 . 37	28 . 9	28 . 41	29 . 13	29 . 45	30 . 17	30 . 49
58 . 0	27 . 30	28 . 1	28 . 33	29 . 5	29 . 37	30 . 9	30 . 40
10	27 . 22	27 . 53	28 . 25	28 . 57	29 . 29	30 . 0	30 . 32
20	27 . 14	27 . 46	28 . 17	28 . 49	29 . 20	29 . 52	30 . 23
30	27 . 7	27 . 38	28 . 9	28 . 41	29 . 12	29 . 43	30 . 15
40	26 . 59	27 . 30	28 . 1	28 . 33	29 . 4	29 . 35	30 . 6
50	26 . 51	27 . 22	27 . 53	28 . 24	28 . 56	29 . 27	29 . 58
59 . 0	26 . 44	27 . 15	27 . 45	28 . 16	28 . 47	29 . 18	29 . 49
10	26 . 36	27 . 7	27 . 37	28 . 8	28 . 39	29 . 10	29 . 40
20	26 . 28	26 . 59	27 . 30	28 . 0	28 . 31	29 . 1	29 . 32
30	26 . 20	26 . 51	27 . 21	27 . 52	28 . 22	28 . 53	29 . 23
40	26 . 13	26 . 43	27 . 13	27 . 44	28 . 14	28 . 44	29 . 14
50	26 . 5	26 . 35	27 . 5	27 . 35	28 . 6	28 . 36	29 . 6

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
34′. 35″	35′. 10″	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	1′	1″
34 . 26	35 . 2	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	2	2
34 . 18	34 . 53	12	12	13	13	14	15	15	16	16	17	3	2
34 . 10	34 . 45	17	18	19	19	20	20	21	21	22	23	4	3
34 . 2	34 . 36	23	24	24	25	26	26	27	27	28	28	5	4
33 . 53	34 . 28	29	30	30	31	31	32	32	33	34	34	6	5
												7	6
33 . 45	34 . 19	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	8	6
33 . 37	34 . 11	6	6	7	7	8	8	9	10	10	11	9	7
33 . 28	34 . 2	11	12	12	13	14	14	15	15	16	16		
33 . 20	33 . 54	17	18	18	19	19	20	20	21	22	22		
33 . 11	33 . 44	23	23	24	24	25	25	26	27	27	28		
33 . 2	33 . 36	28	29	29	30	31	31	32	32	33	33		
32 . 55	33 . 28	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	1	1
32 . 46	33 . 20	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	2	2
32 . 38	33 . 11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	3	2
32 . 29	33 . 2	17	17	18	18	19	19	20	20	21	22	4	3
32 . 21	32 . 54	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	5	4
32 . 12	32 . 45	28	28	29	29	30	30	31	31	32	33	6	5
												7	6
32 . 4	32 . 36	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	8	6
31 . 55	32 . 28	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	9	7
31 . 47	32 . 19	11	11	12	12	13	13	14	19	15	16		
31 . 38	32 . 10	16	17	17	18	18	18	19	20	20	21		
31 . 29	32 . 1	21	22	23	23	24	24	25	25	26	26		
31 . 21	31 . 53	27	27	28	28	29	30	30	31	31	32		
31 . 12	31 . 44	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	1	1
31 . 3	31 . 35	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	2	2
30 . 55	31 . 26	10	11	11	12	13	13	14	14	15	15	3	3
30 . 46	31 . 17	16	16	17	17	18	18	19	19	20	20	4	3
30 . 37	31 . 9	21	21	22	22	23	23	24	25	25	26	5	4
30 . 29	31 . 0	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31	6	5
												7	6
30 . 20	30 . 51	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	8	7
30 . 11	30 . 42	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	9	7
30 . 2	30 . 33	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15		
29 . 54	30 . 24	15	16	16	17	17	18	18	19	19	20		
29 . 45	30 . 15	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25		
29 . 36	30 . 6	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
60° . 0′	25′. 57″	26′. 27″	26′. 57″	27′. 27″	27′. 57″	28′. 27″	28′. 57″
10	25 . 49	26 . 19	26 . 49	27 . 19	27 . 49	28 . 19	28 . 48
20	25 . 41	26 . 11	26 . 41	27 . 11	27 . 40	28 . 10	28 . 40
30	25 . 34	26 . 3	26 . 33	27 . 2	27 . 32	28 . 1	28 . 31
40	25 . 26	25 . 55	26 . 25	26 . 54	27 . 23	27 . 53	28 . 22
50	25 . 18	25 . 47	26 . 16	26 . 46	27 . 15	27 . 44	28 . 13
61 . 0	25 . 10	25 . 39	26 . 8	26 . 37	27 . 6	27 . 36	28 . 5
10	25 . 2	25 . 31	26 . 0	26 . 29	26 . 58	27 . 27	27 . 56
20	24 . 54	25 . 23	25 . 52	26 . 21	26 . 49	27 . 18	27 . 47
30	24 . 46	25 . 15	25 . 44	26 . 12	26 . 41	27 . 10	27 . 38
40	24 . 39	25 . 7	25 . 35	26 . 4	26 . 32	27 . 1	27 . 29
50	24 . 31	24 . 59	25 . 27	25 . 56	26 . 24	26 . 52	27 . 21
62 . 0	24 . 23	24 . 51	25 . 19	25 . 47	26 . 15	26 . 43	27 . 12
10	24 . 15	24 . 43	25 . 11	25 . 39	26 . 7	26 . 35	27 . 3
20	24 . 7	24 . 35	25 . 2	25 . 30	25 . 58	26 . 26	26 . 54
30	23 . 59	24 . 26	24 . 54	25 . 22	25 . 50	26 . 17	26 . 45
40	23 . 51	24 . 17	24 . 46	25 . 13	25 . 41	26 . 8	26 . 36
50	23 . 43	24 . 10	24 . 38	25 . 5	25 . 32	26 . 0	26 . 27
63 . 0	23 . 35	24 . 2	24 . 29	24 . 56	25 . 24	25 . 51	26 . 18
10	23 . 27	23 . 54	24 . 21	24 . 48	25 . 15	25 . 42	26 . 9
20	23 . 19	23 . 45	24 . 12	24 . 39	25 . 6	25 . 33	26 . 0
30	23 . 11	23 . 37	24 . 4	24 . 31	24 . 58	25 . 24	25 . 51
40	23 . 2	23 . 29	23 . 56	24 . 22	24 . 49	25 . 15	25 . 42
50	22 . 54	23 . 21	23 . 47	24 . 14	24 . 40	25 . 7	25 . 35
64 . 0	22 . 46	23 . 11	23 . 39	24 . 5	24 . 31	24 . 58	25 . 24
10	22 . 38	23 . 4	23 . 30	23 . 57	24 . 23	24 . 49	25 . 15
20	22 . 30	22 . 56	23 . 22	23 . 48	24 . 14	24 . 40	25 . 6
30	22 . 22	22 . 48	23 . 14	23 . 39	24 . 5	24 . 31	24 . 57
40	22 . 14	22 . 39	23 . 5	23 . 31	23 . 56	24 . 22	24 . 48
50	22 . 6	22 . 31	22 . 57	23 . 22	23 . 48	24 . 13	24 . 39
65 . 0	21 . 57	22 . 23	22 . 48	23 . 13	23 . 39	24 . 4	24 . 30
10	21 . 49	22 . 14	22 . 40	23 . 5	23 . 30	23 . 55	24 . 20
20	21 . 41	22 . 6	22 . 31	22 . 56	23 . 21	23 . 46	24 . 11
30	21 . 33	21 . 58	22 . 23	22 . 47	23 . 12	23 . 37	24 . 2
40	21 . 25	21 . 49	22 . 14	22 . 39	23 . 3	23 . 28	23 . 53
50	21 . 16	21 . 41	22 . 5	22 . 30	22 . 55	23 . 19	23 . 44

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
29′. 27″	29′. 57″	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	1′	1″
29. 18	29. 48	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	2	2
29. 9	29. 39	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	3	3
29. 1	29. 30	15	15	16	16	17	17	18	18	19	19	4	3
28. 52	29. 21	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	5	4
28. 43	29. 12	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	6	5
												7	6
28. 34	29. 3	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	8	7
28. 25	28. 54	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	8
28. 16	28. 45	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14		
28. 7	28. 35	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19		
27. 58	28. 26	19	20	20	21	21	21	22	22	23	23		
27. 49	28. 17	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28		
27. 40	28. 8	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	1	1
27. 31	27. 59	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	2	2
27. 22	27. 50	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	3	3
27. 13	27. 40	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	4	4
27. 4	27. 31	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	5	4
26. 54	27. 22	23	24	24	24	25	25	26	26	27	27	6	5
												7	6
26. 45	27. 13	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	8	7
26. 36	27. 3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	8
26. 27	26. 54	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13		
26. 18	26. 45	14	13	14	15	15	16	16	17	17	17		
26. 9	26. 35	18	18	19	19	20	20	21	21	21	22		
26. 0	26. 26	22	23	23	24	24	25	25	25	26	26		
25. 50	26. 17	0	0	1	1	2	2	3	3	3	4	1	1
25. 41	26. 7	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	2	2
25. 32	25. 58	9	9	9	10	10	11	11	12	12	12	3	3
25. 23	25. 48	13	13	14	14	15	15	15	16	16	17	4	4
25. 13	25. 39	17	18	18	18	19	19	20	20	21	21	5	4
25. 4	25. 30	22	22	22	23	23	24	24	25	25	25	6	5
												7	6
24. 55	25. 20	0	0	1	1	2	2	2	3	3	4	8	7
24. 46	25. 11	4	5	5	5	6	6	7	7	7	8	9	8
24. 36	25. 1	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12		
24. 27	24. 52	12	13	13	14	14	14	15	15	16	16		
24. 18	24. 42	17	17	17	18	18	19	19	19	20	20		
24. 8	24. 33	21	21	22	22	22	23	23	24	24	24		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
66°. 0′	21′. 8″	21′. 32″	21′. 57″	22′. 21″	22′. 46″	23′. 10″	23′. 34″
10	21 . 0	21 . 24	21 . 48	22 . 13	22 . 37	23 . 1	23 . 25
20	20 . 52	21 . 16	21 . 40	22 . 4	22 . 28	22 . 52	23 . 16
30	20 . 43	21 . 7	21 . 31	21 . 55	22 . 19	22 . 45	23 . 7
40	20 . 35	20 . 59	21 . 23	21 . 46	22 . 10	22 . 34	22 . 58
50	20 . 27	20 . 50	21 . 14	21 . 37	22 . 1	22 . 25	22 . 48
67 . 0	20 . 18	20 . 42	21 . 5	21 . 29	21 . 52	22 . 16	22 . 39
10	20 . 10	20 . 33	20 . 57	21 . 20	21 . 43	22 . 6	22 . 30
20	20 . 2	20 . 25	20 . 48	21 . 11	21 . 34	21 . 57	22 . 20
30	19 . 53	20 . 16	20 . 39	21 . 2	21 . 25	21 . 48	22 . 11
40	19 . 45	20 . 8	20 . 31	20 . 53	21 . 16	21 . 39	22 . 2
50	19 . 37	19 . 59	20 . 22	20 . 45	21 . 7	21 . 30	21 . 52
68 . 0	19 . 28	19 . 51	20 . 13	20 . 36	20 . 58	21 . 21	21 . 43
10	19 . 20	19 . 42	20 . 4	20 . 27	20 . 49	21 . 11	21 . 34
20	19 . 11	19 . 34	19 . 56	20 . 18	20 . 40	21 . 2	21 . 24
30	19 . 3	19 . 25	19 . 47	20 . 9	20 . 31	20 . 53	21 . 15
40	18 . 55	19 . 16	19 . 38	20 . 0	20 . 22	20 . 44	21 . 6
50	18 . 46	19 . 8	19 . 29	19 . 51	20 . 13	20 . 54	20 . 56
69 . 0	18 . 38	18 . 59	19 . 21	19 . 42	20 . 4	20 . 25	20 . 47
10	18 . 29	18 . 51	19 . 12	19 . 33	19 . 55	20 . 16	20 . 37
20	18 . 21	18 . 42	19 . 3	19 . 24	19 . 46	20 . 7	20 . 28
30	18 . 12	18 . 33	18 . 54	19 . 15	19 . 36	19 . 57	20 . 18
40	18 . 4	18 . 25	18 . 46	19 . 6	19 . 27	19 . 48	20 . 9
50	17 . 54	18 . 16	18 . 37	18 . 57	19 . 18	19 . 39	20 . 0
70 . 0	17 . 47	18 . 7	18 . 28	18 . 49	19 . 9	19 . 30	19 . 50
10	17 . 38	17 . 59	18 . 19	18 . 39	19 . 0	19 . 20	19 . 41
20	17 . 30	17 . 50	18 . 10	18 . 30	18 . 51	19 . 11	19 . 31
30	17 . 21	17 . 41	18 . 1	18 . 21	18 . 41	19 . 1	19 . 22
40	17 . 13	17 . 33	17 . 53	18 . 12	18 . 32	18 . 52	19 . 12
50	17 . 4	17 . 24	17 . 44	18 . 3	18 . 23	18 . 43	19 . 2
71 . 0	16 . 56	17 . 15	17 . 35	17 . 54	18 . 14	18 . 33	18 . 53
10	16 . 47	17 . 6	17 . 26	17 . 45	18 . 5	18 . 24	18 . 43
20	16 . 39	16 . 58	17 . 17	17 . 36	17 . 55	18 . 15	18 . 34
30	16 . 30	16 . 49	17 . 8	17 . 27	17 . 46	18 . 5	18 . 24
40	16 . 21	16 . 40	16 . 59	17 . 18	17 . 37	17 . 56	18 . 15
50	16 . 13	16 . 32	16 . 50	17 . 9	17 . 28	17 . 46	18 . 5

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

60′	61′	Parties proportionnelles pour la parallaxe. 0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″	Pour la hauteur.	—
3′. 59″	24′. 23″	0	0	1	1	2	2	2	3	3	4	1′	1″
. 50	24 . 14	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	2	2
. 40	24 . 4	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	3	3
. 31	23 . 55	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16	4	4
. 21	23 . 45	16	16	17	17	18	18	18	19	19	20	5	5
. 12	23 . 35	20	20	21	21	21	22	22	23	23	23	6	5
												7	6
. 2	23 . 26	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	8	7
. 53	23 . 16	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	9	8
. 44	23 . 7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11		
. 34	22 . 57	11	12	13	13	13	14	14	14	15			
. 25	22 . 47	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19		
. 15	22 . 38	19	19	20	20	21	21	21	22	22	22		
. 6	22 . 28	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	1	1
. 56	22 . 18	4	4	4	5	5	5	6	6	7	7	2	2
. 46	22 . 9	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	3	3
. 37	21 . 59	11	11	12	12	12	13	13	14	14	14	4	4
. 27	21 . 49	15	15	15	16	16	16	17	17	18	18	5	5
. 18	21 . 40	18	19	19	19	20	20	20	21	21	22	6	6
												7	6
. 8	21 . 30	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	8	7
. 59	21 . 20	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	9	8
. 49	21 . 10	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10		
. 39	21 . 0	11	11	11	12	12	12	13	13	13	14		
. 30	20 . 51	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17		
. 20	20 . 41	18	18	18	19	19	19	20	20	20	21		
. 11	20 . 31	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	1	1
. 1	20 . 21	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	2	2
. 51	20 . 11	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	3	3
. 42	20 . 2	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	4	4
. 32	19 . 52	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16	5	5
. 22	19 . 42	17	17	17	18	18	18	19	19	19	20	6	6
												7	6
. 12	19 . 32	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	8	7
. 3	19 . 22	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	9	8
. 53	19 . 13	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9		
. 43	19 . 3	10	10	10	10	11	11	11	12	12	12		
. 33	18 . 52	13	13	13	14	14	14	14	15	15	16		
. 24	18 . 43	16	16	16	17	17	17	17	18	18	19		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
72°. 0′	16′. 4″	16′. 23″	16′. 41″	17′. 0″	17′. 18″	17′. 37″	17′. 55″
10	15 . 56	16 . 14	16 . 32	16 . 51	17 . 9	17 . 27	17 . 46
20	15 . 47	16 . 5	16 . 23	16 . 42	17 . 0	17 . 18	17 . 36
30	15 . 38	15 . 56	16 . 14	16 . 32	16 . 50	17 . 9	17 . 27
40	15 . 30	15 . 47	16 . 5	16 . 23	16 . 41	16 . 59	17 . 17
50	15 . 21	15 . 39	15 . 56	16 . 14	16 . 32	16 . 50	17 . 7
73 . 0	15 . 12	15 . 30	15 . 47	16 .	16 . 22	16 . 40	16 . 58
10	15 . 4	15 . 21	15 . 38	15 . 5	16 . 13	16 . 31	16 . 48
20	14 . 55	15 . 12	15 . 29	15 . 4	15 . 4	16 . 21	16 . 38
30	14 . 46	15 . 3	15 . 20	15 . 37	15 . 54	16 . 11	16 . 29
40	14 . 38	14 . 56	15 . 11	15 . 28	15 . 45	16 . 2	16 . 19
50	14 . 29	14 . 46	15 . 2	15 . 19	15 . 36	15 . 52	16 . 9
74 . 0	14 . 20	14 . 37	14 . 53	15 . 10	15 . 26	15 . 43	15 . 59
10	14 . 11	14 . 27	14 . 43	15 . 0	15 . 16	15 . 33	15 . 49
20	14 . 3	14 . 19	14 . 35	14 . 51	15 . 8	15 . 24	15 . 40
30	13 . 54	14 . 10	14 . 26	14 . 42	14 . 58	15 . 14	15 . 30
40	13 . 45	14 . 1	14 . 17	14 . 33	14 . 49	15 . 5	15 . 20
50	13 . 37	13 . 52	14 . 8	14 . 24	14 . 39	14 . 55	15 . 11
75 . 0	13 . 28	13 . 43	13 . 59	14 . 14	14 . 30	14 . 45	15 . 1
10	13 . 19	13 . 34	13 . 50	14 . 5	14 . 20	14 . 36	14 . 51
20	13 . 10	13 . 25	13 . 41	13 . 56	14 . 11	14 . 26	14 . 41
30	13 . 1	13 . 16	13 . 31	13 . 47	14 . 2	14 . 17	14 . 32
40	12 . 53	13 . 8	13 . 22	13 . 37	13 . 52	14 . 7	14 . 22
50	12 . 44	12 . 59	13 . 13	13 . 28	13 . 43	13 . 57	14 . 12
76 . 0	12 . 35	12 . 49	13 . 4	13 . 19	13 . 33	13 . 48	14 . 2
10	12 . 26	12 . 41	12 . 55	13 . 9	13 . 24	13 . 38	13 . 52
20	12 . 17	12 . 32	12 . 46	13 . 0	13 . 14	13 . 28	13 . 43
30	12 . 9	12 . 23	12 . 37	12 . 51	13 . 5	13 . 19	13 . 33
40	12 . 0	12 . 13	12 . 27	12 . 41	12 . 55	13 . 9	13 . 22
50	11 . 51	12 . 4	12 . 18	12 . 31	12 . 45	12 . 59	13 . 12
77 . 0	11 . 42	11 . 56	12 . 9	12 . 23	12 . 36	12 . 50	13 . 3
10	11 . 33	11 . 46	11 . 59	12 . 13	12 . 26	12 . 39	12 . 53
20	11 . 25	11 . 37	11 . 50	12 . 3	12 . 17	12 . 30	12 . 43
30	11 . 16	11 . 29	11 . 42	11 . 55	12 . 8	12 . 21	12 . 33
40	11 . 7	11 . 20	11 . 32	11 . 45	11 . 58	12 . 11	12 . 23
50	10 . 58	11 . 11	11 . 23	11 . 36	11 . 48	12 . 1	12 . 14

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.									Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
. 14″	18′. 32″	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	1′	1″
. 4	18 . 23	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	2	2
. 54	18 . 13	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	3	3
. 45	18 . 3	9	9	10	10	10	11	11	11	11	12	4	4
. 35	17 . 53	12	12	13	13	13	14	14	14	14	15	5	5
. 25	17 . 43	15	15	16	16	16	17	17	17	17	18	6	6
												7	7
. 15	17 . 33	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	8	8
. 5	17 . 23	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	9	9
. 55	17 . 13	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8		
. 46	17 . 3	9	9	9	9	10	10	10	11	11	11		
. 36	16 . 53	11	12	12	12	12	13	13	13	14	14		
. 26	16 . 43	14	14	15	15	15	16	16	16	16	17		
. 16	16 . 32	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
. 5	16 . 21	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	2	2
. 56	16 . 12	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	3	3
. 46	16 . 2	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	4	4
. 36	15 . 52	11	11	11	11	12	12	12	13	13	13	5	5
. 26	15 . 42	13	14	14	14	14	15	15	15	15	16	6	6
												7	7
. 16	15 . 32	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	8	8
. 7	15 . 22	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	9	9
. 57	15 . 12	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7		
. 47	15 . 2	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10		
. 37	14 . 52	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12		
. 27	14 . 41	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15		
. 17	14 . 31	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	1	1
. 7	14 . 21	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	2	2
. 57	14 . 11	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	3	3
. 47	14 . 1	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	4	4
. 36	13 . 50	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	5	5
. 26	13 . 40	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	6	6
												7	7
. 17	13 . 30	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	8	8
. 6	13 . 19	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	9	9
. 56	13 . 9	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6		
. 47	13 . 0 .	7	7	7	7	7	8	8	8	8	9		
. 36	12 . 49	9	9	9	9	10	10	10	10	10	11		
. 26	12 . 39	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
78°. 0′	10′. 49″	11′. 1″	11′. 14″	11′. 26″	11′. 39″	11′. 51″	12′. 4
10	10 . 40	10 . 52	11 . 5	11 . 17	11 . 29	11 . 42	11 . 54
20	10 . 31	10 . 43	10 . 55	11 . 8	11 . 20	11 . 32	11 . 44
30	10 . 22	10 . 34	10 . 45	10 . 58	11 . 10	11 . 22	11 . 34
40	10 . 14	10 . 25	10 . 37	10 . 49	11 . 1	11 . 12	11 . 24
50	10 . 5	10 . 16	10 . 28	10 . 39	10 . 51	11 . 3	11 . 14
79 . 0	9 . 56	10 . 7	10 . 19	10 . 30	10 . 41	10 . 53	11 . 4
10	9 . 47	9 . 58	10 . 9	10 . 21	10 . 32	10 . 43	10 . 54
20	9 . 38	9 . 49	10 . 0	10 . 11	10 . 22	10 . 33	10 . 44
30	9 . 29	9 . 40	9 . 51	10 . 2	10 . 13	10 . 24	10 . 35
40	9 . 20	9 . 31	9 . 42	9 . 52	10 . 3	10 . 14	10 . 25
50	9 . 11	9 . 22	9 . 32	9 . 43	9 . 53	10 . 4	10 . 15
80 . 0	9 . 2	9 . 13	9 . 23	9 . 33	9 . 44	9 . 54	10 . 5
10	8 . 53	9 . 3	9 . 14	9 . 24	9 . 34	9 . 44	9 . 55
20	8 . 44	8 . 54	9 . 4	9 . 14	9 . 25	9 . 35	9 . 45
30	8 . 35	8 . 45	8 . 55	9 . 5	9 . 15	9 . 25	9 . 35
40	8 . 26	8 . 36	8 . 46	8 . 56	9 . 5	9 . 15	9 . 25
50	8 . 17	8 . 27	8 . 37	8 . 46	8 . 56	9 . 5	9 . 15
81 . 0	8 . 8	8 . 18	8 . 27	8 . 37	8 . 46	8 . 55	9 . 5
10	7 . 59	8 . 9	8 . 18	8 . 27	8 . 36	8 . 46	8 . 55
20	7 . 51	8 . 0	8 . 9	8 . 18	8 . 27	8 . 36	8 . 45
30	7 . 42	7 . 50	7 . 59	8 . 8	8 . 17	8 . 26	8 . 35
40	7 . 33	7 . 41	7 . 50	7 . 59	8 . 7	8 . 16	8 . 25
50	7 . 24	7 . 32	7 . 41	7 . 49	7 . 58	8 . 6	8 . 15
82 . 0	7 . 15	7 . 23	7 . 31	7 . 40	7 . 48	7 . 56	8 . 5
10	7 . 6	7 . 14	7 . 22	7 . 30	7 . 38	7 . 46	7 . 55
20	6 . 57	7 . 5	7 . 13	7 . 21	7 . 29	7 . 37	7 . 45
30	6 . 48	6 . 55	7 . 3	7 . 11	7 . 19	7 . 27	7 . 35
40	6 . 39	6 . 46	6 . 54	7 . 2	7 . 9	7 . 17	7 . 25
50	6 . 30	6 . 37	6 . 45	6 . 52	6 . 59	7 . 7	7 . 14
83 . 0	6 . 21	6 . 28	6 . 35	6 . 42	6 . 50	6 . 57	7 . 4
10	6 . 12	6 . 19	6 . 26	6 . 33	6 . 40	6 . 47	6 . 54
20	6 . 3	6 . 10	6 . 16	6 . 23	6 . 30	6 . 37	6 . 44
30	5 . 55	6 . 0	6 . 7	6 . 14	6 . 21	6 . 27	6 . 34
40	5 . 44	5 . 51	5 . 58	6 . 4	6 . 11	6 . 18	6 . 24
50	5 . 35	5 . 42	5 . 49	5 . 55	6 . 1	6 . 8	6 . 14

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.									Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
′. 16″	12′. 29″	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	1′	1″
. 6	12 . 19	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	2	2
. 56	12 . 8	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	3	3
. 46	11 . 58	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	4	4
. 36	11 . 48	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10	5	5
. 26	11 . 38	10	10	10	11	11	11	11	11	12	12	6	6
												7	7
. 16	11 . 27	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	8	8
. 6	11 . 17	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	9	9
. 56	11 . 7	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5		
. 45	10 . 56	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7		
. 35	10 . 46	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9		
. 25	10 . 36	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11		
. 15	10 . 26	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
. 5	10 . 15	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2
. 55	10 . 5	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	3	3
. 45	9 . 55	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	4	4
. 34	9 . 44	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	5	5
. 24	9 . 34	8	8	9	9	9	9	9	9	10	10	6	6
												7	7
. 14	9 . 24	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	8	8
. 4	9 . 13	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	9	9
. 3	9 . 3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4		
. 53	8 . 52	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6		
. 43	8 . 42	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7		
. 33	8 . 32	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9		
. 13	8 . 21	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
. 3	8 . 11	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
. 53	8 . 1	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	3	3
. 42	7 . 50	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	4	4
. 32	7 . 40	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5
. 22	7 . 29	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	6	6
												7	7
. 12	7 . 19	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	8	8
. 2	7 . 9	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	9	9
. 51	6 . 58	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
. 41	6 . 48	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
. 31	6 . 37	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6		
. 21	6 . 27	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7		

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

Hauteur apparente.	Parallaxe horisontale.						
	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′
84°. 0′	5′. 26″	5′. 32″	5′. 39″	5′. 45″	5′. 52″	5′. 58″	6′. 5
10	5 . 17	5 . 23	5 . 30	5 . 36	5 . 42	5 . 48	5 . 54
20	5 . 8	5 . 14	5 . 21	5 . 26	5 . 32	5 . 38	5 . 44
30	4 . 59	5 . 5	5 . 11	5 . 17	5 . 22	5 . 28	5 . 34
40	4 . 50	4 . 56	5 . 1	5 . 7	5 . 13	5 . 18	5 . 24
50	4 . 41	4 . 47	4 . 52	4 . 57	5 . 3	5 . 8	5 . 14
85 . 0	4 . 32	4 . 37	4 . 43	4 . 48	4 . 53	4 . 58	5 . 4
10	4 . 23	4 . 28	4 . 33	4 . 38	4 . 43	4 . 48	4 . 53
20	4 . 14	4 . 19	4 . 24	4 . 29	4 . 34	4 . 38	4 . 43
30	4 . 5	4 . 10	4 . 14	4 . 19	4 . 24	4 . 29	4 . 33
40	3 . 56	4 . 1	4 . 5	4 . 10	4 . 14	4 . 19	4 . 23
50	3 . 47	3 . 51	3 . 56	4 . 0	4 . 4	4 . 9	4 . 13
86 . 0	3 . 38	3 . 42	3 . 46	3 . 50	3 . 55	3 . 59	4 . 3
10	3 . 29	3 . 33	3 . 37	3 . 41	3 . 45	3 . 49	3 . 53
20	3 . 20	3 . 24	3 . 27	3 . 31	3 . 35	3 . 39	3 . 43
30	3 . 11	3 . 14	3 . 18	3 . 22	3 . 25	3 . 29	3 . 33
40	3 . 2	3 . 5	3 . 9	3 . 12	3 . 16	3 . 19	3 . 23
50	2 . 53	2 . 56	2 . 59	3 . 2	3 . 6	3 . 9	3 . 12
87 . 0	2 . 43	2 . 47	2 . 50	2 . 53	2 . 56	2 . 59	3 . 2
10	2 . 34	2 . 37	2 . 40	2 . 43	2 . 46	2 . 49	2 . 52
20	2 . 25	2 . 28	2 . 31	2 . 34	2 . 36	2 . 39	2 . 42
30	2 . 16	2 . 19	2 . 21	2 . 24	2 . 27	2 . 29	2 . 32
40	2 . 7	2 . 10	2 . 12	2 . 14	2 . 17	2 . 19	2 . 22
50	1 . 58	2 . 0	2 . 3	2 . 5	2 . 7	2 . 9	2 . 12
88 . 0	1 . 49	1 . 51	1 . 53	1 . 55	1 . 57	1 . 59	2 . 2
10	1 . 39	1 . 42	1 . 44	1 . 46	1 . 48	1 . 50	1 . 51
20	1 . 31	1 . 33	1 . 34	1 . 36	1 . 38	1 . 40	1 . 41
30	1 . 22	1 . 23	1 . 25	1 . 26	1 . 28	1 . 30	1 . 31
40	1 . 13	1 . 14	1 . 15	1 . 17	1 . 18	1 . 20	1 . 21
50	1 . 4	1 . 5	1 . 6	1 . 7	1 . 8	1 . 10	1 . 11
89 . 0	0 . 55	0 . 56	0 . 57	0 . 58	0 . 59	1 . 0	1 . 1
10	0 . 45	0 . 46	0 . 47	0 . 48	0 . 49	0 . 50	0 . 51
20	0 . 36	0 . 37	0 . 38	0 . 38	0 . 39	0 . 40	0 . 41
30	0 . 27	0 . 27	0 . 28	0 . 28	0 . 29	0 . 30	0 . 31
40	0 . 18	0 . 19	0 . 19	0 . 19	0 . 20	0 . 20	0 . 21
50	0 . 9	0 . 9	0 . 9	0 . 10	0 . 10	0 . 10	0 . 11

TABLE VIII.

Parallaxe de la lune moins la réfraction.

		Parties proportionnelles pour la parallaxe.										Pour la hauteur.	
60′	61′	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″		—
6′. 10″	6′. 17″	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1′	1′
6 . 0	6 . 6	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
5 . 50	5 . 56	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
5 . 40	5 . 45	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5 . 29	5 . 35	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
5 . 19	5 . 24	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
												7	7
5 . 9	5 . 14	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	8	8
4 . 59	5 . 4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	9
4 . 48	4 . 53	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
4 . 38	4 . 43	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
4 . 28	4 . 32	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4		
4 . 17	4 . 22	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5		
4 . 7	4 . 11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
3 . 57	4 . 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
3 . 47	3 . 50	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
3 . 36	3 . 40	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4
3 . 26	3 . 29	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5
3 . 16	3 . 19	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	6	6
												7	7
3 . 5	3 . 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8
2 . 55	2 . 58	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9	9
2 . 45	2 . 48	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
2 . 36	2 . 37	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2		
2 . 24	2 . 27	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
2 . 14	2 . 16	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3		
2 . 4	2 . 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1 . 53	1 . 55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
1 . 43	1 . 45	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3
1 . 33	1 . 34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4
1 . 22	1 . 24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5
1 . 12	1 . 13	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	6	6
												7	7
1 . 2	1 . 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8
0 . 52	0 . 52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9
0 . 41	0 . 42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0 . 31	0 . 32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0 . 21	0 . 21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0 . 10	0 . 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

TABLE IX.

Changement en hauteur pendant la dernière minute qui précède, et la première minute qui suit le passage au méridien.

Latitude.	Déclinaison de même dénomination que la latitude.												
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24
0°	*	56″,2	28″,1	18″,7	14″,0	11″,1	9″,2	7″,9	6″,9	6″,0	5″,4	4″,9	4
2	56″,2	*	56″,1	28″,0	18″,6	13″,9	11″,1	9″,2	7″,8	6″,8	5″,9	5″,3	4
4	28″,1	56″,1	*	55″,8	27″,8	18″,5	13″,8	11″,0	9″,1	7″,7	6″,7	5″,9	5
6	18″,7	28″,0	55″,8	*	55″,4	27″,5	18″,3	13″,6	10″,8	8″,9	7″,6	6″,6	5
8	14″,0	18″,6	27″,8	55″,4	*	54″,9	27″,3	18″,1	13″,4	10″,7	8″,8	7″,5	6
10	11″,1	12″,9	18″,5	27″,6	54″,9	*	54″,2	26″,9	17″,8	13″,2	10″,5	8″,6	7
12	9″,2	11″,1	13″,8	18″,3	27″,3	54″,2	*	53″,4	26″,5	17″,5	13″,0	10″,3	8
14	7″,9	9″,2	11″,0	13″,6	18″,1	26″,9	53″,4	*	52″,5	26″,0	17″,1	12″,7	9
16	6″,9	7″,8	9″,1	10″,8	13″,4	17″,8	26″,5	52″,5	*	51″,4	25″,4	16″,7	12
18	6″,0	6″,8	7″,7	8″,9	10″,7	13″,2	17″,5	26″,0	51″,4	*	50″,3	24″,8	16
20	5″,4	6″,0	6″,7	7″,6	8″,8	10″,5	13″,0	17″,1	25″,4	50″,3	*	49″,0	24
22	4″,9	5″,3	5″,9	6″,6	7″,6	8″,6	10″,3	12″,6	16″,8	24″,8	49″,0	*	47
24	4″,4	4″,8	5″,2	5″,8	6″,4	7″,5	8″,4	10″,0	12″,4	16″,3	24″,2	47″,7	*
26	4″,0	4″,3	4″,7	5″,2	5″,7	6″,5	7″,1	8″,2	9″,8	12″,1	15″,9	23″,5	46″,2
28	3″,7	4″,0	4″,3	4″,6	5″,0	5″,5	6″,2	6″,9	8″,0	9″,5	11″,7	15″,4	22″,7
30	3″,4	3″,6	3″,9	4″,2	4″,5	4″,9	5″,3	6″,0	6″,8	7″,8	9″,2	11″,3	14″,9
32	3″,1	3″,3	3″,5	3″,8	4″,1	4″,4	4″,8	5″,2	5″,8	6″,6	7″,5	8″,9	10″,9
34	2″,9	3″,1	3″,3	3″,5	3″,7	4″,0	4″,3	4″,6	5″,1	5″,6	6″,3	7″,3	8″,5
36	2″,7	2″,8	3″,0	3″,2	3″,4	3″,6	3″,8	4″,1	4″,5	4″,9	5″,4	6″,1	7″,0
38	2″,5	2″,6	2″,8	2″,9	3″,0	3″,2	3″,4	3″,6	4″,0	4″,3	4″,7	5″,2	6″,0
40	2″,3	2″,4	2″,6	2″,7	2″,8	3″,0	3″,1	3″,1	3″,6	3″,8	4″,1	4″,7	5″,0
42	2″,2	2″,3	2″,4	2″,5	2″,6	2″,7	2″,9	3″,0	3″,1	3″,5	3″,6	4″,0	4″,3
44	2″,0	2″,1	2″,2	2″,3	2″,4	2″,5	2″,6	2″,7	2″,9	3″,1	3″,3	3″,5	3″,8
46	1″,9	2″,0	2″,0	2″,1	2″,2	2″,3	2″,4	2″,5	2″,6	2″,8	3″,0	3″,1	
48	1″,8	1″,8	1″,9	2″,0	2″,0	2″,1	2″,2	2″,3	2″,4	2″,5	2″,6	2″,8	3
50	1″,7	1″,7	1″,8	1″,8	1″,9	1″,9	2″,0	2″,1	2″,2	2″,3	2″,4	2″,5	2″,6
52	1″,6	1″,6	1″,7	1″,7	1″,7	1″,8	1″,8	1″,9	2″,0	2″,1	2″,1	2″,2	2″,4
54	1″,4	1″,5	1″,5	1″,6	1″,6	1″,6	1″,7	1″,8	1″,8	1″,9	2″,0	2″,0	2″,1
56	1″,3	1″,4	1″,4	1″,4	1″,5	1″,5	1″,6	1″,6	1″,6	1″,7	1″,8	1″,8	1″,9
58	1″,2	1″,3	1″,3	1″,3	1″,4	1″,4	1″,4	1″,5	1″,5	1″,6	1″,6	1″,7	1″,7
60	1″,1	1″,2	1″,2	1″,2	1″,3	1″,3	1″,3	1″,3	1″,4	1″,4	1″,4	1″,5	1″,5
62	1″,0	1″,1	1″,1	1″,1	1″,1	1″,2	1″,2	1″,2	1″,2	1″,3	1″,3	1″,3	1″,4
64	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,1	1″,1	1″,1	1″,1	1″,1	1″,2	1″,2	1″,2
66	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,1	1″,1
68	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	1″,0	1″,0
70	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,9	0″,9
72	0″,6	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0
74	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,7	0
76	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,6	0″,6	0
80	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4	0″,4

TABLE IX.

angement en hauteur pendant la dernière minute qui précède, et la première minute qui suit le passage au méridien.

Déclinaison de différente dénomination que la latitude.

0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°
″	56″,2	28″,1	18″,7	14″,1	11″,1	9″,2	7″,9	6″,9	6″,0	5″,4	4″,9	4″,4
56″,2	28″,2	18″,7	14″,0	11″,2	9″,3	7″,9	7″,0	6″,2	5″,5	5″,0	4″,6	4″,1
28″,1	18″,7	14″,0	11″,2	9″,3	8″,0	7″,0	6″,2	5″,5	5″,0	4″,5	4″,1	3″,8
18″,7	14″,0	11″,2	9″,3	8″,0	6″,9	6″,1	5″,3	4″,9	4″,5	4″,2	3″,9	3″,6
14″,0	11″,2	9″,3	8″,0	7″,0	6″,2	5″,6	5″,0	4″,6	4″,2	3″,9	3″,6	3″,4
11″,1	9″,3	8″,0	7″,0	6″,2	5″,6	5″,0	4″,6	4″,2	3″,9	3″,6	3″,4	3″,2
9″,2	7″,9	7″,0	6″,2	5″,6	5″,1	4″,6	4″,3	3″,9	3″,7	3″,4	3″,2	3″,0
7″,9	6″,9	6″,1	5″,5	5″,1	4″,6	4″,2	3″,9	3″,7	3″,4	3″,2	3″,0	2″,8
6″,9	6″,1	5″,5	5″,0	4″,6	4″,2	3″,9	3″,7	3″,4	3″,2	3″,0	2″,9	2″,7
6″,0	5″,5	4″,9	4″,6	4″,2	3″,9	3″,6	3″,4	3″,2	3″,0	2″,9	2″,7	2″,6
5″,4	4″,9	4″,5	4″,2	3″,9	3″,6	3″,4	3″,2	3″,0	2″,9	2″,7	2″,6	2″,4
4″,9	4″,4	4″,2	3″,9	3″,6	3″,4	3″,2	3″,0	2″,9	2″,7	2″,6	2″,4	2″,3
4″,4	4″,1	3″,8	3″,6	3″,4	3″,2	3″,0	2″,8	2″,7	2″,6	2″,4	2″,4	2″,2
4″,0	3″,8	3″,6	3″,5	3″,2	3″,0	2″,8	2″,7	2″,5	2″,4	2″,3	2″,2	2″,1
3″,7	3″,6	3″,5	3″,1	2″,9	2″,8	2″,6	2″,5	2″,4	2″,3	2″,2	2″,1	2″,0
3″,4	3″,2	3″,0	2″,9	2″,7	2″,6	2″,5	2″,4	2″,3	2″,2	2″,1	2″,0	2″,0
3″,1	3″,0	2″,8	2″,7	2″,6	2″,5	2″,4	2″,3	2″,2	2″,1	2″,0	1″,9	1″,8
2″,9	2″,8	2″,6	2″,5	2″,4	2″,3	2″,2	2″,1	2″,0	2″,0	1″,9	1″,8	1″,8
2″,7	2″,6	2″,5	2″,4	2″,3	2″,2	2″,1	2″,0	1″,9	1″,9	1″,8	1″,7	1″,7
2″,5	2″,4	2″,3	2″,2	2″,1	2″,1	2″,0	1″,9	1″,8	1″,8	1″,7	1″,7	1″,6
2″,3	2″,2	2″,2	2″,1	2″,0	2″,0	1″,9	1″,8	1″,8	1″,7	1″,6	1″,6	1″,5
2″,2	2″,1	2″,0	2″,0	1″,9	1″,8	1″,8	1″,7	1″,7	1″,6	1″,6	1″,5	1″,5
2″,0	1″,9	1″,9	1″,8	1″,8	1″,7	1″,7	1″,6	1″,6	1″,5	1″,5	1″,4	1″,4
1″,9	1″,8	1″,8	1″,7	1″,7	1″,6	1″,6	1″,5	1″,5	1″,4	1″,4	1″,4	1″,3
1″,8	1″,7	1″,7	1″,6	1″,6	1″,5	1″,5	1″,4	1″,4	1″,4	1″,3	1″,3	1″,3
1″,7	1″,6	1″,6	1″,5	1″,5	1″,4	1″,4	1″,4	1″,3	1″,3	1″,3	1″,2	1″,2
1″,5	1″,5	1″,5	1″,4	1″,4	1″,4	1″,3	1″,3	1″,3	1″,2	1″,2	1″,2	1″,1
1″,4	1″,4	1″,4	1″,3	1″,3	1″,3	1″,2	1″,2	1″,2	1″,2	1″,1	1″,1	1″,1
1″,3	1″,3	1″,3	1″,2	1″,2	1″,2	1″,2	1″,1	1″,1	1″,1	1″,1	1″,0	1″,0
1″,2	1″,2	1″,2	1″,2	1″,1	1″,1	1″,1	1″,1	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0
1″,1	1″,1	1″,1	1″,1	1″,1	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	0″,9	0″,9	0″,9
1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	1″,0	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9
1″,0	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,9	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8
0″,9	0″,9	0″,9	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,7	
0″,8	0″,8	0″,8	0″,8	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7		
0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,7	0″,6			
0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6	0″,6				
0″,6	0″,6	0″,6	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5					
0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5	0″,5						
0″,4	0″,3	0″,3	0″,3	0″,3								

TABLE X.

Multiplicateurs des nombres de la TABLE IX.

//	Intervalle entre midi et l'heure des observations.								
	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′
0	0,0	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	36,0	49,0	64,
2	0,0	1,0	4,1	9,2	16,2	25,3	36,4	49,5	64,
4	0,0	1,1	4,3	9,4	16,5	25,7	36,8	49,9	65,
6	0,0	1,2	4,4	9,6	16,8	26,0	37,2	50,4	65,
8	0,0	1,3	4,6	9,8	17,1	26,3	37,6	50,9	66,
10	0,0	1,4	4,7	10,0	17,4	26,7	38,0	51,4	66,
12	0,0	1,4	4,8	10,2	17,6	27,0	38,4	51,8	67,
14	0,1	1,5	5,0	10,4	17,9	27,4	38,8	52,3	67,
16	0,1	1,6	5,1	10,7	18,2	27,7	39,3	52,8	68,
18	0,1	1,7	5,3	10,9	18,5	28,1	39,7	53,3	68,
20	0,1	1,8	5,4	11,1	18,8	28,4	40,1	53,8	69,
22	0,1	1,9	5,6	11,3	19,1	28,8	40,5	54,3	70,
24	0,2	2,0	5,8	11,6	19,4	29,2	41,0	54,8	70,
26	0,2	2,1	5,9	11,8	19,7	29,5	41,4	55,3	71,
28	0,2	2,2	6,1	12,0	19,9	29,9	41,8	55,8	71,
30	0,3	2,3	6,3	12,3	20,3	30,3	42,3	56,3	72,
32	0,3	2,4	6,4	12,5	20,5	30,6	42,7	56,	
34	0,3	2,5	6,6	12,7	20,8	31,0	43,1	57,3	
36	0,4	2,6	6,8	13,0	21,2	31,4	43,6	57,8	
38	0,4	2,7	6,9	13,2	21,5	31,7	44,0	58,3	74,
40	0,4	2,8	7,1	13,4	21,8	32,1	44,4	58,8	75,
42	0,5	2,9	7,3	13,7	22,1	32,5	44,9	59,3	75,
44	0,5	3,0	7,5	13,9	22,4	32,9	45,3	59,8	76,
46	0,6	3,1	7,7	14,2	22,7	33,3	45,8	60,3	76,
48	0,6	3,2	7,8	14,4	23,0	33,6	46,2	60,8	77,
50	0,7	3,4	8,0	14,7	23,4	34,0	46,7	61,4	78,
52	0,8	3,5	8,2	15,0	23,7	34,4	47,2	61,9	78,
54	0,8	3,6	8,4	15,2	24,0	34,8	47,6	62,4	79,
56	0,9	3,7	8,6	15,5	24,3	35,2	48,1	62,9	
58	0,9	3,9	8,8	15,7	24,7	35,6	48,5	63,3	

TABLE XI.

ombres pour trouver les corrections des longitudes obtenues par les montres marines.

Jours écoulés depuis que la montre a été réglée.	Multiples de la différence seconde.	Jours écoulés depuis que la montre a été réglée.	Multiples de la différence seconde.	Jours écoulés depuis que la montre a été réglée.	Multiples de la différence seconde.	Jours écoulés depuis que la montre a été réglée.	Multiples de la différence seconde.
1	1	31	496	61	1891	91	4186
2	3	32	528	62	1953	92	4278
3	6	33	561	63	2016	93	4371
4	10	34	595	64	2080	94	4465
5	15	35	630	65	2145	95	4560
6	21	36	666	66	2211	96	4656
7	28	37	703	67	2278	97	4753
8	36	38	741	68	2346	98	4851
9	45	39	780	69	2415	99	4950
10	55	40	820	70	2485	100	5050
11	66	41	861	71	2556	101	5151
12	78	42	903	72	2628	102	5253
13	91	43	946	73	2701	103	5356
14	105	44	990	74	2775	104	5460
15	120	45	1035	75	2850	105	5565
16	136	46	1081	76	2926	106	5671
17	153	47	1128	77	3003	107	5778
18	171	48	1176	78	3081	108	5886
19	190	49	1225	79	3160	109	5995
20	210	50	1275	80	3240	110	6105
21	231	51	1326	81	3321	111	6216
22	253	52	1378	82	3403	112	6328
23	276	53	1431	83	3486	113	6441
24	300	54	1485	84	3570	114	6555
25	325	55	1540	85	3655	115	6670
26	351	56	1596	86	3741	116	6786
27	378	57	1653	87	3828	117	6903
28	406	58	1711	88	3916	118	7021
29	435	59	1770	89	4005	119	7140
30	465	60	1830	90	4095	120	7260

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du* ☉.

PREMIER TERME.

Hauteur.	Latitude.										
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
6°	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
8	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
10	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,06
12	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,07	1,08
14	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
16	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10
18	1,00	1,01	1,02	1,03	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,11	1,12
20	1,00	1,01	1,03	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,10	1,12	1,13
22	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,12	1,13	1,15
24	1,00	1,02	1,03	1,05	1,06	1,08	1,10	1,11	1,13	1,15	1,16
26	1,00	1,02	1,03	1,05	1,07	1,09	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18
28	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	1,11	1,13	1,15	1,17	1,19
30	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,17	1,19	1,21
32	1,00	1,02	1,04	1,07	1,09	1,11	1,13	1,16	1,18	1,20	1,23
34	1,00	1,02	1,05	1,07	1,10	1,12	1,14	1,17	1,19	1,22	1,25
36	1,00	1,03	1,05	1,08	1,10	1,13	1,15	1,18	1,21	1,24	1,26
38	1,00	1,03	1,06	1,08	1,11	1,14	1,17	1,20	1,22	1,25	1,28
40	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15	1,18	1,21	1,24	1,27	1,31
42	1,00	1,03	1,06	1,10	1,13	1,16	1,19	1,23	1,26	1,29	1,33
44	1,00	1,03	1,07	1,10	1,14	1,17	1,21	1,24	1,28	1,31	1,35
46	1,00	1,04	1,07	1,11	1,15	1,18	1,22	1,26	1,30	1,34	1,38
48	1,00	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20	1,24	1,28	1,32	1,36	1,40
50	1,00	1,04	1,08	1,13	1,17	1,21	1,25	1,30	1,34	1,39	1,43
52	1,00	1,05	1,09	1,14	1,18	1,23	1,27	1,32	1,37	1,42	1,47
54	1,00	1,05	1,10	1,15	1,19	1,24	1,29	1,34	1,40	1,45	1,50
56	1,00	1,05	1,10	1,16	1,21	1,26	1,32	1,37	1,43	1,48	1,54
58	1,00	1,06	1,11	1,17	1,23	1,28	1,34	1,40	1,46	1,52	1,58
60	1,00	1,06	1,12	1,18	1,24	1,31	1,37	1,43	1,50	1,56	1,63
62	1,00	1,07	1,13	1,20	1,26	1,33	1,40	1,47	1,54	1,61	1,69
64	1,00	1,07	1,14	1,22	1,29	1,36	1,44	1,51	1,59	1,67	1,75
66	1,00	1,08	1,16	1,24	1,32	1,40	1,48	1,56	1,64	1,73	1,82
68	1,00	1,09	1,17	1,26	1,35	1,44	1,53	1,62	1,71	1,80	1,90
70	1,00	1,10	1,19	1,29	1,39	1,49	1,58	1,69	1,79	1,89	2,00
72	1,00	1,11	1,22	1,32	1,43	1,54	1,65	1,77	1,88	2,00	2,12
74	1,00	1,12	1,24	1,37	1,49	1,62	1,74	1,87	2,00	2,13	2,27
76	1,00	1,14	1,28	1,42	1,56	1,71	1,85	2,00	2,15	2,30	2,46
78	1,00	1,16	1,33	1,50	1,66	1,83	2,00	2,17	2,36	2,55	2,71
80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,21	2,41	2,63	2,84	3,06
82	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,26	2,51	2,77	3,04	3,31	3,59
84	1,00	1,33	1,67	2,00	2,34	2,68	3,02	3,37	3,73	4,09	4,46

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du ⊙.*

ARGUMENT.

Hauteur.	Latitude.										
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
6°	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07
8	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,08
10	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08
12	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,08	1,09
14	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,07	1,08	1,10
16	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,08	1,09	1,11
18	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,08	1,08	1,09	1,11	1,12
20	1,06	1,07	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13
22	1,08	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,13	1,15
24	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17
26	1,11	1,11	1,12	1,12	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18
28	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,21
30	1,16	1,16	1,16	1,16	1,17	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,23
32	1,18	1,18	1,18	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,26
34	1,21	1,21	1,21	1,21	1,22	1,23	1,23	1,24	1,26	1,27	1,28
36	1,24	1,24	1,24	1,24	1,25	1,26	1,26	1,27	1,29	1,30	1,32
38	1,27	1,27	1,27	1,28	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35
40	1,31	1,31	1,31	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,39
42	1,35	1,35	1,35	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,40	1,42	1,43
44	1,39	1,39	1,39	1,40	1,40	1,41	1,42	1,43	1,43	1,46	1,48
46	1,44	1,44	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47	1,48	1,50	1,51	1,53
48	1,50	1,50	1,50	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,56	1,57	1,59
50	1,56	1,56	1,56	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,62	1,64	1,66
52	1,62	1,63	1,63	1,63	1,64	1,65	1,66	1,67	1,69	1,71	1,73
	1,70	1,70	1,71	1,71	1,72	1,73	1,74	1,75	1,77	1,79	1,81
56	1,79	1,79	1,79	1,80	1,81	1,82	1,83	1,84	1,86	1,88	1,90
58	1,89	1,89	1,89	1,90	1,91	1,92	1,93	1,95	1,96	1,98	2,01
60	2,00	2,00	2,01	2,01	2,02	2,03	2,05	2,06	2,08	2,10	2,13
62	2,13	2,13	2,13	2,14	2,15	2,16	2,18	2,20	2,22	2,24	2,27
64	2,28	2,28	2,29	2,29	2,30	2,32	2,33	2,35	2,37	2,40	2,43
66	2,46	2,46	2,47	2,47	2,48	2,50	2,51	2,53	2,56	2,59	2,62
68	2,67	2,67	2,68	2,68	2,70	2,71	2,73	2,75	2,78	2,81	2,84
70	2,92	2,93	2,93	2,94	2,95	2,97	2,99	3,01	3,04	3,07	3,11
72	3,24	3,24	3,24	3,25	3,27	3,29	3,31	3,34	3,37	3,40	3,44
74	3,63	3,63	3,64	3,65	3,66	3,68	3,71	3,74	3,77	3,82	3,86
76	4,13	4,14	4,14	4,16	4,17	4,20	4,23	4,26	4,30	4,33	4,49
78	4,81	4,81	4,82	4,84	4,86	4,88	4,92	4,96	5,00	5,06	5,12
80	5,76	5,76	5,77	5,79	5,82	5,85	5,89	5,94	5,99	6,06	6,13
	7,19	7,19	7,20	7,23	7,26	7,30	7,35	7,41	7,48	7,56	7,65
	9,57	9,57	9,59	9,62	9,66	9,72	9,78	9,86	9,95	10,06	10,18

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du ⊙.*

PREMIER TERME.

Hauteur.	Latitude.										
	20°	22°	24°	26°	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
6°	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09
8	1,05	1,06	1,06	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12
10	1,06	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15
12	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18
14	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21
16	1,10	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,21	1,22	1,24
18	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,22	1,24	1,25	1,27
20	1,13	1,15	1,16	1,18	1,19	1,21	1,23	1,25	1,26	1,28	1,31
22	1,15	1,16	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,27	1,29	1,32	1,34
24	1,16	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,35	1,37
26	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,31	1,33	1,35	1,38	1,41
28	1,19	1,22	1,24	1,26	1,28	1,31	1,33	1,36	1,39	1,42	1,45
30	1,21	1,23	1,26	1,28	1,31	1,33	1,36	1,39	1,42	1,45	1,49
32	1,23	1,25	1,28	1,31	1,33	1,36	1,39	1,42	1,45	1,49	1,52
34	1,25	1,27	1,30	1,33	1,36	1,39	1,42	1,46	1,49	1,53	1,57
36	1,26	1,29	1,32	1,35	1,39	1,42	1,45	1,49	1,53	1,57	1,61
38	1,28	1,32	1,35	1,38	1,42	1,45	1,49	1,53	1,57	1,61	1,66
40	1,31	1,34	1,37	1,41	1,45	1,48	1,52	1,57	1,61	1,66	1,70
42	1,33	1,36	1,40	1,44	1,48	1,52	1,56	1,61	1,65	1,70	1,76
44	1,35	1,39	1,43	1,47	1,51	1,56	1,60	1,65	1,70	1,76	1,81
46	1,38	1,42	1,46	1,51	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,81	1,87
48	1,40	1,45	1,50	1,54	1,59	1,64	1,69	1,75	1,81	1,87	1,93
50	1,43	1,48	1,53	1,58	1,63	1,69	1,75	1,80	1,87	1,93	2,00
52	1,47	1,52	1,57	1,62	1,68	1,74	1,80	1,86	1,93	2,00	2,07
54	1,50	1,56	1,61	1,67	1,73	1,80	1,86	1,93	2,00	2,08	2
56	1,54	1,60	1,66	1,72	1,79	1,86	1,93	2,00	2,08	2,16	2,24
58	1,58	1,65	1,71	1,78	1,85	1,92	2,00	2,08	2,16	2,25	2,34
60	1,63	1,70	1,77	1,85	1,92	2,00	2,08	2,17	2,26	2,35	2,45
62	1,69	1,76	1,84	1,92	2,00	2,09	2,18	2,27	2,37	2,47	2,58
64	1,75	1,83	1,91	2,00	2,09	2,18	2,28	2,38	2,49	2,60	2,72
66	1,82	1,91	2,00	2,10	2,19	2,30	2,40	2,52	2,63	2,76	2,89
68	1,90	2,00	2,10	2,21	2,32	2,43	2,55	2,67	2,80	2,93	3,08
70	2,00	2,11	2,22	2,34	2,46	2,59	2,72	2,85	3,00	3,15	3,31
72	2,12	2,24	2,37	2,50	2,64	2,78	2,92	3,08	3,24	3,41	3,58
74	2,27	2,41	2,55	2,70	2,85	3,01	3,18	3,35	3,53	3,73	3,93
76	2,46	2,62	2,79	2,96	3,13	3,32	3,51	3,71	3,91	4,13	
78	2,71	2,90	3,10	3,30	3,50	3,72	3,94	4,17	4,42		
80	3,06	3,29	3,53	3,77	4,02	4,27	4,54	4,83			
82	3,59	3,88	4,17	4,47	4,78	5,11	5,45				
84	4,46	4,84	5,24	5,64	6,06	6,49					

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du* ⊙.

ARGUMENT.

	Latitude.										
	20°	22°	24°	26°	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
6°	1,07	1,09	1,10	1,12	1,14	1,16	1,19	1,21	1,24	1,28	1,31
8	1,08	1,09	1,11	1,12	1,14	1,17	1,19	1,22	1,25	1,28	1,32
0	1,08	1,10	1,11	1,13	1,15	1,17	1,20	1,23	1,26	1,29	1,33
2	1,09	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18	1,21	1,23	1,26	1,30	1,34
4	1,10	1,11	1,13	1,15	1,17	1,19	1,22	1,24	1,27	1,31	1,35
6	1,11	1,12	1,14	1,16	1,18	1,20	1,23	1,26	1,29	1,32	1,36
8	1,12	1,13	1,15	1,17	1,19	1,21	1,24	1,27	1,30	1,33	1,37
0	1,13	1,15	1,17	1,18	1,21	1,23	1,26	1,28	1,32	1,35	1,39
2	1,15	1,16	1,18	1,20	1,22	1,25	1,27	1,30	1,33	1,37	1,41
4	1,17	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,29	1,32	1,35	1,39	1,43
26	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,29	1,31	1,34	1,38	1,41	1,45
28	1,21	1,22	1,24	1,26	1,28	1,31	1,34	1,37	1,40	1,44	1,48
30	1,23	1,25	1,26	1,29	1,31	1,33	1,36	1,39	1,43	1,47	1,51
32	1,26	1,27	1,29	1,31	1,34	1,36	1,39	1,42	1,46	1,50	1,54
34	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37	1,39	1,42	1,46	1,49	1,53	1,58
36	1,32	1,33	1,35	1,38	1,40	1,43	1,46	1,49	1,53	1,57	1,61
38	1,35	1,37	1,39	1,41	1,44	1,47	1,50	1,53	1,57	1,61	1,66
40	1,39	1,41	1,43	1,45	1,48	1,51	1,54	1,58	1,61	1,66	1,70
42	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52	1,55	1,59	1,62	1,66	1,71	1,76
44	1,48	1,50	1,52	1,55	1,58	1,61	1,64	1,68	1,72	1,76	1,82
46	1,53	1,55	1,58	1,60	1,63	1,66	1,70	1,74	1,78	1,83	1,88
48	1,59	1,61	1,64	1,66	1,69	1,73	1,76	1,80	1,85	1,90	1,95
50	1,66	1,68	1,70	1,73	1,76	1,80	1,84	1,88	1,92	1,97	2,03
	1,73	1,75	1,78	1,81	1,84	1,88	1,92	1,96	2,01	2,06	2,12
	1,81	1,84	1,86	1,89	1,93	1,97	2,01	2,05	2,10	2,16	2,22
56	1,90	1,93	1,96	1,99	2,03	2,07	2,11	2,16	2,21	2,27	2,34
58	2,01	2,04	2,07	2,10	2,14	2,18	2,23	2,28	2,33	2,40	2,46
60	2,13	2,16	2,19	2,23	2,27	2,31	2,36	2,41	2,47	2,54	2,61
62	2,27	2,30	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,57	2,63	2,70	2,78
64	2,43	2,46	2,50	2,54	2,58	2,63	2,69	2,75	2,82	2,90	2,98
66	2,62	2,65	2,69	2,74	2,79	2,84	2,90	2,97	3,04	3,12	3,21
68	2,84	2,88	2,92	2,97	3,02	3,08	3,15	3,22	3,30	3,39	3,49
70	3,11	3,15	3,20	3,25	3,31	3,38	3,45	3,53	3,61	3,71	3,82
72	3,44	3,49	3,54	3,60	3,67	3,74	3,81	3,90	4,00	4,11	4,22
74	3,86	3,91	3,97	4,04	4,11	4,19	4,28	4,38	4,48	4,60	4,74
76	4,40	4,46	4,53	4,60	4,68	4,77	4,87	4,99	5,11	5,25	
78	5,12	5,19	5,27	5,35	5,45	5,55	5,67	5,80	5,95		
80	6,13	6,21	6,30	6,41	6,52	6,65	6,79	6,95			
82	7,65	7,75	7,87	7,99	8,14	8,30	8,47				
84	10,18	10,32	10,47	10,64	10,84	11,05					

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du ⊙.*

PREMIER TERME.

Hauteur.	Latitude.										
	40°	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°
6°	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18
8	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,21	1,23	1,24
10	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21	1,23	1,24	1,26	1,28	1,31
12	1,18	1,19	1,21	1,22	1,24	1,25	1,27	1,29	1,32	1,34	1,37
14	1,21	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37	1,40	1,43
16	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37	1,40	1,43	1,46	1,50
18	1,27	1,29	1,31	1,34	1,36	1,39	1,42	1,45	1,48	1,52	1,56
20	1,31	1,33	1,35	1,38	1,40	1,43	1,47	1,50	1,54	1,58	1,63
22	1,34	1,36	1,39	1,42	1,45	1,48	1,52	1,56	1,60	1,65	1,70
24	1,37	1,40	1,43	1,46	1,50	1,53	1,57	1,61	1,65	1,71	1,77
26	1,41	1,44	1,47	1,51	1,54	1,58	1,62	1,67	1,72	1,78	1,85
28	1,45	1,48	1,51	1,55	1,59	1,63	1,68	1,73	1,79	1,85	1,92
30	1,49	1,52	1,56	1,60	1,64	1,69	1,74	1,80	1,86	1,92	2,00
32	1,52	1,56	1,60	1,65	1,69	1,75	1,80	1,86	1,93	2,00	2,08
34	1,57	1,61	1,65	1,70	1,75	1,80	1,86	1,93	2,00	2,08	2,17
36	1,61	1,65	1,70	1,75	1,81	1,87	1,93	2,00	2,08	2,16	2,26
38	1,66	1,70	1,76	1,81	1,87	1,93	2,00	2,08	2,16	2,25	2,35
40	1,70	1,76	1,81	1,87	1,93	2,00	2,07	2,16	2,24	2,34	2,45
42	1,76	1,81	1,87	1,93	2,00	2,07	2,15	2,24	2,34	2,44	2,56
44	1,81	1,87	1,93	2,00	2,07	2,15	2,24	2,33	2,43	2,55	2,67
46	1,87	1,93	2,00	2,07	2,15	2,23	2,33	2,43	2,54	2,66	
48	1,93	2,00	2,07	2,15	2,23	2,32	2,42	2,53	2,65	2,78	
50	2,00	2,07	2,15	2,23	2,32	2,42	2,53	2,64	2,77	2,91	3,06
52	2,07	2,15	2,24	2,33	2,42	2,53	2,64	2,76	2,90	3,05	3,22
54	2,16	2,24	2,33	2,43	2,53	2,64	2,76	2,89	3,04	3,20	3,38
56	2,24	2,34	2,43	2,54	2,65	2,77	2,90	3,04	3,20	3,37	
58	2,34	2,44	2,55	2,66	2,78	2,91	3,06	3,20	3,37		
60	2,45	2,56	2,67	2,79	2,92	3,06	3,22	3,38			
62	2,58	2,69	2,82	2,95	3,09	3,24	3,41				
64	2,72	2,85	2,98	3,12	3,28	3,44					
66	2,89	3,02	3,17	3,33	3,50						
68	3,08	3,23	3,39	3,56							
70	3,31	3,47	3,65								
72	3,58	3,77									
74	3,93										

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du* ☉.

ARGUMENT.

	Latitude.										
	40°	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°
6°	1,31	1,35	1,40	1,45	1,50	1,56	1,63	1,71	1,80	1,90	2,01
8	1,32	1,36	1,40	1,45	1,51	1,57	1,64	1,72	1,81	1,91	2,02
0	1,33	1,37	1,41	1,46	1,52	1,58	1,65	1,73	1,82	1,92	2,03
2	1,34	1,38	1,42	1,47	1,53	1,59	1,66	1,74	1,83	1,93	2,05
4	1,35	1,39	1,43	1,48	1,54	1,60	1,67	1,75	1,84	1,95	2,06
6	1,36	1,40	1,45	1,50	1,56	1,62	1,69	1,77	1,86	1,96	2,08
8	1,37	1,42	1,46	1,51	1,57	1,64	1,71	1,79	1,88	1,98	2,10
0	1,39	1,43	1,48	1,53	1,59	1,66	1,73	1,81	1,90	2,01	2,13
2	1,41	1,45	1,50	1,55	1,61	1,68	1,75	1,84	1,93	2,04	2,16
4	1,43	1,47	1,52	1,58	1,64	1,70	1,78	1,86	1,96	2,07	2,19
6	1,45	1,50	1,55	1,60	1,66	1,73	1,81	1,89	1,99	2,10	2,23
8	1,48	1,52	1,58	1,63	1,69	1,76	1,84	1,93	2,03	2,14	2,27
0	1,51	1,55	1,61	1,66	1,73	1,80	1,88	1,97	2,07	2,18	2,31
2	1,54	1,59	1,64	1,70	1,76	1,84	1,92	2,01	2,11	2,23	2,36
4	1,58	1,62	1,68	1,74	1,80	1,88	1,96	2,05	2,16	2,28	2,41
6	1,61	1,66	1,72	1,78	1,85	1,92	2,01	2,10	2,21	2,33	2,47
8	1,66	1,71	1,76	1,83	1,90	1,97	2,06	2,16	2,27	2,40	2,54
0	1,70	1,76	1,82	1,88	1,95	2,03	2,12	2,22	2,34	2,46	2,61
2	1,76	1,81	1,87	1,94	2,01	2,09	2,19	2,29	2,41	2,54	2,69
4	1,82	1,87	1,93	2,00	2,08	2,16	2,26	2,37	2,49	2,62	2,78
6	1,88	1,94	2,00	2,07	2,15	2,24	2,34	2,45	2,57	2,72	2,88
8	1,95	2,01	2,08	2,15	2,23	2,33	2,43	2,54	2,67	2,82	2,99
0	2,03	2,09	2,16	2,24	2,33	2,42	2,53	2,65	2,78	2,94	3,11
	2,12	2,19	2,26	2,34	2,43	2,53	2,64	2,76	2,91	3,07	3,25
	2,22	2,29	2,37	2,45	2,54	2,65	2,76	2,89	3,04	3,21	3,40
56	2,34	2,41	2,49	2,57	2,67	2,78	2,91	3,04	3,20	3,38	
58	2,46	2,54	2,62	2,72	2,82	2,94	3,07	3,21	3,38		
60	2,61	2,69	2,78	2,88	2,99	3,11	3,25	3,40			
62	2,78	2,87	2,96	3,07	3,18	3,31	3,46				
64	2,98	3,07	3,17	3,28	3,41	3,55					
6	3,21	3,31	3,42	3,54	3,67						
8	3,49	3,59	3,71	3,84							
0	3,82	3,93	4,07								
2	4,22	4,36									
4	4,75										

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du ⊙.*

PREMIER TERME.

Hauteur.	Latitude.										
	60°	62°	64°	66°	68°	70°	72°	74°	76°	78°	80
6°	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,29	1,32	1,37	1,42	1,50	1,6
8	1,24	1,26	1,29	1,32	1,35	1,39	1,43	1,49	1,56	1,66	1,8
10	1,31	1,33	1,36	1,40	1,44	1,48	1,54	1,62	1,71	1,83	2,0
12	1,37	1,40	1,44	1,48	1,53	1,58	1,65	1,74	1,85	2,00	2,2
14	1,43	1,47	1,51	1,56	1,62	1,69	1,77	1,87	2,00	2,17	2,4
16	1,50	1,54	1,59	1,64	1,71	1,79	1,88	2,00	2,15	2,35	2,6
18	1,56	1,61	1,67	1,73	1,80	1,89	2,00	2,13	2,30	2,53	2,8
20	1,63	1,69	1,75	1,82	1,90	2,00	2,12	2,27	2,46	2,71	3,0
22	1,70	1,76	1,83	1,91	2,00	2,11	2,24	2,41	2,62	2,90	3,2
24	1,77	1,84	1,91	2,00	2,10	2,22	2,37	2,55	2,79	3,10	3,5
26	1,85	1,92	2,00	2,10	2,21	2,34	2,50	2,70	2,96	3,30	3,7
28	1,92	2,00	2,09	2,19	2,32	2,46	2,64	2,85	3,13	3,50	4,0
30	2,00	2,09	2,18	2,30	2,43	2,59	2,78	3,01	3,32	3,72	4,2
32	2,08	2,18	2,28	2,40	2,55	2,73	2,92	3,18	3,51	3,94	4,5
34	2,17	2,27	2,38	2,52	2,67	2,85	3,08	3,35	3,71	4,17	4,8
36	2,26	2,37	2,49	2,63	2,80	3,00	3,24	3,53	3,91	4,42	
38	2,35	2,47	2,60	2,76	2,93	3,15	3,41	3 72	4,13		
40	2,45	2,58	2,72	2,89	3,08	3,31	3,58	3,93			
42	2,56	2,69	2,85	3,02	3,23	3,47	3,77				
44	2,67	2,82	2,98	3,17	3,39	3,65					
46	2,79	2,95	3,12	3,33	3,56						
48	2,92	3,09	3,28	3,50							
50	3,06	3,24	3,44								
52	3,22	3,41									
54	3,38										

TABLE XII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du ⊙.*

ARGUMENT.

Hauteur.	Latitude.										
	60°	62°	64°	66°	68°	70°	72°	74°	76°	78°	80°
6°	2,01	2,14	2,29	2,47	2,68	2,94	3,25	3,65	4,16	4,84	5,79
8	2,02	2,15	2,30	2,48	2,70	2,95	3,27	3,66	4,17	4,86	5,82
10	2,03	2,16	2,32	2,50	2,71	2,97	3,29	3,68	4,20	4,88	5,85
12	2,05	2,18	2,33	2,51	2,73	2,99	3,31	3,71	4,23	4,92	5,89
14	2,06	2,20	2,35	2,53	2,75	3,01	3,34	3,74	4,26	4,96	5,94
16	2,08	2,22	2,37	2,56	2,78	3,04	3,37	3,77	4,30	5,00	5,99
18	2,10	2,24	2,40	2,59	2,81	3,07	3,40	3,82	4,35	5,06	6,06
20	2,13	2,27	2,43	2,62	2,84	3,11	3,44	3,86	4,40	5,12	6,13
22	2,16	2,30	2,46	2,65	2,88	3,15	3,49	3,91	4,46	5,19	6,21
24	2,19	2,33	2,50	2,69	2,92	3,20	3,54	3,97	4,53	5,27	6,30
26	2,23	2,37	2,54	2,74	2,97	3,25	3,60	4,04	4,60	5,35	6,41
28	2,27	2,41	2,58	2,79	3,02	3,31	3,67	4,11	4,68	5,45	6,52
30	2,31	2,46	2,63	2,84	3,08	3,38	3,74	4,19	4,77	5,55	6,65
32	2,36	2,51	2,69	2,90	3,15	3,45	3,82	4,28	4,87	5,67	6,79
34	2,41	2,57	2,75	2,97	3,22	3,53	3,90	4,38	4,99	5,80	6,93
36	2,47	2,63	2,82	3,04	3,30	3,61	4,00	4,48	5,11	5,95	
38	2,54	2,70	2,90	3,12	3,39	3,71	4,11	4,60	5,25		
40	2,61	2,78	2,98	3,21	3,49	3,82	4,23	4,74			
42	2,69	2,87	3,07	3,31	3,59	3,93	4,36				
44	2,78	2,96	3,17	3,42	3,71	4,07					
46	2,88	3,07	3,28	3,54	3,84						
48	2,99	3,18	3,41	3,67							
50	3,11	3,31	3,55								
52	3,25	3,46									
54	3,40										

TABLE XIII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du* ⊙.

SECOND TERME.

Argument.	Déclinaison de même dénomination que la latitude.												
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	2
1,00	0,00	0,04	0,07	0,11	0,14	0,17	0,21	0,24	0,28	0,31	0,34	0,38	0,
1,10	0,00	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,30	0,34	0,38	0,41	0,
1,20	0,00	0,04	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,29	0,33	0,37	0,41	0,45	0,
1,30	0,00	0,05	0,09	0,14	0,18	0,23	0,27	0,32	0,36	0,40	0,45	0,49	0,
1,40	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,24	0,29	0,34	0,39	0,43	0,48	0,53	0,
1,50	0,00	0,05	0,11	0,16	0,21	0,26	0,31	0,36	0,41	0,46	0,51	0,56	0,
1,60	0,00	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,33	0,39	0,44	0,49	0,55	0,60	0,
1,70	0,00	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,41	0,47	0,53	0,58	0,64	0,
1,80	0,00	0,06	0,13	0,19	0,25	0,31	0,37	0,44	0,50	0,56	0,62	0,67	0,
1,90	0,00	0,07	0,13	0,20	0,26	0,33	0,40	0,46	0,52	0,59	0,65	0,71	0,
2,00	0,00	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	0,42	0,48	0,55	0,62	0,68	0,75	0,
2,10	0,00	0,07	0,15	0,22	0,29	0,37	0,44	0,51	0,58	0,65	0,72	0,79	0,
2,20	0,00	0,08	0,15	0,23	0,31	0,38	0,46	0,53	0,61	0,68	0,75	0,82	0,
2,30	0,00	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,63	0,71	0,79	0,86	0,
2,40	0,00	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	0,58	0,66	0,74	0,82	0,90	0,
2,50	0,00	0,09	0,17	0,26	0,35	0,43	0,52	0,61	0,69	0,77	0,86	0,94	1,0
2,60	0,00	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,54	0,63	0,72	0,80	0,89	0,97	1,0
2,70	0,00	0,09	0,19	0,28	0,38	0,47	0,56	0,65	0,74	0,83	0,92	1,01	1,1
2,80	0,00	0,10	0,20	0,29	0,39	0,49	0,58	0,68	0,77	0,87	0,96	1,05	1,1
2,90	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99	1,09	1,1
3,00	0,00	0,11	0,21	0,31	0,42	0,52	0,62	0,73	0,83	0,93	1,03	1,12	1,2
3,10	0,00	0,11	0,22	0,32	0,43	0,54	0,65	0,75	0,85	0,96	1,06	1,16	1,2
3,20	0,00	0,11	0,22	0,34	0,45	0,56	0,67	0,77	0,88	0,99	1,10	1,20	1,3
3,30	0,00	0,12	0,23	0,35	0,46	0,57	0,69	0,80	0,91	1,02	1,13	1,24	1,3
3,40	0,00	0,12	0,24	0,36	0,47	0,59	0,71	0,82	0,94	1,05	1,16	1,27	1,3
3,50	0,00	0,12	0,24	0,37	0,49	0,61	0,73	0,85	0,97	1,08	1,20	1,31	1,4
3,60	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,87	0,99	1,11	1,23	1,35	1,4
3,70	0,00	0,13	0,26	0,39	0,52	0,64	0,77	0,90	1,02	1,14	1,27	1,39	1,5
3,80	0,00	0,13	0,27	0,40	0,53	0,66	0,79	0,92	1,05	1,17	1,30	1,42	1,5
3,90	0,00	0,14	0,27	0,41	0,54	0,68	0,81	0,94	1,08	1,21	1,33	1,46	1,5
4,00	0,00	0,14	0,28	0,42	0,56	0,70	0,83	0,97	1,10	1,24	1,37	1,50	1,6
4,10	0,00	0,14	0,29	0,43	0,57	0,71	0,85	0,99	1,13	1,27	1,40	1,54	1,6
4,20	0,00	0,15	0,29	0,44	0,59	0,73	0,87	1,02	1,16	1,30	1,44	1,57	1,7
4,30	0,00	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,89	1,04	1,19	1,33	1,47	1,61	1,7
4,40	0,00	0,15	0,31	0,46	0,61	0,76	0,92	1,07	1,21	1,36	1,51	1,65	1,7
4,50	0,00	0,16	0,31	0,47	0,63	0,78	0,94	1,09	1,24	1,39	1,54	1,69	1,8

TABLE XIII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du ⊙.*

SECOND TERME.

	Déclinaison de même dénomination que la latitude.												
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°
50	0,00	0,16	0,31	0,47	0,63	0,78	0,94	1,09	1,24	1,39	1,54	1,69	1,83
60	0,00	0,16	0,32	0,48	0,64	0,80	0,96	1,11	1,27	1,42	1,57	1,72	1,87
70	0,00	0,16	0,33	0,49	0,65	0,82	0,98	1,14	1,30	1,45	1,61	1,76	1,91
80	0,00	0,17	0,34	0,50	0,67	0,83	1,00	1,16	1,32	1,48	1,64	1,80	1,95
90	0,00	0,17	0,34	0,51	0,68	0,85	1,02	1,19	1,35	1,51	1,68	1,84	1,99
00	0,00	0,18	0,35	0,52	0,70	0,87	1,04	1,21	1,38	1,55	1,71	1,87	2,03
10	0,00	0,18	0,36	0,53	0,71	0,89	1,06	1,23	1,41	1,58	1,74	1,91	2,07
20	0,00	0,18	0,36	0,54	0,72	0,90	1,08	1,26	1,43	1,61	1,78	1,95	2,12
30	0,00	0,19	0,37	0,55	0,74	0,92	1,10	1,28	1,46	1,64	1,81	1,99	2,16
40	0,00	0,19	0,38	0,56	0,75	0,94	1,12	1,31	1,49	1,67	1,85	2,02	2,20
50	0,00	0,19	0,38	0,58	0,77	0,96	1,14	1,33	1,52	1,70	1,88	2,06	2,24
60	0,00	0,20	0,39	0,59	0,78	0,97	1,16	1,36	1,54	1,73	1,92	2,10	2,28
70	0,00	0,20	0,40	0,60	0,79	0,99	1,19	1,38	1,57	1,76	1,95	2,14	2,32
80	0,00	0,20	0,41	0,61	0,81	1,01	1,21	1,40	1,60	1,79	1,98	2,17	2,36
90	0,00	0,21	0,41	0,62	0,82	1,02	1,23	1,43	1,63	1,82	2,02	2,21	2,40
00	0,00	0,21	0,42	0,63	0,84	1,04	1,25	1,45	1,65	1,85	2,05	2,25	2,44
10	0,00	0,21	0,43	0,64	0,85	1,06	1,27	1,48	1,68	1,89	2,09	2,29	2,48
20	0,00	0,22	0,43	0,65	0,86	1,08	1,29	1,50	1,71	1,92	2,12	2,32	2,52
30	0,00	0,22	0,44	0,66	0,88	1,09	1,31	1,52	1,74	1,95	2,16	2,36	2,56
40	0,00	0,22	0,45	0,67	0,89	1,11	1,33	1,55	1,76	1,98	2,19	2,40	2,60
50	0,00	0,23	0,45	0,68	0,91	1,13	1,35	1,57	1,79	2,01	2,22	2,44	2,64
60	0,00	0,23	0,46	0,69	0,92	1,15	1,37	1,60	1,82	2,04	2,26	2,47	2,68
70	0,00	0,23	0,47	0,70	0,93	1,16	1,39	1,62	1,85	2,07	2,29	2,51	2,73
80	0,00	0,24	0,47	0,71	0,95	1,18	1,41	1,65	1,87	2,10	2,33	2,55	2,77
90	0,00	0,24	0,48	0,72	0,96	1,20	1,44	1,67	1,90	2,13	2,36	2,59	2,81
00	0,00	0,24	0,49	0,73	0,97	1,22	1,46	1,69	1,93	2,16	2,39	2,62	2,85
10	0,00	0,25	0,50	0,74	0,99	1,23	1,48	1,72	1,96	2,19	2,43	2,66	2,89
20	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,74	1,99	2,23	2,46	2,70	2,93
30	0,00	0,26	0,51	0,76	1,02	1,27	1,52	1,77	2,01	2,26	2,50	2,74	2,97
40	0,00	0,26	0,52	0,77	1,03	1,29	1,54	1,79	2,04	2,29	2,53	2,77	3,01
50	0,00	0,26	0,52	0,78	1,04	1,30	1,56	1,81	2,07	2,32	2,57	2,81	3,05
60	0,00	0,27	0,53	0,79	1,06	1,32	1,58	1,84	2,10	2,35	2,60	2,85	3,09
70	0,00	0,27	0,54	0,81	1,07	1,34	1,60	1,86	2,12	2,38	2,63	2,88	3,13
80	0,00	0,27	0,54	0,82	1,09	1,35	1,62	1,89	2,15	2,41	2,67	2,92	3,17
90	0,00	0,28	0,55	0,83	1,10	1,37	1,64	1,91	2,18	2,44	2,70	2,96	3,21
0	0,00	0,28	0,56	0,84	1,11	1,39	1,66	1,94	2,21	2,47	2,74	3,00	3,25

TABLE XIII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du ☉.*

SECOND TERME.

Argument.	Déclinaison de différente dénomination que la latitude.												
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	2
1,00	2,00	1,97	1,93	1,90	1,86	1,83	1,79	1,76	1,72	1,69	1,66	1,63	1
1,10	2,00	1,96	1,92	1,89	1,85	1,81	1,77	1,73	1,70	1,66	1,62	1,59	1
1,20	2,00	1,96	1,92	1,88	1,83	1,79	1,75	1,71	1,67	1,63	1,59	1,55	1
1,30	2,00	1,96	1,91	1,86	1,82	1,77	1,73	1,69	1,64	1,60	1,56	1,51	1
1,40	2,00	1,95	1,90	1,85	1,81	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,52	1,48	1
1,50	2,00	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,
1,60	2,00	1,94	1,89	1,83	1,78	1,72	1,67	1,61	1,56	1,51	1,45	1,40	1,
1,70	2,00	1,94	1,88	1,82	1,76	1,71	1,65	1,59	1,53	1,48	1,42	1,36	1,
1,80	2,00	1,94	1,87	1,82	1,75	1,69	1,63	1,56	1,50	1,44	1,38	1,33	1,
1,90	2,00	1,93	1,87	1,80	1,74	1,67	1,61	1,54	1,48	1,41	1,35	1,29	1,
2,00	2,00	1,93	1,86	1,79	1,72	1,65	1,58	1,52	1,45	1,38	1,32	1,25	1,
2,10	2,00	1,93	1,85	1,78	1,71	1,64	1,56	1,49	1,42	1,35	1,28	1,21	1,
2,20	2,00	1,92	1,85	1,77	1,69	1,62	1,54	1,47	1,39	1,32	1,25	1,18	1,
2,30	2,00	1,92	1,84	1,76	1,68	1,60	1,52	1,44	1,37	1,29	1,21	1,14	1,
2,40	2,00	1,92	1,83	1,75	1,67	1,58	1,50	1,42	1,34	1,26	1,18	1,10	1,
2,50	2,00	1,91	1,83	1,74	1,65	1,57	1,48	1,40	1,31	1,23	1,15	1,06	0,9
2,60	2,00	1,91	1,82	1,73	1,64	1,55	1,46	1,37	1,28	1,20	1,11	1,03	
2,70	2,00	1,91	1,81	1,72	1,62	1,53	1,44	1,35	1,26	1,17	1,08	0,99	
2,80	2,00	1,90	1,81	1,71	1,61	1,51	1,42	1,32	1,23	1,14	1,04		
2,90	2,00	1,90	1,80	1,70	1,60	1,50	1,40	1,30	1,20	1,10	1,01		
3,00	2,00	1,90	1,79	1,69	1,58	1,48	1,38	1,27	1,17	1,07	0,97		
3,10	2,00	1,89	1,78	1,68	1,57	1,46	1,36	1,25	1,15	1,04			
3,20	2,00	1,89	1,78	1,67	1,56	1,44	1,34	1,23	1,12	1,01			
3,30	2,00	1,89	1,77	1,66	1,54	1,43	1,31	1,20	1,09	0,98			
3,40	2,00	1,88	1,76	1,65	1,53	1,41	1,29	1,18	1,06				
3,50	2,00	1,88	1,76	1,63	1,51	1,39	1,27	1,15	1,04				
3,60	2,00	1,87	1,75	1,62	1,50	1,38	1,25	1,13	1,01				
3,70	2,00	1,87	1,74	1,61	1,49	1,36	1,23	1,11	0,98				
3,80	2,00	1,87	1,74	1,60	1,47	1,34	1,21	1,08					
3,90	2,00	1,86	1,73	1,59	1,46	1,32	1,19	1,06					
4,00	2,00	1,86	1,72	1,58	1,44	1,31	1,17	1,03					
4,10	2,00	1,86	1,71	1,57	1,43	1,29	1,15	1,01					
4,20	2,00	1,85	1,71	1,56	1,42	1,27	1,13	0,98					
4,30	2,00	1,85	1,70	1,55	1,40	1,25	1,11						
4,40	2,00	1,85	1,69	1,54	1,39	1,24	1,09						
4,50	2,00	1,84	1,69	1,53	1,37	1,22	1,06						

TABLE XIII.

Pour trouver la CORRECTION *de la plus petite des deux hauteurs du* ⊙.

SECOND TERME.

Différence	Déclinaison de différente dénomination que la latitude.												
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°
,50	2,09	1,84	1,69	1,53	1,37	1,22	1,06						
,60	2,00	1,84	1,68	1,52	1,36	1,20	1,04						
,70	2,00	1,84	1,67	1,51	1,35	1,18	1,02						
,80	2,00	1,83	1,67	1,50	1,33	1,17	1,00						
,90	2,00	1,83	1,66	1,49	1,32	1,15							
,00	2,00	1,83	1,65	1,48	1,30	1,13							
,10	2,00	1,82	1,64	1,47	1,29	1,11							
,20	2,00	1,82	1,64	1,46	1,28	1,10							
,30	2,00	1,82	1,63	1,45	1,26	1,08							
,40	2,00	1,81	1,62	1,44	1,25	1,06							
,50	2,00	1,81	1,62	1,43	1,23	1,05							
,60	2,00	1,80	1,61	1,42	1,22	1,03							
,70	2,00	1,80	1,60	1,40	1,21	1,01							
,80	2,00	1,80	1,60	1,39	1,19	0,99							
,90	2,00	1,79	1,59	1,38	1,18								
6,00	2,00	1,79	1,58	1,37	1,17								
6,10	2,00	1,79	1,57	1,36	1,15								
6,20	2,00	1,78	1,57	1,35	1,14								
6,30	2,00	1,78	1,56	1,34	1,12								
6,40	2,00	1,78	1,55	1,33	1,11								
6,50	2,00	1,77	1,55	1,32	1,10								
6,60	2,00	1,77	1,54	1,31	1,08								
6,70	2,00	1,77	1,53	1,30	1,07								
6,80	2,00	1,76	1,53	1,29	1,05								
6,90	2,00	1,76	1,52	1,28	1,04								
7,00	2,00	1,76	1,51	1,27	1,03								
7,10	2,00	1,75	1,51	1,26	1,01								
7,20	2,00	1,75	1,50	1,25	1,00								
7,30	2,00	1,75	1,49	1,24									
7,40	2,00	1,74	1,48	1,23									
7,50	2,00	1,74	1,48	1,22									
7,60	2,00	1,74	1,47	1,21									
7,70	2,00	1,73	1,46	1,20									
7,80	2,00	1,73	1,46	1,19									
7,90	2,00	1,72	1,45	1,17									
8,00	2,00	1,72	1,44	1,16									

TABLE XIV.

Azimuth correspondant au Multiplicateur du chemin fait en latitude.

Azimuth.	Multiplicateur.	Azimuth.	Multiplicateur.	Azimuth.	Multiplicateur.	Azimuth.	Multiplicateur.	Azimuth.	Multiplicateur.	Azimuth.	Multiplicateur.
0°	0,00	30°	0,13	60°	0,50	90°	1,00	120°	1,56	150°	1,87
1	0,00	31	0,14	61	0,52	91	1,02	121	1,52	151	1,88
2	0,00	32	0,15	62	0,53	92	1,04	122	1,53	152	1,88
3	0,00	33	0,16	63	0,55	93	1,05	123	1,55	153	1,89
4	0,00	34	0,17	64	0,56	94	1,07	124	1,56	154	1,90
5	0,00	35	0,18	65	0,58	95	1,09	125	1,57	155	1,91
6	0,01	36	0,19	66	0,59	96	1,11	126	1,59	156	1,91
7	0,01	37	0,20	67	0,61	97	1,12	127	1,60	157	1,92
8	0,01	38	0,21	68	0,63	98	1,14	128	1,62	158	1,93
9	0,01	39	0,22	69	0,64	99	1,16	129	1,63	159	1,93
10	0,02	40	0,23	70	0,66	100	1,17	130	1,64	160	1,94
11	0,02	41	0,25	71	0,67	101	1,19	131	1,66	161	1,95
12	0,02	42	0,26	72	0,69	102	1,21	132	1,67	162	1,95
13	0,03	43	0,27	73	0,71	103	1,23	133	1,68	163	1,96
14	0,03	44	0,28	74	0,72	104	1,24	134	1,70	164	1,96
15	0,03	45	0,29	75	0,74	105	1,26	135	1,71	165	1,97
16	0,04	46	0,31	76	0,76	106	1,28	136	1,72	166	1,97
17	0,04	47	0,32	77	0,78	107	1,29	137	1,73	167	1,97
18	0,05	48	0,33	78	0,79	108	1,31	138	1,74	168	1,98
19	0,06	49	0,34	79	0,81	109	1,33	139	1,76	169	1,98
20	0,06	50	0,36	80	0,83	110	1,34	140	1,77	170	1,99
21	0,07	51	0,37	81	0,84	111	1,36	141	1,78	171	1,99
22	0,07	52	0,38	82	0,86	112	1,38	142	1,79	172	1,99
23	0,08	53	0,40	83	0,88	113	1,39	143	1,80	173	1,99
24	0,09	54	0,41	84	0,90	114	1,41	144	1,81	174	2,00
25	0,09	55	0,43	85	0,91	115	1,42	145	1,82	175	2,00
26	0,10	56	0,44	86	0,93	116	1,44	146	1,83	176	2,00
27	0,11	57	0,46	87	0,95	117	1,45	147	1,84	177	2,00
28	0,12	58	0,47	88	0,97	118	1,47	148	1,85	178	2,00
29	0,13	59	0,49	89	0,98	119	1,49	149	1,86	179	2,00
30	0,13	60	0,50	90	1,00	120	1,50	150	1,87	180	2,00

TABLE XV:

Hauteur du soleil à l'instant de son passage au premier vertical, ou à celui du plus grand azimuth.

Latitude.	Déclinaison de même dénomination que la latitude.						
	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°
0°	0°. 0′	0° 0′	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′
2	0 . 0	90 . 0	30 . 1	19 . 30	14 . 31	11 . 36	9 . 40
4	0 . 0	30 . 1	90 . 0	41 . 52	30 . 5	23 . 41	19 . 36
6	0 . 0	19 . 30	41 . 52	90 . 0	48 . 40	40 . 9	30 . 11
8	0 . 0	14 . 31	30 . 5	48 . 41	90 . 0	53 . 16	42 . 1
10	0 . 0	11 . 35	23 . 41	37 . 0	53 . 17	90 . 0	56 . 38
12	0 . 0	9 . 40	19 . 36	30 . 11	42 . 2	56 . 59	90 . 0
14	0 . 0	8 . 18	16 . 45	25 . 36	35 . 7	45 . 53	59 . 15
16	0 . 0	7 . 16	14 . 40	22 . 17	30 . 20	39 . 4	48 . 59
18	0 . 0	6 . 29	13 . 3	19 . 46	26 . 46	34 . 11	42 . 17
20	0 . 0	5 . 51	11 . 46	17 . 48	24 . 1	30 . 31	37 . 27
22	0 . 0	5 . 21	10 . 44	16 . 12	21 . 49	27 . 37	33 . 43
24	0 . 0	4 . 55	9 . 53	14 . 55	20 . 1	25 . 17	30 . 45
26	0 . 0	4 . 34	9 . 9	13 . 48	18 . 31	23 . 21	28 . 19
28	0 . 0	4 . 16	8 . 33	12 . 52	17 . 15	21 . 43	26 . 17
30	0 . 0	4 . 0	8 . 1	12 . 4	16 . 10	20 . 19	24 . 34
32	0 . 0	3 . 52	7 . 34	11 . 23	15 . 14	19 . 8	23 . 6
34	0 . 0	3 . 35	7 . 10	10 . 46	14 . 25	18 . 8	21 . 50
36	0 . 0	3 . 24	6 . 49	10 . 15	13 . 42	17 . 11	20 . 45
38	0 . 0	3 . 15	6 . 31	9 . 47	13 . 4	16 . 23	19 . 44
40	0 . 0	3 . 7	6 . 14	9 . 21	12 . 30	15 . 40	18 . 52
42	0 . 0	2 . 59	5 . 59	8 . 59	11 . 59	15 . 3	18 . 6
44	0 . 0	2 . 53	5 . 46	8 . 39	11 . 33	14 . 29	17 . 25
46	0 . 0	2 . 47	5 . 34	8 . 21	11 . 10	13 . 58	16 . 48
48	0 . 0	2 . 41	5 . 23	8 . 5	10 . 48	13 . 31	16 . 15
50	0 . 0	2 . 36	5 . 13	7 . 50	10 . 28	13 . 6	15 . 45
52	0 . 0	2 . 32	5 . 5	7 . 37	10 . 11	12 . 44	15 . 18
54	0 . 0	2 . 28	4 . 57	7 . 25	9 . 54	12 . 24	14 . 53
56	0 . 0	2 . 25	4 . 50	7 . 14	9 . 40	12 . 6	14 . 32
58	0 . 0	2 . 22	4 . 43	7 . 4	9 . 27	11 . 49	14 . 12
60	0 . 0	2 . 19	4 . 37	6 . 56	9 . 15	11 . 34	13 . 54
62	0 . 0	2 . 16	4 . 31	6 . 48	9 . 4	11 . 21	13 . 37
64	0 . 0	2 . 14	4 . 27	6 . 41	8 . 53	11 . 9	13 . 23
66	0 . 0	2 . 12	4 . 22	6 . 34	8 . 44	10 . 58	13 . 10
68	0 . 0	2 . 9	4 . 19	6 . 28	8 . 37	10 . 48	12 . 58
70	0 . 0	2 . 8	4 . 13	6 . 23	8 . 31	10 . 39	12 . 47
72	0 . 0	2 . 6	4 . 12	6 . 19	8 . 25	10 . 31	12 . 38
74	0 . 0	2 . 5	4 . 9	6 . 15	8 . 20	10 . 25	12 . 30
76	0 . 0	2 . 4	4 . 7	6 . 11	8 . 15	10 . 19	12 . 23
80	0 . 0	2 . 2	4 . 4	6 . 5	8 . 8	10 . 10	12 . 11

Le 16 juin 1793.

Hauteur du bord inférieur du ☉	48°.49′ 48.28 48.18 48.6 47.57 47.7	Hauteur du bord supérieur de la ☾	26°.56′ 27.27 27.51 28.8 28.22 28.57	Somme des distances ☉☾	500°.40′.40″
Somme	289.25	Somme	167.21	Distance observée ☉☾	83.26.46
Le sixième	48.14.10″	Hauteur observée de la ☾	27°.53′.50″		
Rectification de l'instrument	+ 2.0				
Hauteur observée du ☉	48.16.10				

ÉLÉMENS DU CALCUL.

Latitude S	10°.16′.40″
Heure approchée	1.30
Longitude estimée	9.56
Heure de Paris	15.14
Demi-diamètre du ☉	15.46
Demi-diamètre de la ☾	14.54
Augmentation ½ diam. ☾	+ 7
Demi-diamètre corrigé	15.1
Parallaxe de la ☾	54.41
Diminution de la parallaxe	1
Parallaxe corrigée	54.40
Distance observée ☉☾	83°.26′.46″
Demi-diamètre du ☉	15.46
Demi-diamètre de la ☾	15.1
Distance apparente ☉☾	83.57.33
Hauteur observée du ☉	48°.16′.10″
Elévat. 6m,17. Dépression	— 4.24
	48.11.46
Demi-diamètre du ☉	+ 15.46
Hauteur apparente du ☉	48.27.32
Réfrac. et parallaxe. 0′.45″ Therm. + 26°,2 — 2 Baromet. 0m,762 0	— 0.43
Hauteur vraie du ☉	48.26.49
Hauteur observée de la ☾	27°.53′.50″
Elévat. 6m,17. Dépression	— 4.24
	27.49.6
Demi-diamètre de la ☾	— 15.1
Hauteur appar. de la ☾	27.34.5
Parallaxe réfract. 46′.38″ Thermom. 26°.2 + 5 Baromètre 0m,762 0	46.43
Hauteur vraie de la ☾	28.20.48

CALCUL DE LA DISTANCE VRAIE.

	+ 3″		
Distance apparente ☉☾	85°.57′.30		
Hauteur apparente du ☉	48.27.30	Com. cos	0,1783787
Hauteur apparente de la ☾	27.34.0	Com. cos	0,0523545
Somme	159.59.0		
½ somme	79.59.30	cos	9,400283
Distance — demi-somme	3.58.0	cos	9,9989584
Hauteur vraie du ☉	48.26.47	cos	9,8217234
Hauteur vraie de la ☾	28.20.45	cos	9,9445332
Somme	76.47.30	Somme	39,2359565
		Demi-somme	19,6179782 } 9,7238069 sin angle auxiliaire.
½ somme	38.23.45	cos	9,8941713 } 31°.58′.0″ Angle auxiliaire.
		Angl. auxil. cos	9,9285785
		Somme sin	9,8227496
		Demi-distance	41°.40′.26″
		Double	83.20.52
		Ajoutez les secondes négligées	+ 5
		DISTANCE VRAIE	83.20.55
		Distance des tables	à 15h.83.2′.0 à 18.84.24.33
Heure de la première distance des tables			15.0.0
		2e. intervalle	0.41.0
		HEURE DE PARIS	15.41.0

1er. intervalle 3h.	log. 4,03342
1re. dif. 0°.18′.40″	log. 3,05154
2e. dif. 1.2.24	com. log 6,30192
Somme	3,39288
2e. intervalle	0h.4′.0″

CALCUL DE L'HEURE DU LIEU.

Hauteur vraie du ☉	48°.26′.49″		
Latitude	10.16.40	Com. cos	0,0070251
Distance polaire	118.22.47	Com. sin	0,0372070
Somme	172.6.16		
Demi-somme	86.3.8	cos	8,8378864
Demi-somme — hauteur	37.36.19	sin	9,7854851
		Somme	18,6676036
		Demi-somme	sin 9,3338018
		Demi-angle horaire	12°.27′.18″
		Multipliant par	8
(*Ajoutez* 24h)		Heure du lieu	1h.39′.38″.24″
		Heure de Paris	15.41.0.0
		Différence	9.58.38.24
		LATITUDE ORIENTALE	149°.39′.36″

DÉCLINAISON DU ☉.

Le 15 à midi N	23°.21′.25″
Le 16 à midi	23.23.30
Différence en 24h	2.5
12	1.5,5
6	0.31,5
3	0.15,7
1	0.5,6
Pour 12	1.0,5
3	0.15,7
0.34	0.3,1
Pour 15.3	1.22
Déclinaison du ☉ A	23.22.47
Distance polaire	113.22.47

TABLE XV.

Hauteur du soleil à l'instant de son passage au premier vertical, ou à celui du plus grand azimuth.

Latitude.	Déclinaison de même dénomination que la latitude.						
	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°
0°	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′	0°. 0′
2	9 . 40	8 . 18	7 . 17	6 . 29	5 . 52	5 . 21	4 . 55
4	19 . 36	16 . 45	14 . 40	13 . 3	9 . 20	10 . 43	9 . 53
6	30 . 11	25 . 56	22 . 17	19 . 46	17 . 48	16 . 12	14 . 53
8	42 . 1	35 . 7	30 . 20	26 . 46	24 . 1	21 . 48	20 . 1
10	56 . 38	45 . 52	39 . 3	34 . 11	30 . 30	27 . 37	25 . 16
12	90 . 0	59 . 15	48 . 58	42 . 17	37 . 26	33 . 42	30 . 44
14	59 . 15	90 . 0	61 . 22	51 . 31	45 . 1	40 . 13	36 . 30
16	48 . 59	61 . 25	90 . 0	63 . 6	56 . 12	47 . 22	42 . 39
18	42 . 17	51 . 32	63 . 8	90 . 0	64 , 37	55 . 34	49 . 26
20	37 . 27	45 . 2	55 . 43	64 . 40	90 . 0	65 . 54	57 . 13
22	33 . 43	40 . 14	47 . 22	55 . 35	65 . 56	90 . 0	67 . 5
24	30 . 45	36 . 30	42 . 40	49 . 27	57 . 15	67 . 6	90 . 0
26	28 . 19	33 . 30	38 . 58	44 . 50	51 . 18	58 . 44	68 . 7
28	26 . 17	31 . 1	35 . 57	41 . 10	46 . 47	52 . 57	60 . 3
30	24 . 34	28 . 56	33 . 57	38 . 11	43 . 10	48 . 32	54 . 26
32	23 . 6	27 . 10	31 . 20	35 . 41	40 . 12	45 . 0	50 . 8
34	21 . 50	25 . 38	29 . 32	33 . 35	37 . 43	42 . 4	46 . 40
36	20 . 43	24 . 18	27 . 58	31 . 43	35 . 35	39 . 36	43 . 48
38	19 . 44	23 . 9	26 . 36	30 . 8	33 . 45	37 . 29	41 . 22
40	18 . 52	22 . 7	25 . 24	28 . 44	32 . 9	35 . 39	39 . 15
42	18 . 6	21 . 12	24 . 20	27 . 30	30 . 45	34 . 3	37 . 26
44	17 . 25	20 . 23	23 . 23	26 . 25	29 . 30	32 . 38	35 . 50
46	16 . 48	19 . 39	22 . 32	25 . 27	28 . 24	31 . 23	34 . 26
48	16 . 15	19 . 0	21 . 46	24 . 34	27 . 27	30 . 16	33 . 11
50	15 . 45	18 . 25	21 . 5	23 . 48	26 . 32	29 . 17	32 . 4
52	15 . 18	17 . 53	20 . 29	23 . 6	25 . 44	28 . 23	31 . 5
54	14 . 53	17 . 24	19 . 55	22 . 28	25 . 1	27 . 35	30 . 11
56	14 . 32	16 . 58	19 . 25	21 . 53	24 . 22	26 . 52	29 . 23
58	14 . 12	16 . 35	18 . 58	21 . 22	23 . 47	26 . 13	28 . 40
60	13 . 54	16 . 13	18 . 35	20 . 54	23 . 16	25 . 38	28 . 1
62	13 . 37	15 . 54	18 . 12	20 . 30	22 . 48	25 . 7	27 . 26
64	13 . 23	15 . 37	17 . 53	20 [illegible]	22 . 22	24 . 38	26 . 54
66	13 . 10	15 . 22	17 . 34	[illegible]	22 . 0	24 . 13	26 . 26
68	12 . 58	15 . 8	17 . 18	[illegible]	21 . 39	23 . 50	26 . 1
70	12 . 47	14 . 45	17 . 3	19 . 12	21 . 21	23 . 30	25 . 39
72	12 . 38	14 . 44	16 . 51	18 . 54	21 . 5	25 . 12	25 . 19
74	12 . 30	14 . 35	16 . 40	18 . 45	20 . 51	22 . 56	25 . 2
76	12 . 23	14 . 27	16 . 30	18 . 34	20 . 39	22 . 43	24 . 4
80	12 . 11	14 . 14	16 . 15	18 . 17	20 . 20	22 . 22	24 . 24

NOTICE

DES

PRINCIPAUX OUVRAGES DE FONDS

ET AUTRES EN GRAND NOMBRE,

COMPOSANT LA LIBRAIRIE DE Mme Ve COURCIER,

Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, la Marine, les Sciences et les Arts,

RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS.

A PARIS.

AVIS ESSENTIEL.

Depuis le 1er Juillet 1817, mon Imprimerie et mes Magasins de Librairie, qui étaient situés quai des Grands-Augustins, sont transférés *rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs*, n° 12; comme je n'ai aucun dépôt de mes Livres à Paris, c'est à ce dernier domicile seulement qu'on devra s'adresser.

Juin 1818.

AVIS. Indépendamment des Ouvrages portés sur le présent Catalogue, on trouve à ma Librairie *un assortiment considérable* de Livres anciens et nouveaux sur toutes les parties des Sciences et des Arts en général, mais particulièrement sur les *Mathématiques élémentaires et transcendantes*, l'*Astronomie*, *la Marine*, la *Mécanique*, l'*Optique*, l'*Horlogerie*, l'*Architecture civile et hydraulique*, l'*Art Militaire*, la *Physique*, la *Chimie*, la *Teinture*, la *Minéralogie*, l'*Histoire naturelle*, les *Belles-Lettres*, etc., etc.

Ces Ouvrages sont en partie détaillés sur mon Catalogue général, *que j'enverrai gratis aux personnes qui m'en feront la demande.*

(Les Lettres non affranchies ne me parviennent pas.)

NOTA. Tous les prix marqués sur le présent Catalogue sont *ceux de Paris et brochés*; les personnes qui désireront recevoir les Livres francs de port par la poste, ajouteront un tiers en sus. (*Les Ouvrages reliés et cartonnés ne peuvent être envoyés par cette voie.*)

ALLIX, Lieutenant-Général. THEORIE DE L'UNIVERS, ou de la cause primitive du mouvement et de ses principaux effets, 2e édit., 1 vol. in-8., 1818, 5 fr.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES pures et appliquées, rédigées par M. Gergonne, 7 vol. in-4. 120 fr.
(*Voyez* à la fin du Catalogue.)

ANNUAIRE présenté au Roi par le Bureau des Longitudes de France, pour 1818, in-18. (Cet Ouvrage paraît tous les ans.) 1 fr.

ANSELIN. Expériences sur la main-d'œuvre des différens travaux, dépendans du service des Ingénieurs des Ponts et Chaussées, in-4. 10 fr.

Azemar et *Garnier*. TRISECTION DE L'ANGLE, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet, in-8., 1809. 2 fr. 50 c.

ART DE LA MARINE, faisant partie de l'Encyclopédie méthodique, 3 vol. in-4. et atlas. 72 fr.

BAGOT. *Tables analytiques des Calculs d'intérêts*, etc. 2 fr.

BAILLY. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE ET MODERNE, dans laquelle on a conservé littéralement le texte, en supprimant seulement les calculs abstraits, les notes hypothétiques, les digressions scientifiques; par V. C., 2 vol. in-8. (Cet Ouvrage se donne très souvent pour prix dans les Lycées.) 9 fr.

BARRUEL, ex-Professeur à l'École Polytechnique. TABLEAUX DE PHYSIQUE, ou Introduction à cette science, à l'usage des Élèves de l'École Polytechnique; nouvelle édition, entièrement refondue et augmentée, grand in-4., cart. 10 fr.

BERLINGHIERI. *Examen des operations et des travaux de Cesar* au siége d'Alezia, etc., in-8., 1812. 3 fr.

BERNOULLI. (Joannis) *Opera*, 4 vol. in-4., reliés. 48 fr.

BERNOULLI. (Jacobi) *Opera*, 2 vol. in-4. 36 fr.

—— *Ars conjectandi*, in-4. 21 fr.

BERTHOUD. Mécanicien de la Marine, Membre de l'Institut de France. Collection de ses différens OUVRAGES SUR L'HORLOGERIE, qui se vendent tous séparément, savoir :

1°. L'ART DE CONDUIRE ET DE RÉGLER LES PENDULES ET LES MONTRES, quatrième édition, augmentée d'une planche, et de la manière de tracer la ligne méridienne du tems moyen. Paris, 1811, vol. in-12, avec 5 planches. 2 fr. 50 c.

2°. ESSAI SUR L'HORLOGERIE, dans lequel on traite de cet art relativement à l'usage civil, à l'Astronomie et à la Navigation, avec 38 pl., 2 vol. in-4. 36 fr.

3°. HISTOIRE DE LA MESURE DU TEMS PAR LES HORLOGES. Paris, 1802, 2 vol. in-4., avec 23 pl. gravées. 36 fr.

4°. TRAITÉ DES HORLOGES MARINES, contenant la théorie, la construction, la main-d'œuvre de ces machines, et la manière de les éprouver, un gros vol. in-4., avec 27 pl. 24 fr.

5°. ÉCLAIRCISSEMENS SUR L'INVENTION, la théorie, la construction et les épreuves des nouvelles machines proposées en France pour la détermination des longitudes en mer par la mesure du tems, servant de suite à l'*Essai sur l'Horlogerie*, et au *Traité des Horloges marines*, etc., 1 v. in-4. 6 fr.

6°. LES LONGITUDES PAR LA MESURE DU TEMS, ou Méthode pour déterminer les longitudes en mer, avec le secours des horloges marines, 1 vol. in-4. 9 fr.

7°. DE LA MESURE DU TEMS, ou Supplément au Traité des Horloges marines et à l'Essai sur l'Horlogerie, contenant les principes de construction, d'exécution et d'épreuves des petites horloges à longitudes, portatives, et l'application des mêmes principes de construction, etc., aux montres de poche, etc., un vol. in-4. avec 11 planch. en taille-douce. 18 fr.

8°. TRAITÉ DES MONTRES A LONGITUDES, contenant la description et tous les détails de main-d'œuvre de ces machines, leurs dimensions, la manière de les éprouver, etc.,

9°. Suite du TRAITÉ DES MONTRES A LONGITUDES, contenant la construction des Montres verticales portatives et celle des Horloges horizontales, pour servir dans les plus longues traversées, un vol. in-4. avec deux planches en taille-douce. — *Prix de ces deux derniers volumes réunis en un seul*, 24 fr.

10°. Supplément au *Traité des Montres à Longitudes*, suivi de la Notice des recherches de l'Auteur. 9 fr.

BERTRAND. *Développement nouveau* de la partie élémentaire des Mathématiques. Genève, 1778, 2 vol. in-4. 33 fr.

BEUDANT. *Essai d'un Cours général et élémentaire des Sciences physiques*, in-8., 1815, 7 fr. 50 c.

BEXON. APPLICATION DE LA THÉORIE DE LA LÉGISLATION PÉNALE, ou Code de la Sûreté publique et particulière, rédigé en Projet pour les États de Sa Majesté le Roi de Bavière, dédié à Sa Majesté, et imprimé avec son autorisation, un vol. in-fol., 1807. 36 fr.

BEZOUT. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES à l'usage de la Marine, de l'Artillerie et des Élèves de l'École Polytechnique, en 6 vol. in-8., édition revue et augmentée par MM. Reynaud, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique; Garnier, ex-professeur à l'École Polytechnique, et de Rossel, Membre de l'Institut. 29 fr.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

—— ARITHMÉTIQUE, AVEC DES NOTES fort étendues, et des Tables de Logarithmes, etc., par Reynaud, huitième édition, 1816, 1 vol. in-8. 3 fr.

—— GÉOMÉTRIE, AVEC DES NOTES fort étendues, par Reynaud, 1812. 5 fr.

—— ALGÈBRE DE BEZOUT et Application de cette science à l'Arithmétique et à la Géométrie. Nouvelle édition, avec des Notes fort étendues, par Reynaud, in-8., 1812. 5 fr.

—— MÉCANIQUE, nouvelle édition, revue et considérablement augmentée, par M. Garnier, 2 vol. in-8. 10 fr.

—— TRAITÉ DE NAVIGATION, nouvelle édition, revue et augmentée de Notes, et d'une Section supplémentaire où l'on donne la manière de faire les

Calculs des Observations, avec de nouvelles Tables qui les facilitent; par M. de Rossel, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ancien Capitaine de Vaisseau, etc. Novembre 1814, un vol. in-8., avec 10 planches. 6 fr.
Cette édition du *Cours de Mathématiques de Bezout* est la plus correcte et la plus complète de toutes celles qui ont paru jusqu'à ce jour.

BIOT, Membre de l'Institut, etc. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, destiné à l'enseignement dans les Lycées, 3 v. in-8., 1810. 25 fr.
—— ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE appliquée aux Courbes et aux Surfaces du second ordre, in-8. 3e éd., 1813. 5 fr. 50 c.
—— PHYSIQUE MÉCANIQUE de Fischer, traduite de l'allemand, in-8. 2e édition, 1813. 6 fr.
—— TABLES BAROMÉTRIQUES portatives, donnant la différence de niveau par une simple soustraction, in-8. 1 fr. 50 c.
—— *Essai* sur l'histoire générale des Sciences pendant la révolution, in-8. 1 fr. 50 c.

BLAVIER. *Nouveau Barrême*, ou Comptes faits en livres, sous et francs, suivi d'un Barrême pour les Mesures, in-8. 7 fr.

BOILEAU et AUDIBERT. BARRÊME GÉNÉRAL, ou Comptes faits de tout ce qui concerne les nouveaux poids, mesures et monnaies de la France, etc.; un vol. de 480 pages, in-8., broché, 1803. 6 fr.

BOILEAU. Art poétique, traduit en vers latins par Paul, in-18. 2 fr.

BORDA. TABLES TRIGONOMÉTRIQUES DÉCIMALES, calculées par Ch. Borda, revues, augmentées et publiées par J. B. J. Delambre. Paris, de l'Imprimerie de la République, an IX, in-4. 12 fr.

BOSSUT. *Histoire générale des Mathématiques*, depuis leur origine jusqu'à l'année 1808, 2 vol. in-8., 1810. 12 fr.
—— Saggio sulla Storia generale delle Matematiche, prima edizione italiana, con riflessioni ed aggiunte di Gregoria Fontana. Milano, 4 vol. in-8., br. 15 fr.

BOUCHARLAT, Professeur de Mathématiques transcendantes aux Écoles militaires, Docteur ès-Sciences, etc. THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE, précédée des principes fondamentaux de la Géométrie analytique, seconde édit., augmentée, in-8. 5 fr.
—— ÉLÉMENS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, in-8., 1814. 4 fr. 50 c.
—— ÉLÉMENS DE MÉCANIQUE, in-8., 1815. 6 fr.

BOUCHER. *Institution au Droit maritime*, etc., Ouvrage utile aux marins, négocians, etc., etc., 1 vol. in-4. 18 fr.

BOUCHESEICHE. *Notions élémentaires de Géographie*; Ouvrage qui a été jugé propre à l'Instruction publique, quatrième édition, in-12, 1809. 2 fr. 50 c.

BOURDON, Professeur de Mathématiques au Collége Henri IV. THÈSE DE MÉCANIQUE qui a été soutenue le 9 Mars 1811 devant la Faculté des Sciences de Paris, suivie du Programme de la Thèse d'Astronomie qui a été soutenue le 25 Mars 1811, devant la même Faculté, in-4. 2 fr. 50 c.
—— ELEMENS D'ALGEBRE, 1 vol. in-8. 1817. 7 fr.

BREISLACK. *Introduction à la Géologie*, traduite de l'italien par Bernard, 1 vol. in-8., 1812. 7 fr.

BRISSON. PESANTEUR SPECIFIQUE DES CORPS. Ouvrage utile à l'Histoire naturelle, aux Arts et au Commerce, 1 vol. in-4. avec planches. 15 fr.
—— *Dictionnaire raisonné de Physique*, 6 vol. in-8. et atlas in-4. 36 fr.

BUDAN. *Nouvelle Méthode* pour la résolution des Équations numériques d'un degré quelconque, d'après laquelle tout le calcul exige pour cette résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'Arithmétique, in-4., 1807. 5 fr.

BULLIARD. Histoire des Plantes vénéneuses et suspectes de la France, un vol. in-8., nouvelle édition. 4 fr. 50 c.

BUQUOY. *Exposition d'un nouveau principe de Dynamique*, in-4., 1815. 2 fr. 50 c.

BURCKHARDT, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France. TABLE DES DIVISEURS POUR TOUS LES NOMBRES DU 1er, 2e et 3e MILLION, avec les Nombres premiers qui s'y trouvent, 1 vol. grand in-4., papier vélin, 1817. 36 fr.
NOTA. Chaque million se vend séparément, savoir: le 1er million 15 fr., et les 2e et 3e millions, chacun 12 fr.
—— TABLES DE LA LUNE, Ouvrage faisant partie des Tables astronomiques publiées par le Bureau des Longitudes, in-4., 1812. 8 fr.

CAGNOLI. TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE, trad. de l'italien par M. Chompré, deuxième édition, revue et considérablement augmentée, in-4., 1808. 18 fr.

CANARD. *Traité élémentaire du Calcul des inéquations*, in-8. 6 fr.

CARNOT, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur. GÉOMÉTRIE DE POSITION, in-4., papier vélin, 1803. 18 fr.

—— *Idem*, grand papier vélin. 36 fr.

—— *Mémoire* sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un Essai sur la théorie des Transversales in-4., 1806. 5 fr.

—— DE LA DÉFENSE DES PLACES FORTES, Ouvrage composé par ordre du Gouvernement, pour l'instruction des Élèves du Corps du Génie, 2e édition, 1811, in-8. 6 fr.

—— Le même Ouvrage, *troisième édition*, considérablement augm., un vol. in-4. avec 11 pl. très bien gravées, 1812. 24 fr.

—— DE LA CORRÉLATION DES FIGURES DE GÉOMÉTRIE. Paris, an 9, in-8., grand papier. 3 fr.

—— RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL, seconde édit., 1813. 3 fr. 50 c.

—— *Exposé de sa conduite politique*, depuis le 1er juillet 1814, in-8., 1815. 1 fr. 25 c.

CARTE BOTANIQUE de la Méthode naturelle de Jussieu, in-8., et 4 tableaux, format atlantique. 6 fr.

CHAMBON-DE-MONTAUX. *Traité de la Fièvre maligne simple*, et des Fièvres compliquées de malignité, 4 v. in-12. 10 fr.

CHANTREAU. Histoire de France abrégée et chronologique, depuis la première expédition des Gaulois jusqu'en septembre 1808, etc., 2 vol. in-8. 16 fr.

—— *Tablettes chronologiques* et documentaires pour servir à l'étude de l'Histoire civile et militaire de la France, depuis l'arrivée de Jules-César dans les Gaules jusqu'à nos jours, etc., in-8. 4 fr.

CHLADNI, Correspondant de l'Académie de Saint-Pétersbourg, etc. TRAITÉ D'ACOUSTIQUE, avec 8 planch., in-8., 1809. 7 fr. 50 c.

CHOMPRÉ. Méthode la plus naturelle et la plus simple d'enseigner à lire, in-8., 1813. 1 fr. 25 c.

CHORON, Correspondant de l'Institut. MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE DE COMPOSITION, où les préceptes sont soutenus d'un grand nombre d'exemples très clairs et fort étendus, et à l'aide de laquelle on peut apprendre soi-même à composer toute espèce de Musique; traduite de l'allemand de Albrechtsberger (J. Georg.), Organiste de la Cour de Vienne, etc., et enrichie d'une Introduction et d'un grand nombre de Notes, par A. Choron, 2 vol. in-8., dont un de Musique, 1814. 12 fr.

CHRISTIAN. DES IMPOSITIONS et de leur influence sur l'Industrie agricole, manufacturière et commerciale, et sur la prospérité publique, in-8., 1814. 2 fr. 50 c.

CLAIRAUT. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, sixième édition, avec des Notes et des Additions très étendues, par M. Garnier, précédé d'un Traité d'Arithmétique par Théveneau, et d'une Instruction sur les nouveaux poids et mesures, 2 v. in-8., 1801. 9 fr.

—— THÉORIE DE LA FIGURE DE LA TERRE, tirée des principes de l'Hydrostatique, in-8., 2e édition, 1808. 10 fr.

Commentaire sur l'Esprit des Lois de Montesquieu, suivi d'observations inédites de Condorcet sur le 29e livre du même Ouvrage, 1 vol. in-8., 1817. 7 fr.

CONDILLAC. Langue des Calculs, in-8. 5 fr.

—— Le même ouvrage, 2 vol. in-12. 4 fr.

—— Grammaire française, 1 vol. in-12. 2 fr.

CONDORCET. *Essai* sur l'application de l'Analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix, 1 v. in-4. 15 fr.

—— *Moyen d'apprendre à compter* sûrement et avec facilité; Ouvrage posthume, deuxième édition, in-12. 1 fr. 50 c.

CONNAISSANCE DES TEMS à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, publiée par le Bureau des Longitudes de France, pour les années 1818, 1819 et 1820. Prix 6 fr. avec Additions, et 4 fr. sans Additions.

On peut se procurer la Collection complète ou des années séparées de cet Ouvrage, depuis 1760 jusqu'à ce jour.

CORDIER (Edmond), Instituteur. *L'Abeille française*, 2 vol. in- 6 fr.

—— *Mémorial de Théodore*, in-8. 1 fr. 25 c.

—— *Préparation à l'étude de la Mythologie*, in-8., 1810. 3 fr.

COTTE. *Mémoire sur la Météorologie*, 2 vol. in-4. 25 fr.

—— TABLE DU JOURNAL DE PHYSIQUE, un vol. in-4. 4 fr.

COUSIN. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE de l'Analyse mathématique ou d'Algèbre in-8. 4 fr. 50 c.

—— TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL et intégral, 2 vol. in-4., 6 pl. 21 fr.

D'ABREU. PRINCIPES MATHÉMATIQUES de feu Joseph-Anastase da Cunha, Professeur à l'Université de Coimbre (comprenant ceux de l'Arithmétique, de

la Géométrie, de l'Algèbre, de son application à la Géométrie, et du Calcul différentiel et intégral), traités d'une manière entièrement nouvelle, traduits littéralement du portugais, in-8., 1816. 5 fr.

D'ARCON. *De la force militaire* considérée dans ses rapports conservateurs, un vol. in-8. 3 fr.

DAUBÉ Essai d'Idéologie, in-8. 4 fr.

DAUBUISSON. *Mémoire sur les Basaltes de la Saxe*, in-8. 3 fr.

DAULNOY. *Calcul des Intérêts* de toutes les sommes à tous les taux, et pour tous les jours de l'année, etc. 1 fr. 80 c.

DÉFENSE D'ANCONE et des Départemens romains, le Tronto, le Musone et le Metauro, par le général Monnier, aux années 7 et 8, 2 vol. in-8. 10 fr.

DELAISTRE, ancien Professeur à l'École Militaire de Paris. *Encyclopédie de l'Ingénieur*, ou Dictionnaire des Ponts et Chaussées, 3 vol. in-8., avec un vol. de pl., in-4., 1812. 42 fr.

DELAMBRE, Secrétaire perpétuel de l'Institut, Membre de la Légion-d'Honneur, Trésorier de l'Université royale de France, etc. TRAITÉ COMPLET D'ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, 3 v. in-4., avec 29 pl., 1814. 60 fr.

NOTA. Cet ouvrage est sans contredit le *meilleur Traité d'Astronomie* et le plus complet qui ait encore paru; il remplace celui de Lalande, qui est épuisé.

—— Abrégé du même Ouvrage, ou LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE données au Collége de France, un vol. in-8., avec 14 planch., 1813. 10 fr.

—— HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE, 2 vol. in-4., avec 17 pl., 1817. 40 fr.

—— MÉTHODES ANALYTIQUES pour la détermination d'un arc du Méridien. Paris, an 7, in-4. 6 fr.

—— TABLES ASTRONOMIQUES publiées par le Bureau des Longitudes de France. Première partie. TABLES DU SOLEIL par M. Delambre; TABLES DE LA LUNE par M. Burg, in-4., 1806. 18 fr.

—— TABLES ASTRONOMIQUES publiées par le Bureau des Longitudes de France; NOUVELLES TABLES DE JUPITER ET DE SATURNE calculées d'après la théorie de M. Laplace, et suivant la division décimale de l'angle droit, par M. Bouvard, in-4. 9 fr.

—— TABLES ASTRONOMIQUES du Bureau des Longitudes; TABLES ECLIPTIQUES des SATELLITES DE JUPITER, d'après la théorie de M. Laplace et la totalité des observations faites depuis 1662 jusqu'à l'an 1802, par M. Delambre, in-4., 1817. 10 fr.

—— TABLES DE LA LUNE. (*Voyez* BURCKHARDT.)

—— *Bases du Système métrique*, 3 vol. in-4. (*Voyez* BORDA.) 66 fr.

DELAMÉTHERIE, Professeur au Collége de France, Rédacteur du Journal de Physique, etc. CONSIDÉRATIONS SUR LES ÊTRES ORGANISÉS, 2 vol. in-8. 12 fr.

—— DE LA PERFECTIBILITÉ et de la dégénérescence des Êtres organisés, formant le tome 3e des Considérations sur les Êtres organisés, 1 vol. in-8. 6 fr.

—— DE LA NATURE DES ÊTRES EXISTANS, 1 vol. in-8. 6 fr.

—— LEÇONS DE MINÉRALOGIE données au Collége de France, 2 vol. in-8., 1812. 14 fr.

—— *Leçons de Géologie* données au Collége de France, 3 v. in-8., 1816. 18 fr.

DELAPRISE. *Méthode nouv. pour tracer les Cadrans solaires*, in-8, 1781. 8 fr.

DELAU. DÉCOUVERTE DE L'UNITÉ et généralité de principe, d'idée et d'exposition de la Science des Nombres, son application positive et régulière à l'Algèbre, à la Géométrie, etc., in-8. 3 fr.

DELUC. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE GÉOLOGIE, in-8., 1809. 5 fr.

DEPARCIEUX. *Traité de Trigonométrie et de Gnomonique*, in-4., 1741. 20 fr.

DESTUTT-TRACY, Pair de France, Membre de l'Institut. ÉLÉMENS D'IDÉOLOGIE, 5 vol. in-8. 24 fr.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

—— IDÉOLOGIE proprement dite, in-8., 3e édition, 1817. 5 fr.

—— GRAMMAIRE, in-8., 2e édition, 1817. 5 fr.

—— LOGIQUE, in-8. 6 fr.

—— TRAITÉ DE LA VOLONTÉ ET DE SES EFFETS, 4e et 5e Parties, in-8., seconde édition, 1818. 6 fr.

—— PRINCIPES LOGIQUES, ou Recueil de faits relatifs à l'intelligence humaine, in-8., 1817. 2 fr.

DEVELEY. ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, avec figures, seconde édition, in-8., 1816. 6 fr.

—— APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, in 4., 1816. 14 fr.

DEVELEY. *Physique d'Émile*, in-8. (*Et autres ouvrages du même Auteur.*)
DICTIONNAIRE DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE, 2 v. in-4, dern. édit. 36 fr.
DIEUDONNÉ-THIÉBAULT, Proviseur du Lycée de Versailles. GRAMMAIRE PHILOSOPHIQUE, ou la Métaphysique, la Logique en un seul corps de doctrine, 2 vol. in-8. 7 fr.
—— Traité du Style, 2 vol. in-8. 9 fr.
DIONIS-DU-SÉJOUR. TRAITÉ DES MOUVEMENS APPARENS DES CORPS CÉLESTES, 2 vol. in-4. 48 fr.
DRUET. *Mémoire* sur différentes questions relatives à la Physique générale, in-8., 1811. 1 fr. 25 c.
DUBOURGUET, Professeur de Mathém. au Collége Louis-le-Grand, ancien Off. de Marine, etc. TRAITÉ DE NAVIGATION, Ouvrage approuvé par l'Institut de France, et mis à la portée de tous les Navigat., 1808, in-4., avec fig. et tableaux. 20 fr.
—— TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, indépendans de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites; Ouvrage mis à la portée des Commençans, et où se trouvent plusieurs nouvelles théories et méthodes fort simplifiées d'intégrations, avec des applications utiles aux progrès des Sciences exactes, 2 vol. in-8. 16 fr.
DUCHATELET. *Principes mathématiques* de la Philosophie naturelle, 2 vol. in-4. 24 fr.
DUCREST. *Vues nouvelles* sur les Courans d'eau, la Navigation intérieure et la Marine, in-8., 1803. 4 fr.
DUFRESNE. *Barrême*, ou Comptes faits, pour les achats et ventes d'eau-de-vie, in-8. 2 fr. 50 c.
DUPIN, Capitaine du Génie maritime, etc. DÉVELOPPEMENS DE GÉOMÉTRIE, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc., pour faire suite à la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE et à la Géométrie analytique de M. MONGE, in-4., avec planch., 1813. 15 fr.
—— ESSAIS SUR DÉMOSTHÈNES et sur son éloquence, contenant une traduction des Harangues pour Olynthe, avec le texte en regard; des considérations sur les beautés des pensées et du style de l'Orateur athénien, in-8., 1814. 4 fr.
—— *Du rétablissement de l'Académie de Marine*, in-8., 1815. 1 fr. 50 c.
—— *Tableau de l'Architecture navale militaire*, analyse, etc., in-4., 1815. 1 fr. 50 c.
DUPUIS. MÉMOIRE EXPLICATIF DU ZODIAQUE *chronologique et mythologique*, Ouvrage contenant le tableau comparatif des maisons de la Lune chez les différens peuples de l'Orient, in-4., 1806. 6 fr.
DUPUIS. ANALYSE RAISONNÉE DE L'ORIGINE DE TOUS LES CULTES, ou Religion universelle; sur l'ouvrage publié en l'an III, vol. in-8. 3 fr.
DURAND. *Statique élémentaire*, ou Essai sur l'état géographique, physique et politique de la Suisse; 4 vol. in-8. 12 fr.
DUTENS. Analyse raisonnée des principes fondamentaux de l'Economie politique, in-8. 3 fr.
DUVAL-LEROY. *Elemens de Navigation*, in-8. 6 fr.
DUVILLARD. RECHERCHES SUR LES RENTES, les Emprunts, etc., in-4. 6 fr.
—— ANALYSE ET TABLEAU de l'influence de la petite vérole sur la mortalité à chaque âge, et de celle qu'un préservatif tel que la vaccine peut avoir sur la population et la longévité, 1806, in-4. 10 fr.
Éloge de l'Ivresse, nouv. édit, fig., in-12. 1 fr. 50 c.
Éloge de Voltaire, par Laharpe, in-8. 1 fr. 50 c.
EUCLIDE. ELEMENS DE GÉOMETRIE, avec Notes de Peyrard, 1 v. in-8. 6 fr.
EULER. ÉLEMENS D'ALGÈBRE, nouv. édit., 1807, 2 vol. in-8. 12 fr.
Cette édit. est la meilleure et la plus complète qui ait encore paru. La première partie contient l'Analyse déterminée, revue et augmentée de Notes par M. Garnier. La deuxième partie contient l'Analyse indéterminée, revue et augmentée de Notes par M. Lagrange, Sénateur, Membre de l'Institut, etc.
—— LETTRES A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE, sur divers sujets de Physique et de Philosophie, nouv. édit., conforme à l'édition originale de Saint-Pétersbourg, revue et augmentée de l'Éloge d'Euler par Condorcet, et de diverses Notes par M. Labey, ex-Instituteur à l'École Polytechnique, etc., 2 forts vol. in-8. de 1180 pag., avec le portrait de l'Auteur, 1812, belle édition. 15 fr.
—— Et papier vélin, dont on a tiré quelques exemplaires. 30 fr.
—— Introductio in Analysin infinitorum, 2 vol. in-4. 24 fr.
Et tous les autres Ouvrages de cet Auteur.
FISCHER. PHYSIQUE MÉCANIQUE, traduite de l'allemand, avec des Notes de M. Biot, in-8., seconde édit., 1813. 6 fr.

FLEURIEU, Membre de l'Institut national des Sciences et des Arts, et du Bureau des Longitudes, etc. VOYAGE AUTOUR DU MONDE, pendant les années 1790, 1791 et 1792, par ETIENNE MARCHAND, précédé d'une Introduction historique; auquel on a joint des Recherches sur les Terres australes de Drake, et un Examen critique du Voyage de Roggeween, avec Cartes et Figures; par P. C. CLARET FLEURIEU, Membre de l'Institut national des Sciences et des Arts, et du Bureau des Longitudes, etc., 4 vol. in-4., 1809. 40 fr.

—— Le même Ouvrage, 5 vol. in-8., avec Atlas in-4. 25 fr.

—— *Application du Système métrique et décimal* à l'Hydrographie et aux Calculs de Navigation, in-4. 5 fr.

FLORE NATURELLE ET ÉCONOMIQUE DES PLANTES QUI CROISSENT AUX ENVIRONS DE PARIS, au nombre de plus de 400 genres et de 1400 espèces, contenant l'énumération de ces Plantes, rangées suivant le système de Jussieu, et par ordre alphabétique, leurs noms triviaux, leurs synonymies françaises, leurs descriptions, les endroits où se trouvent les plus rares : 2e édit., augmentée de la Flore naturelle et de 24 planches soigneusement gravées; par une Société de Naturalistes, 2 vol. in-8. 10 fr.

FOURCROY. TABLEAUX SYNOPTIQUES DE CHIMIE, in-fol., cart. 9 fr.

—— SYSTÈME DES CONNAISSANCES CHIMIQUES, 11 vol. in-8. 60 fr.

—— *Analyse chimique* de l'Eau sulfureuse d'Enghien, pour servir à l'histoire des eaux sulfureuses en général, in-8. 5 fr.

FRANÇAIS, Professeur à Metz. *Mémoire sur le mouvement de rotation* d'un corps solide autour de son centre de masse, in-4., 1813. 2 fr. 50 c.

FRANCHINI. *Mémoires* sur l'intégration des Equations différentielles, in-4. 1 fr. 50 c.

FRANCŒUR, Professeur de la Faculté des Sciences de Paris, Examinateur des Candidats de l'Ecole Polytechnique, etc.

1°. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES, dédié à S. M. Alexandre Ier, Empereur de toutes les Russies; Ouvrage destiné aux Elèves des Ecoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se préparent à y être admis, 2 vol. in-8., avec planches. 15 fr.

2°. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE, à l'usage des Lycées, etc., 4e édit., in-8. 7 fr.

3°. ÉLÉMENS DE STATIQUE, in-8. 3 fr.

4°. URANOGRAPHIE, ou TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, des Géographes, des Marins, des Ingénieurs, accompagné de Planisphères, seconde édition, revue et considérablement augmentée, 1818, 1 vol. in-8., avec 11 planches. 9 fr.

FRAY, Commissaire-Ordonnateur des Guerres, etc. ESSAI SUR L'ORIGINE DES CORPS ORGANISES ET INORGANISES, et sur quelques phénomènes de Physiologie animale et végétale, 1 vol. in-8., 1817. 5 fr.

FULTON. (Robert) *Recherches* sur les moyens de perfectionner les Canaux de navigation, et sur les nombreux avantages des petits Canaux, etc., in-8. 7 fr. 50 c.

GARNIER, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique, Docteur de la Faculté des Sciences de l'Université, Professeur de Mathématiques à l'Ecole royale militaire.

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES, comprenant les Ouvrages suivans, qui se vendent chacun séparément, savoir :

1°. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des Élèves de tout âge, deuxième édition, in-8., 1808. 2 fr. 50 c.

2°. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, troisième édition, 1811, in-8., revue, corrigée et augmentée. 5 fr.

3°. Suite de ces Élémens, 2e partie. ANALYSE ALGÉBRIQUE, nouv. édition, considérablement augm., in-8., 1814. 6 fr.

4°. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, ou Application de l'Algèbre à la Géométrie, seconde édition, revue et augmentée, un vol. in-8. avec 14 pl., 1813. 5 fr. 50 c.

5°. LES RÉCIPROQUES DE LA GÉOMÉTRIE, suivis d'un Recueil de Problèmes et de Théorèmes, et de la construction des Tables trigonométriques, in-8., 2e édition, considérablement augmentée, 1810. 5 fr.

6°. ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, contenant les deux Trigonométries, les Élémens de la Polygonométrie et du levé des Plans, et l'Introduction à la Géométrie descriptive, un vol. in-8., avec pl., 1812. 5 fr.

7°. LEÇONS DE STATIQUE à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, un vol. in-8., avec 12 pl., 1811. 5 fr.

8°. LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, 3e édition, un vol. in-8., avec 4 pl., 1811. 7 fr.

9°. LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, un vol. in-8., avec pl., 1812. 7 fr.

10°. *Discussion de Racines* des Equations déterminées du premier degré à

plusieurs inconnues, et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues, deuxième édition. 1 fr. 80 c.

GAUSS. RECHERCHES ARITHMÉTIQUES, traduites par M. Poulet-Delisle, Elève de l'Ecole Polytechnique, et Professeur de Mathématiques à Orléans, 1 vol. in-4., 1807. 18 fr.

GIRARD, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Directeur du Canal de l'Ourcq et des Eaux de Paris. RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR L'EAU ET LE VENT considérés comme forces motrices, applicables aux moulins et autres machines à mouvement circulaire, traduit de l'anglais de Smeaton, in-4., avec planches, 1810. 9 fr.

—— *Traité analytique de la résistance des Solides*, et des Solides d'égale résistance, in-4. 13 fr.

GIRAUDEAU. *La Banque* rendue facile aux principales nations de l'Europe, suivie d'un nouveau Traité de l'achat et de la vente des matières d'or et d'argent, avec l'Art de tenir les Livres en parties doubles, 1793, in-4. 15 fr.

—— *Le Flambeau des Comptoirs*, contenant toutes les écritures et opérations de Commerce de terre, de mer et de Banque, nouvelle édition, corrigée et augm., 1797, in-4. 6 fr.

GIROD-CHANTRANS. ESSAI SUR LA GÉOGRAPHIE PHYSIQUE, le climat et l'histoire naturelle du département du Doubs, 2 vol. in-8. 10 fr.

GOUDIN (Œuvres de M. B.), contenant un Traité sur les propriétés communes à toutes les Courbes, un Mémoire sur les éclipses de Soleil, nouv. édit., in-4. 7 fr. 50 c.

GRASSET-SAINT-SAUVEUR. L'ANTIQUE ROME, ou Description historique et pittoresque de tout ce qui concerne le peuple romain, dans ses costumes civils, militaires et religieux, dans ses mœurs publiques et privées, depuis Romulus jusqu'à Auguste; Ouvrage orné de 50 portraits, 1 vol. in-4. 12 fr.

—— MUSÉUM DE LA JEUNESSE, ou Tableau historique des Sciences et des Arts; Ouvrage orné de gravures coloriées, représentant ce qu'il y a de plus intéressant sur l'Astronomie, la Géologie, la Météorologie, la Géographie, les trois règnes de la Nature, les Mathématiques, la Mécanique, la Physique, etc., un gros vol. in-4., renfermant 24 livraisons, 1812. 72 fr.

GUYOT. *Récréations de Mathématiques*, nouvelle édition, 3 vol. in-8., avec 100 figures. 18 fr.

HACHETTE, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique. PROGRAMME D'UN COURS DE PHYSIQUE, ou Précis des Leçons sur les principaux phénomènes de la nature, et sur quelques applications des Mathématiques à la Physique, in-8., 1809. 5 fr. 50 c.

—— *Traité des Surfaces du second degré*, in-8., 1813. 4 fr. 50 c.

—— TRAITÉ ELÉMENTAIRE DES MACHINES, 1 vol. in-4., nouv. édit., considérabl. augmentée. (*Sous presse.*)

—— *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, premier volume, contenant 10 Numéros, in-8. 12 fr.

—— *Idem*, tome II, comprenant cinq Numéros, avec pl. 12 fr.

—— *Idem*, tome III, comprenant trois Numéros, avec pl. (On vend séparément chaque Numéro et chaque Volume.) 12 fr.

HASSENFRATZ. *Cours de Physique céleste*, seconde édition, avec 29 planch., 1 vol. in-8. 7 fr. 50 c.

HATCHETT, Membre de la Société royale de Londres. EXPÉRIENCES NOUVELLES ET OBSERVATIONS SUR LES DIFFÉRENS ALLIAGES DE L'OR, leur pesanteur spécifique, etc., traduites de l'anglais par Lerat, Contrôleur du monnoyage à Paris, avec des Notes par Guyton-Morveau, etc., in-4. 9 fr.

HAUY, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur. TRAITÉ DES CARACTÈRES PHYSIQUES DES PIERRES PRÉCIEUSES, pour servir à leur détermination lorsqu'elles ont été taillées, 1 vol. in-8., avec 3 planch., 1817. 6 fr.

—— TABLEAU COMPARATIF DES RÉSULTATS DE LA CRISTALLOGRAPHIE et de l'Analyse chimique, relativement à la classification des Minéraux, vol. in-8. 5 fr. 50 c.

—— *Traité de Minéralogie*, 4 vol. in-4. et atlas. 66 fr.

—— *Essai d'une théorie* sur la structure des Cristaux, in-8. 4 fr.

—— *Traité élementaire de Physique*, 2 vol. in-8., pap. vélin (le papier ordinaire est épuisé). 30 fr.

HERBIN-DE-HALLE. DES BOIS PROPRES AU SERVICE DES ARSENAUX DE LA MARINE ET DE LA GUERRE, etc., in 8. 9 fr.

—— TRAITÉ DU CUBAGE DES BOIS, etc., un vol. in-12. 5 fr.

HISTOIRE DES INSECTES NUISIBLES ET UTILES A L'HOMME, aux bestiaux, à l'agriculture, au jardinage et aux arts, avec la méthode de détruire les nuisibles et de multiplier les utiles, cinquième édit., 2 vol. in-12. 4 fr.

HISTOIRE DES PRISONS DE PARIS et des Départemens, contenant des Mémoires rares et précieux ; le tout pour servir à l'Histoire de la Révolution française, 4 vol. in-12 ornés de 8 figures, 1797. 12 fr.

HOMASSEL, Elève gagnant maîtrise, et ex-Chef des Teintures de la Manufacture royale des Gobelins. COURS THÉORIQUE ET PRATIQUE SUR L'ART DE LA TEINTURE EN LAINE, soie, fil, coton, fabrique d'indienne en grand et petit teint, suivi de l'Art du Teinturier-Dégraisseur et du Blanchisseur, avec les expériences faites sur les végétaux colorans, revu et augmenté par Bouillon-Lagrange, Professeur et auteur d'un Cours de Chimie, 1 vol. in-8., nouvelle édition. 1818. 5 fr.

(Cet Ouvrage est le plus pratique et le meilleur qui ait encore paru sur la Teinture.)

JANTET. *Traité élémentaire de Mécanique*, in-8. 6 fr.

JANVIER. (Antide) *Manuel Chronométrique*, ou précis de ce qui concerne le Tems, ses divisions, ses mesures, leurs usages, in-18., fig., 1815. 3 fr.

—— *Essai sur les Horloges publiques*, etc., in-8. 3 fr.

JOURNAL DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, par MM. Lagrange, Laplace, Monge, Prony, Fourcroy, Berthollet, Vauquelin, Lacroix, Hachette, Poisson, Sganzin, Guyton-Morveau, Barruel, Legendre, Haüy, Malus.

—— La Collection jusqu'à la fin de 1817 contient dix-sept Cahiers in-4. renfermés en seize, avec des planches ; elle comprend les 1er, 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, 7e, 8e, 9e, 10e, 11e, 12e, 13e, 14e, 15e, 16e et 17e Cahiers. 110 fr.

—— Chaque Cahier séparé se vend, 6 fr.

—— Excepté les 14e et 17e Cahiers, qu'on vend, 9 fr.

—— Et le 16e, 7 fr.

NOTA. Il n'existe pas proprement dit, de 9e Cahier ; on prend la Théorie des Fonctions analytiques de Lagrange, nouvelle édition, 1813, pour former ce 9e Cahier. *Prix*, 15 fr.

JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE et des Arts, 85 vol. in-4., avec planch., etc. (*Voy.* à la fin du Catalogue.) 1000 fr.

JURGENSEN. (Urbain) Horloger. *Principes généraux* de l'exacte mesure du temps par les Horloges, etc. Copenhague, 1805, 1 vol. in-4., avec atlas de 19 planches. 30 fr.

LACAILLE. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES, augmentées par MARIE, avec des Notes par M. LABEY, Professeur de Mathématiques, et ex-Examinateur des Candidats pour l'Ecole Polytechnique ; Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées, etc., in-8., fig., 1811. 6 fr. 50 c.

—— LEÇONS D'OPTIQUE, augmentées d'un TRAITÉ DE PERSPECTIVE, in-8., seconde édit., 1808. 5 fr.

LACOUDRAYE. *Théorie des Vents et des Ondes*, in-8. 4 fr.

LACROIX, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, Professeur au Collége royal de France, etc. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations ; Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Ecoles secondaires, Colléges, etc., 9 vol. in-8. 38 fr. 50 c.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ARITHMETIQUE, 14e édit., 1818. 2 fr.

—— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 12e édition, 1818. 4 fr.

—— ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, 10e édit., 1814. 4 fr.

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, et d'Application d'Algèbre à la Géométrie, 6e édit., 1813. 4 fr.

—— COMPLÉMENT DES ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 4e édition, 1817. 4 fr.

—— COMPLÉMENT DES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, Élémens de Géométrie descriptive, 4e édit., 1812. 3 fr.

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL et de Calcul intégral, 2e édit., 1806. 7 fr. 50 c.

—— ESSAIS SUR L'ENSEIGNEMENT en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 vol. in-8., 2e édit., 1816. 5 fr.

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES PROBABILITÉS, in-8., 1816. 5 fr.

(Ce Cours de Mathématiques, le plus complet qui existe, est généralement adopté dans l'instruction publique.)

—— TRAITÉ COMPLET DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 2e édition, revue et considérablement augmentée, tome I et II, in-4. 40 fr.

Le tome II, se vend séparément, 20 fr

NOTA. Il reste encore des exemplaires du troisième volume de la première édition de cet Ouvrage, contenant un Traité des Différences et des Séries, et qui peut

compléter ledit Ouvrage, en attendant que la seconde édition de ce troisième volume soit imprimée; il se vend séparément, 15 fr.

LAGRANGE, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France, etc.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE, nouv. édit., revue et considérablement augmentée par l'Auteur, 2 vol. in-4., 1811 et 1815. 36 fr.

——THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES, contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies, nouv. édit., revue et augmentée par l'Auteur, in-4., 1813. 15 fr.

——LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS, nouv. édition, revue, corrigée et augmentée, in-8., 1806. 6 fr. 50 c.

——DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la théorie des Equations algébriques, in-4., 1808, nouvelle édition, revue, corrigée et considérablement augmentée; Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées. 12 fr.

LAGRIVE. MANUEL DE TRIGONOMÉTRIE PRATIQUE, revu par les Professeurs du Cadastre, MM. Reynaud, Haros, Piausel et Bozon, et augmenté des Tables des Logarithmes à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 1 v. in-8. 7 fr.

LA HARPE. *Mélanie*, ou *la Religieuse*, in-18. 1 fr. 50 c.

LALANDE. TABLES DES LOGARITHMES pour les nombres et les sinus, etc., revues par M. REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'Ecole Polytechnique, précédées de la Trigonométrie analytique, par le même, 1 vol. in-18., 1810. 2 fr. 50 c.

——*Abrégé de Navigation* historique, théorique et pratique, avec des Tables horaires pour connaître le temps vrai par la hauteur du soleil et des étoiles dans tous les temps de l'année, etc., in-4. 24 fr.

——HISTOIRE CÉLESTE FRANÇAISE, in-4. 15 fr.

——BIBLIOGRAPHIE ASTRONOMIQUE, in-4. 30 fr.

LANGLET-DUFRESNOY. *Principes de l'Histoire*, pour l'éducation de la jeunesse, etc., 1760, 6 vol. petit in-8. 15 fr.

LANS et BETANCOURT. *Essai sur la composition des Machines*, in-4., avec 12 planch., 1808. 15 fr.

LAPLACE, Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France, etc. TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE, 4 vol. in-4., avec trois Supplémens. 66 fr.

——Le quatrième volume de cet Ouvrage, qui contient de plus la Théorie de l'Action capillaire et un Supplément faisant suite au dixième livre de la Mécanique céleste, se vend séparément, 21 fr.

——Chaque Supplément séparément, 3 fr. 50 c.

——EXPOSITION DU SYSTÈME DU MONDE, 4e édit., revue et augmentée, in-4., 1813, avec le portrait de l'Auteur. 15 fr.

——Le même Ouvrage, 2 vol. in-8., sans portrait. 12 fr.

——THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS, in-4., seconde édit., 1814, avec deux Supplémens, dont un imprimé en 1816, et l'autre en 1818. 23 fr.

——ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS, troisième édit., in-8., 1816. 3 fr.

LAROCHEFOUCAULT-LIANCOURT. Voyage dans les Etats-Unis d'Amérique, faits en 1795, 96, 97, 8 vol. in-8. 30 fr.

LASSALE. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'HYDROGRAPHIE appliquée à toutes les parties du pilotage, à l'usage des Élèves ou Aspirans de la Marine militaire ou marchande, in-8., avec planches, 1817. 6 fr.

LASUITE. *Elémens d'Arithmétique*, in-8. 2 fr. 50 c.

LAVIROTTE. *Découvertes philosophiques de Newton*, in-4. 12 fr.

LEFEVRE, Ingénieur-Géomètre en chef du département d'Ille-et-Villaine. NOUVEAU TRAITÉ GÉOMÉTRIQUE DE L'ARPENTAGE, à l'usage des personnes qui se destinent à la mesure des terrains et au levé des plans et nivellement, troisième édit., revue et augmentée, 2 vol. in-8., 1811, avec 25 planches. 12 fr.

C'est sans contredit le meilleur Traité d'Arpentage, le plus pratique et le plus complet qui ait encore paru.

LEFRANÇOIS. ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, seconde édit., revue et augmentée, 1 vol. in-8. 3 fr. 50 c.

LEGENDRE, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur. ESSAI SUR LA THÉORIE DES NOMBRES, deuxième édit., revue et considérablement augmentée, 1 vol. in-4., avec le Supplément imprimé en 1816. 21 fr.

—— Le Supplément se vend séparément. 3 fr.

——*Nouvelle méthode* pour la détermination des Orbites des Comètes, avec un Supplément contenant divers perfectionnemens de ces méthodes, et leur application aux deux Comètes de 1805, 1806, in-4. 6 fr.

LEGENDRE. *Exercices de Calcul intégral* sur divers ordres de Transcendantes et sur les Quadratures, 3 vol. in-4., 1811, 1816 et 1817. 54 fr.
—— *Elémens de Géométrie*, in-8. 6 fr.
LEIBNITZ, *Opera*, 6 vol. in-4. 72 fr.
LE MIERRE. Les Fastes, ou les Usages de l'année, Poëme en 16 chants, in 8. 4 fr.
LÉONARD DE VINCI. *Essai* sur ses Ouvrages physico-mathématiques, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés d'Italie, par J.-B. Venturi, Professeur de Physique à Modène, in-4. 2 fr. 50 c.
LEPAUTE, Horloger du Roi. TRAITÉ D'HORLOGERIE, contenant tout ce qui est nécessaire pour bien connaître et pour régler les Pendules et les Montres, la description des pièces d'Horlogerie les plus utiles, etc., volume in-4., avec 17 planches, 1767. 24 fr.
LEPILEUR-D'APLIGNY. *L'Art de la Teinture* des fils et étoffes de coton, in-12. 2 fr.
LIBES, Professeur de Physique au Lycée Charlemagne, à Paris, etc. HISTOIRE PHILOSOPHIQUE DES PROGRÈS DE LA PHYSIQUE, 4 vol. in-8.; 1811 et 1814. 20 fr.
—— Le quatrième volume se vend séparément. 5 fr.
—— TRAITÉ COMPLET ET ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, seconde édit., revue, corrigée et considérabl. augm., 3 vol. in-8. avec fig., 1813. 18 fr.
NOTA. Tous les Journaux et les Savans en général ont fait le plus grand éloge de ces deux Ouvrages.
LIDONNE. *Tables de tous les Diviseurs* des nombres calculés depuis un jusqu'à cent deux mille, in-8., 1808. 6 fr.
MAINE-BIRAN. INFLUENCE DE L'HABITUDE sur la faculté de penser; ouvrage qui a remporté le prix sur cette question proposée par la Classe des Sciences morales et politiques de l'Institut national: Déterminer quelle est l'influence de l'habitude sur la faculté de penser, ou, en d'autres termes, faire voir l'effet que produit, sur chacune de nos faculté intellectuelles, la fréquente répétition des mêmes opérations, 1 vol. in-8. 5 fr.
MAIRAN. TRAITÉ DE L'AURORE BORÉALE, in-4. 12 fr.
MAIRE et BOSCOVISCH. *Voyage astronomique et géographique*, in-4. 12 fr.
MANILIUS. *Astronomicon*, libri quinque, édit. Pingré, 2 vol. in-8. 12 fr.
MARCHAND. *Voyage*, etc. (Voyez FLEURIEU).
MARÉCHAL (le) de poche, qui apprend comment il faut traiter un Cheval en voyage, et quels sont les accidens ordinaires qui peuvent lui arriver en route, etc., in-18, avec figures. 2 fr. 50 c.
MASCHERONI. PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE résolus de différentes manières, traduit de l'italien, vol. in-8. 3 fr.
—— GÉOMÉTRIE DU COMPAS, nouvelle édition. *(Sous presse).*
MAUDRU. ÉLÉMENS RAISONNÉS DE LA LANGUE RUSSE, ou principes généraux de la Grammaire appliqués à la Langue russe, 2 vol. in-8. 12 fr.
—— *Nouveau Système de Lecture*, 2 vol. in-8. et atlas. 9 fr.
—— *Elémens raisonnés de Lecture*, à l'usage des Ecoles primaires, in-8., figures. 1 fr. 50 c.
MAUDUIT. *Introduction aux Sections coniques*, pour servir de suite aux Elémens de Géométrie de M. Rivard, in-8. 3 fr.
(Et autres Ouvrages du même Auteur.)
MÉMOIRE sur la Trigonométrie sphérique, et son application à la confection des Cartes marines et géographiques, par un Officier de l'Etat-Major, in-8. 1 fr.
MÉMOIRES de l'Institut de France. (Collection complète).
MILLOT. *Tableau de l'Histoire romaine*; Ouvrage posthume, orné de 48 figures qui en représentent les traits les plus intéressans, un vol. in-folio, papier vélin, figures avant la lettre, cartonné. 36 fr.
MISSIESSY, Vice-Amiral. *Installation des Vaisseaux*, in-4., figures. 21 fr.
—— *Arrimage des Vaisseaux*, in-4., fig. 21 fr.
MOLLET. GNOMONIQUE GRAPHIQUE, ou Méthode élémentaire de TRACER LES CADRANS SOLAIRES sur toutes sortes de plans, sans aucun calcul, et en ne faisant usage que de la règle et du compas, in-8., 1815. avec pl., 1 fr. 80 c.
—— MÉCANIQUE PHYSIQUE, 1 vol. in-8., avec planches, 1818., 7 fr. 50 c.
—— *Etudes du Ciel*, ou Connaissance des Phénomènes astronomiques, in-8. 6 fr.
MONGE, Sénateur. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, à l'usage des Ecoles de la Marine, in-8., 5e édit., revue par M. Hachette, Instituteur de l'Ecole Polytechnique, 1810; Ouvrage adopté par l'Université, pour l'enseignement dans les Lycées. 3 fr. 25 c.

MONGE. APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE, à l'usage de l'École Polytechnique, in-4., 4e éd., 1809. 16 fr. 50 c.

—— GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, Leçons données aux Ecoles Normales, nouv. édit., avec un SUPPLÉMENT par M. Hachette, in-4., 1811, 35 pl. 15 fr.

—— Le Supplément à la Géométrie descriptive, par M. Hachette, 1 vol. in-4., avec 11 planches, se vend séparément, 6 fr.

—— *Description de l'Art de fabriquer les Canons*, in-4., fig. 24 fr.

MONRO. *Traité d'Ostéologie*, traduit de l'anglais, 2 vol. grand in-folio, cartonnés. 40 fr.

MONROY. *Architecture pratique*, in-8. 5 fr.

MONTEIRO-DA-ROCHA, Commandeur de l'Ordre du Christ, Directeur de l'Observatoire de l'Université de Coimbre, etc. MÉMOIRES SUR L'ASTRONOMIE PRATIQUE, trad. du portugais par M. de Mello, in-4., 1808. 7 fr. 50 c.

MONTUCLA. HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques; les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres. Nouvelle édition, considérablement augmentée, et prolongée jusqu'à l'époque actuelle, achevée et publiée par Jérôme de Lalande, 4 vol. in-4., avec fig. 60 fr.

NOTA. Cet Ouvrage est ce qui existe de plus complet jusqu'à présent sur cette partie.

MOROGUE. *Tactique navale*, ou Traité des Évolutions et des Signaux, in-4., avec fig. 15 fr.

MOUSTALON. *Morale des Poètes*, où Pensées extraites des plus célèbres poètes latins et français, etc., in-12, 1816. 3 fr. 50 c.

NÉCESSAIRE, (le) ou Recueil complet de modèles de Lettres, à l'usage des personnes des deux sexes; suivi de la Relation d'un Voyage instructif et intéressant dans toutes les parties de l'Europe, 2 vol. in-12. 4 fr.

NEVEU. *Cours théorique et pratique des Opérations de Banque*, et des nouveaux poids et mesures, in-8. 5 fr.

NEWTON. *Arithmetique universelle*, traduite en français par M. Beaudeux, avec des Notes explicatives, 2 vol. in-4., 14 planches. 18 fr.

—— *Opuscula mathematica*, 3 vol. in-4. 36 fr.

NIEUPORT. *Mélanges Mathématiques*, 2 vol. in-4. 24 fr.

Nouvelle théorie des Parallèles, avec un Appendice contenant la manière de perfectionner la Théorie des Parallèles, de A. M. Legendre, in-8. 2 fr.

ŒUVRES DE FRÉRET, de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, nouvelle édit., où l'on a réuni tous ses Ouvrages, 20 vol. petit in-12. 15 fr.

ŒUVRES DE PLUTARQUE, traduites par M. Amiot, avec des Notes de MM. Brottier et Vauvilliers; nouv. édit., revue, corrigée et augmentée de la version de divers fragmens de Plutarque, par E. Clavier, 25 vol. in-8., ornés de figures en taille-douce, et de 136 médaillons d'après l'antique. 120 fr.

PAJOT-DES-CHARMES. L'Art du Blanchîment des toiles, fils et cotons de tous genres, 1 vol. in-8., avec 8 planches. 5 fr.

PARISOT. TRAITÉ DU CALCUL CONJECTURAL, ou l'Art de raisonner sur les choses futures et inconnues, in-4., 1810. 15 fr.

PERSON. RECUEIL DE MÉCANIQUE et description des Machines relatives à l'Agriculture et aux Arts, etc., 1 vol. in-4., avec 18 planches. 10 fr.

POISSON, Membre de l'Institut, Professeur de Mathématiques à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, et Membre adjoint du Bureau des Longitudes. TRAITÉ DE MÉCANIQUE, 2 vol. in-8. de plus de 500 pages chacun, avec 8 planches, 1811. 12 fr.

POMMIÉS. MANUEL DE L'INGÉNIEUR DU CADASTRE, contenant les connaissances théoriques et pratiques utiles aux Géomètres en chefs et à leurs collaborateurs, pour exécuter le levé général du plan des communes du Royaume, conformément aux Instructions du Ministre des Finances, sur le Cadastre de France; précédé d'un Traité de Trigonométrie rectiligne, par A. A. Reynaud, 1 vol. in-4., 1808. 12 fr.

POULET-DELISLE, Professeur de Mathématiques au Lycée à Orléans. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, in-8., 1806. 4 fr. 50 c.

—— RECHERCHES ARITHMÉTIQUES, trad. du latin de Gauss, in-4. 18 fr.

Précis d'une nouvelle Méthode pour réduire à de simples Procédés analytiques la démonstration des principaux Théorèmes de Géométrie, in-4. 3 fr.

PUISSANT, Chef de Bataillon au Corps royal des Ingénieurs-Géographes. TRAITÉ DE GÉODÉSIE, ou Exposition des Méthodes astronomiques et trigonométriques, appliquées soit à la mesure de la Terre, soit à la confection du canevas des Cartes et des Plans, 1 vol. in-4., avec 8 planches, 1805. 18 fr.

PUISSANT. TRAITÉ DE TOPOGRAPHIE, D'ARPENTAGE ET DE NIVELLEMENT, avec deux Supplémens contenant la théorie de la Projection des Cartes; Ouvrage adopté par l'Université, pour l'enseignement dans les Lycées, 1 vol. in-4., 1807.

—— Les deux Supplémens au Traité de Topographie, contenant la Théorie de la Projection des Cartes, se vendent séparément, 6 fr.

—— RECUEIL DE DIVERSES PROPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE, résolues ou démontrées par l'Analyse, pour servir de suite au Traité élémentaire de l'Application de l'Algèbre à la Géométrie de Lacroix, in-8. 2 fr.

—— Le même ouvrage, 2e édition, considérablement augmentée, et précédé d'un PRÉCIS SUR LE LEVÉ DES PLANS, in-8., 1809. 6 fr. 50 c.

—— TRAITÉ DE LA SPHÈRE ET DU CALENDRIER de RIVARD, 7e édit., augmentée des Notes de M. Puissant, in-8., 1816. 4 fr.

PUJOULX. *Leçons de Physique* de l'École Polytechnique, in-8. 5 fr. 50 c.

QUARTIER DE RÉDUCTION (*nouveau*) à l'usage des Marins, augmenté d'une Instruction abrégée sur la manière de s'en servir; grand Tableau in-4., très bien gravé, 1818. *Prix* de la douzaine en feuilles, 5 fr.

RAMATUEL. *Tactique navale*, in-4., avec planch. 30 fr.

RAMOND, Membre de l'Institut, etc. *Mémoire* sur la formule barométrique de la Mécanique céleste, et les dispositions de l'atmosphère qui en modifient les propriétés, etc., in-4., 1811. 12 fr.

RAYMOND. LETTRE A M. VILLOTEAU, touchant ses vues sur la possibilité et l'utilité d'une théorie exacte des principes naturels de la Musique, etc. 4 fr.

—— ESSAI SUR LA DÉTERMINATION des bases physico-mathématiques de l'Art musical, etc., in-8. 2 fr.

REBOUL. *Notes et Additions* aux trois premières sections du Traité de Navigation de Bezout, in-8. 3 fr.

Recueil de Tables utiles à la Navigation, traduit de l'anglais de Norie, par Violaine, in-8, 1815. 9 fr.

RESTAUT. Principes généraux et raisonnés de la Grammaire française, nouvelle édition, 1 gros vol. in-12. 2 fr. 50 c.

REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique. COURS DE MATHÉMATIQUES, comprenant les Ouvrages suivans, qui se vendent chacun séparément, savoir :

1°. ARITHMÉTIQUE, 6e édition, in-8. 2 fr. 50 c.

2°. ALGÈBRE, 1re section, 3e édition, in-8., 1810. 5 fr.

3°. ALGÈBRE, 2e section, in-8., 1810. 5 fr.

4°. TRIGONOMÉTRIE ANALYTIQUE, précédée de la Théorie des Logarithmes, et suivie des TABLES DES LOGARITHMES des Nombres et des Lignes trigonométriques DE LALANDE, etc., in-18., 1810. 2 fr. 50 c.

5°. *Arithmétique* à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, in-8. 5 fr.

6°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, par MM. Pommiés et Reynaud, in-4. 12 fr.

7°. *Traité d'Arpentage* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, in-8. 7 fr.
Notes sur Bezout, par Reynaud.

8°. *Arithmétique de Bezout*, avec les Notes, 8e édition, in-8., 1816. 3 fr.

9°. *Géométrie de Bezout*, avec les Notes, 2e édition, in-8., 1812. 5 fr.

10°. *Algèbre* et application de l'Algèbre à la Géométrie de Bezout, avec les Notes, in-8., 1812. 5 fr.

RIVARD. TRAITÉ DE LA SPHÈRE ET DU CALENDRIER, septième édition (faite sur la sixième donnée par M. de Lalande), revue et augmentée de Notes et Additions, par M. Puissant, Officier supérieur du Génie, 1 vol. in-8., avec 3 planches bien gravées, 1816. 4 fr.

ROBINS. *Principes de Mathématiques*, in-8. 5 fr.

ROMME, Correspondant de l'Institut de France, etc. TABLEAUX DES VENTS, DES MARÉES ET DES COURANS qui ont été observés sur toutes les mers du globe, avec des réflexions sur ces phénomènes, 2 vol. in-8., 1817. 12 fr.

ROSAZ. *Élémens théoriques et pratiques du Calcul des Changes étrangers*, etc., 1 vol. grand in-8., 1809. 6 fr.

ROSSEL. (DE) *Calcul des Observations que l'on fait en mer*; Ouvrage faisant partie de la Navigation de Bezout, le tout formant un vol. in-8., 1814. 6 fr.

ROY. *Élémens d'Équitation militaire*, nouvelle édition, in-12. 2 fr. 50 c.

RUCHE PYRAMIDALE (la), ou Méthode de conduire les Abeilles de manière à en retirer chaque année un panier plein de cire ou de miel, outre au moins un essaim, etc., par Ducouédic, in-8., 2e édit., revue et considérablement augm., in-8. 3 fr.

RUELLE. *Opérations des Changes* des principales places de l'Europe, in-8. 6 fr.

SACOMBE. ÉLÉMENS DE LA SCIENCE DES ACCOUCHEMENS, avec un Traité sur les Maladies des Femmes et des Enfans, 1 fort v. in-8, avec portr. 5 fr.

—— LA LUCINIADE, poème en dix chants, sur l'Art des Accouchemens, in-12. 1 fr. 50 c.

SAINT-MARTIN. *ECCE HOMO*, vol. in-12. 1 fr. 50 c.

—— LE NOUVEL HOMME. (Nous ne pouvons nous lire que dans Dieu lui-même, et nous comprendre que dans sa propre splendeur. *Ecce Homo*, page 19), vol. in-8. 4 fr.

—— LE CROCODILE, ou la guerre du Bien et du Mal, arrivée sous le règne de Louis XV, etc., vol. in-8. 4 fr.

SCOPPA, Employé extraordinaire à l'Université, Membre de l'Académie des Arcades, de celle *del Bon Gusto* de Palerme, etc. LES VRAIS PRINCIPES DE LA VERSIFICATION, développés par un Examen comparatif entre la LANGUE ITALIENNE ET LA FRANÇAISE.

On y examine et l'on y compare l'accent, qui est la source de l'harmonie des vers; la nature, la versification et la musique de ces deux langues. — On y fait voir l'analogie qui existe entr'elles. — On propose les règles pour composer des vers lyriques, et les moyens d'accélérer les progrès de la Musique en France, etc. Trois gros vol. in-8., avec 56 planches de Musique gravée. 24 fr.

—— Le tome III, qui vient de paraître, contenant les 56 planches de Musique, se vend séparément, 10 fr.

—— *Elémens de la Grammaire italienne*, mis à la portée des Enfans de 5 à 6 ans; Ouvrage en Dialogues, divisé en 36 Leçons, et.., etc., in-12. 1 fr. 80 c.

Séances des Écoles Normales, nouv. édit., 13 v. in-8. et 1 v. de planches. 45 fr.

SEITZ. TABLEAU DE L'UNIVERS, ou causes du mouvement annuel et de la rotation des astres, etc., 1 vol. in-8., 1818. 2 fr. 50 c.

SERVOIS. *Essai* sur un nouveau mode d'exposition des Principes du Calcul différentiel, etc., in-4., 1814. 2 fr. 50 c.

SHAKSPEAR'S (Will.) Plays with the corrections and illustrations of various commenta tors. To wich a readded notes by Sam. Jonhson and G. Steevens; a new edition, with a glossarial index, 23 vol. in-8., Basil., 1800—1802. 90 fr.

SIMPSON. (Thomas) *Élémens d'Analyse pratique*, augmentés d'un Abrégé d'Arithmétique, in-8. 5 fr.

SMITH. *Traité d'Optique*, traduit de l'anglais par Duval-Leroy, in-4. 24 fr.

—— Supplément audit Traité, par le même, in-4. 10 fr.

—— *Cours complet d'Optique*, traduit par Pezenas, 2 vol. in-4. 24 fr.

SPIESS. ESSAI DE RECHERCHES ÉLÉMENTAIRES SUR LES PREMIERS PRINCIPES DE LA RAISON, in-8., 1809. 4 fr.

STAINVILLE, Répétiteur à l'École Polytechnique, etc. MÉLANGES D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE ET ALGÉBRIQUE, 1 gros vol. in-8., avec 8 planches, 1815. 7 fr. 50 c.

STIRLING. *ISAACI NEWTONI ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS*; sequitur illustratio ejusdem tractatûs, in-8. 7 fr. 50 c.

SUZANNE, Docteur ès-Sciences, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne, à Paris. DE LA MANIÈRE D'ÉTUDIER LES MATHÉMATIQUES; Ouvrage destiné à servir de guide aux jeunes gens, à ceux sur-tout qui veulent approfondir cette Science, ou qui aspirent à être admis à l'École Normale ou à l'École Polytechnique, 3 gros vol in-8., avec figures. 18 fr. 50 c.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

—— *Première partie*, PRÉCEPTES GÉNÉRAUX et ARITHMÉTIQUE, 2e édit., considérablement augm., in-8. 6 fr.

—— *Seconde partie*, Algèbre, in-8. 6 fr.

—— *Troisième partie*, GÉOMÉTRIE, in-8. 6 fr. 50 c.

TABLES BAROMÉTRIQUES, servant à ramener à une température donnée les hauteurs du baromètre observées à une température quelconque, in-8., 1812. 1 fr.

TEDENAT, Proviseur du Lycée de Nismes. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE, in-8. 4 fr.

—— LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE, in-8. 5 fr.

—— LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, et Calculs différentiel et intégral, 2 vol. in-8. 8 fr.

THÉVENEAU. COURS D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Écoles centrales et du Commerce, in-8. 3 fr.

THIOUT aîné, maître Horloger à Paris. TRAITÉ D'HORLOGERIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, approuvé par l'Académie royale des Sciences, 2 vol. in-4., avec 91 planches, 1741. 36 fr.

TRINCANO. *Élémens de Fortification*, 2 vol. in-8. 15 fr.

TRINCANO. *Arithmétique*, in-8. 5 fr.

VALMONT DE BOMARE. *Dictionnaire raisonné universel d'Histoire naturelle*, 15 vol. in 8., nouvelle édition. 60 fr.
VAUCHER. *Histoire des Conferves d'eau douce*, in-4., avec fig. 12 fr.
VEGA. *Tabulæ logarithmico-trigonometricæ*, 2 vol. in-8. 33 fr.
—— *Thesaurus et Logarithmorum completus*, in-fol. 60 fr.
VIEL. *Des fondemens des Bâtimens publics et particuliers*, in-4. 3 fr.
VIOLAINE. RECUEIL DE TABLES UTILES A LA NAVIGATION, traduit de l'anglais de John William Norie, Professeur d'Hydrographie à Londres; précédé d'un Abrégé de Navigation pratique, contenant ce qui est nécessaire et indispensable à toutes les classes de Marins; enrichi de plus, d'un Vocabulaire des termes les plus usités dans la Marine; le tout extrait des meilleurs Auteurs français, anglais, espagnols, etc.; recueilli, mis en ordre, et augmenté de remarques et observations nouvelles, par P.-A. Violaine, ex-Commissaire de Marine, Professeur de Mathématiques et de Navigation, etc.; 1 vol. in-8., très bien imprimé, beau papier, 1815. 9 fr.
Nota. Cet Ouvrage est extrêmement utile pour les Marins.
VOIRON. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE depuis 1781 jusqu'à 1811, pour servir de suite à l'Histoire de l'Astronomie de Bailly, in-4., 1811. 12 fr.
Nota. Cet Ouvrage est indispensable aux personnes qui possèdent les 5 vol. de l'Astronomie de Bailly.
VOLNEY, Pair de France, Membre de l'Institut, etc. VOYAGE EN SYRIE ET EN ÉGYPTE pendant les années 1783, 84, 85; 4e édit., 2 vol. in-8., 1807. 12 fr.
—— LES RUINES, ou Méditation sur les Révolutions des Empires, 5e édition, revue et augmentée par l'Auteur, 1 vol. in-8., belle édition, 1817, avec fig. 6 fr.
—— Le même Ouvrage, traduit en espagnol, 1 vol. in-12, fig. 1817. 5 fr.
—— LEÇONS D'HISTOIRE prononcées à l'École Normale en l'an III de la République française; Ouvrage élémentaire, contenant des vues neuves sur la nature de l'Histoire, etc., 1 vol. in-8., nouvelle édition, 1810. 4 fr.
—— Tableau du climat du sol des États-Unis d'Amérique, 2 vol. in-8. 12 fr.
—— Simplification des Langues orientales, ou méthode facile d'apprendre les Langues arabe, persane et turque, in-8. 5 fr.
—— RECHERCHES NOUVELLES SUR L'HISTOIRE ANCIENNE, 3 vol. in-8., 1815. 15 fr.
—— Questions de Statistique à l'usage des Voyageurs, in-8., 1813. 75 c.
—— La Loi naturelle, ou Catéchisme du Citoyen français, 1 vol. in-18. 1 fr. 25 c.
Voyages du Professeur Pallas, 8 vol. in-8. et atlas. 50 fr.
VUILLIER. *Arithmétique* découverte par un Enfant de dix ans, ou manière d'enseigner l'Arithmétique aux Enfans, in-8. 3 fr.
WRONSKI, Officier supérieur au service de Russie. *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, et Technie de l'Algorithmie, in-4., 1811. 15 fr.
(Et les autres ouvrages du même Auteur.)

JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE ET DES ARTS, Ouvrage périodique qui paraît tous les mois par cahier de dix feuilles d'impression, avec des pl. en taille douce; ce qui forme 2 vol. par an, format in-4., par feu J.-C. DELAMÉTHERIE, Professeur au Collége de France, et continué par M. H. DE BLAINVILLE, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, Professeur de Zoologie, d'Anatomie et de Physiologie comparée, à la Faculté des Sciences, suppléant de M. Cuvier au Jardin du Roi et au Collége de France, Membre et Secrétaire de la Société Philomathique, etc., etc.

Prix de l'abonnement pour Paris, 27 fr. pour un an, 33 fr. pour les départemens, et 39 fr. pour l'étranger; et pour six mois, 15 fr. pour Paris, 18 fr. pour les départemens, et 21 fr. pour l'étranger, le tout rendu franc de port par la poste de mois en mois.

On trouve à la même adresse des Collections complètes, des volumes et même des Numeros séparés.

Le prix de chacun des volumes qui ont paru depuis le tome 50 est de 18 f., ceux antérieurs ne coûtent que 12 fr.

Depuis la mort de M. Delamétherie, M. H. de Blainville, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, etc., etc., est principal Rédacteur du *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire naturelle et des Arts*. Ce Journal, qui existe depuis l'année 1771, sans interruption, et dont la collection importante forme maintenant 85 volumes, se compose chaque mois d'un cahier de dix feuilles d'impression in-4°, avec une ou deux planches en taille-douce, ce qui donne pour l'année deux volumes d'environ 500 pages chacun. Il est, comme l'indique son titre, consacré à toutes les parties des sciences naturelles, y compris l'Astrono-

nue et la haute Physique, en sorte qu'il offre une très grande variété. Chaque année, dans un Discours préliminaire étendu, le Rédacteur retrace brièvement l'histoire des découvertes de l'année précédente, et de la marche suivie dans ces différentes sciences, tant en France qu'à l'étranger, de manière à pouvoir mettre ses lecteurs au courant de tout ce qui a été fait dans les différentes branches des connaissances humaines. La plus grande partie de chaque numéro est consacrée à la publication de Dissertations et de Mémoires entièrement nouveaux, ou traduits littéralement des meilleurs Journaux étrangers, dans toutes les langues; et le reste, sous le titre de nouvelles scientifiques, se compose d'un extrait des découvertes les plus intéressantes, rangées sous les titres *Astronomie, Physique, Chimie, Minéralogie et Géologie, Botanique, Anatomie et Physiologie végétales, Zoologie, Anatomie et Physiologie animales*, et enfin, *Arts et Biographie*.

Le nouveau Rédacteur, qu'il suffit d'annoncer comme le SUPPLÉANT DE M. CUVIER, paraîtra sans doute, par les nombreux rapports qu'il a avec les Savans, et par la grande quantité d'amis et d'élèves jeunes et zélés qu'il possède à Paris et dans toutes les parties de l'Europe, dans la position la plus favorable pour entretenir une correspondance étendue, qui ne peut que rendre le *Journal de Physique* bien plus intéressant qu'il ne le fut dans les dernières années de M. Delamétherie, où nous ne pouvons nier que ce savant l'avait un peu négligé.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES; Ouvrage périodique, rédigé par M. J. D. GERGONNE, Professeur de Mathématiques transcendantes à la Faculté des Sciences de Montpellier, Secrétaire de la Faculté des Lettres, Membre de l'Académie du Gard, et Associé de celle de Nancy.

Depuis le 1er Juillet 1810 ces Annales paraissent régulièrement de mois en mois par livraison de 32 pages in-4° au moins, en sorte que les 12 Livraisons de chaque année forment un volume in-4° de près de 400 pages, accompagné de toutes les planches nécessaires pour l'intelligence du texte.

Le prix de la Souscription annuelle est de 21 fr. franc de port pour la France, et de 24 fr. pour l'étranger.

Le prix des sept volumes qui ont paru jusqu'à ce jour est de 120 fr.

Chaque volume se vend séparément, 18 fr.

Cet Ouvrage renferme une grande quantité de Mémoires curieux et intéressans sur les Mathématiques et sur toutes les parties qui en dépendent.

Ouvrages sous presse chez le même Libraire.

DELAMBRE, Membre de l'Institut, etc. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DU MOYEN AGE, 1 vol. in-4., avec planches.

LACROIX, Membre de l'Institut, etc. TRAITÉ COMPLET DE CALCUL DIFFERENTIEL ET DE CALCUL INTEGRAL, tome troisième et dernier, 1 vol. in-4.

HACHETTE, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique. TRAITÉ DES MACHINES nouv. édit. considérabl. augmentée, 1 vol. in-4. avec planches.

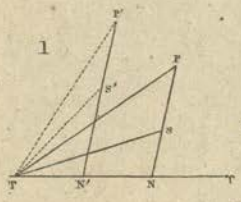
GEOMETRIE DU COMPAS, par MASCHERONI, nouv. édit., 1 vol. in-8., avec planches.

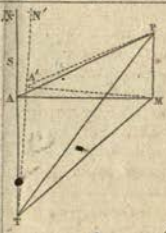
BIOT et ARAGO, Membres de l'Institut. VOYAGE ASTRONOMIQUE FAIT EN ESPAGNE PAR ORDRE DU BUREAU DES LONGITUDES, etc.; Ouvrage formant le tome IV de la Base du Système métrique de M. Delambre, 1 vol. in-4.

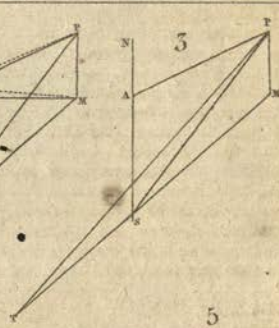
Parmi les Ouvrages anciens ou rares qui se trouvent en petit nombre à ma Librairie mathématique, on distingue particulièrement les suivans : les Ouvrages mathématiques d'*Euler*, d'*Alembert*, *Newton*, *Descartes*, *Bernoulli*, *Képler*, *Tycho*, *Fermat*, *Leibnitz*, *Galilée*, *Pappus*, *Huyghens*, *Viete*, *Boscovich*, *Agnesi*, *Wallis*, *Wolff*, *Sgravesande*, *Cramer*, *Cassini*, *Neper*, *Mersenne*, *Cavalerius*, *Ptolémée*, *Kircker*, *Taylor*, *Simpson*, *Saunderson*, *Emerson*, *etc.*, *etc.*; diverses éditions d'*Euclide*, de *Diophante*, d'*Archimède*, d'*Appollonius*. — Les Mémoires de l'Académie des Sciences de *Paris*, *Berlin*, *Pétersbourg*, *Turin*; les Mémoires de l'Institut, les Transactions philosophiques de Londres, etc., etc., etc., etc.

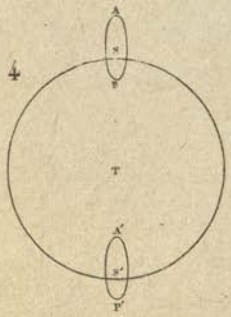
NOTA. On se charge à l'adresse ci-dessous de toutes les Impressions, de quelle nature qu'elles soient.

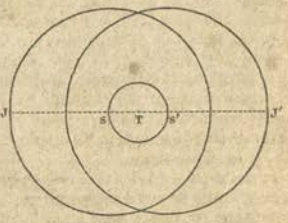
A Paris, de l'Imprimerie de Mme Ve COURCIER, rue du Jardinet, n° 12.



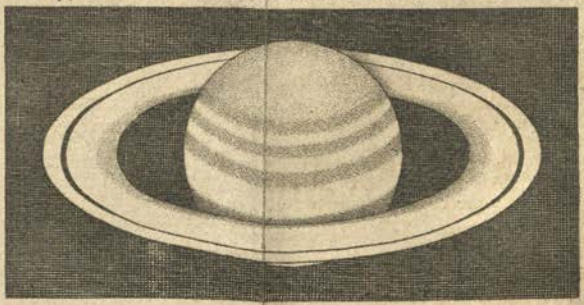


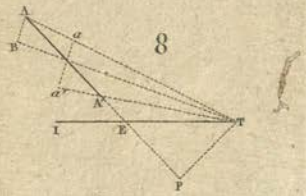


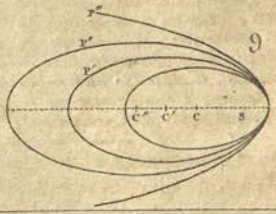




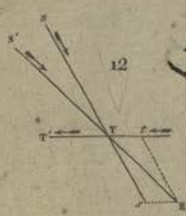
Apparences diverses de Saturne et de son anneau.

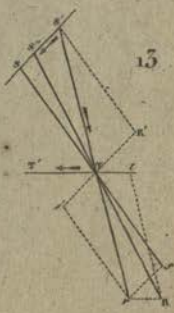


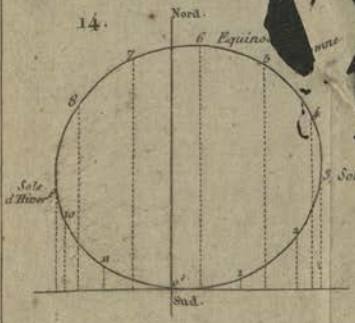


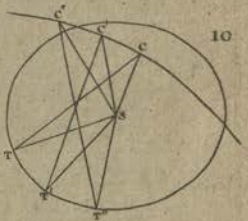


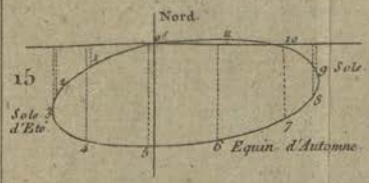
Gravé par Tardieu l'aîné, rue de Sorbonne, n.° 10.

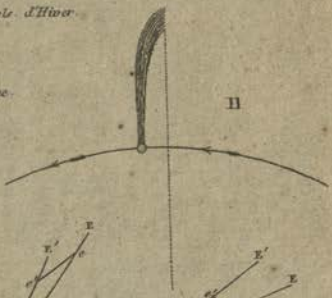

12

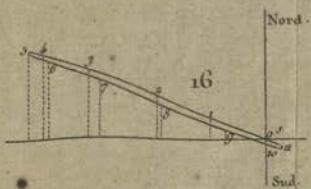

13

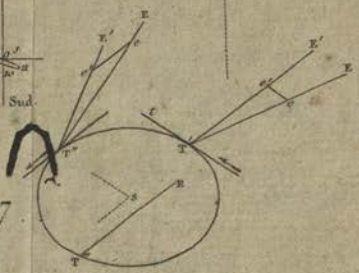

14.
Nord.
Sud.
Solst. d'Hiver
Solst. d'Eté

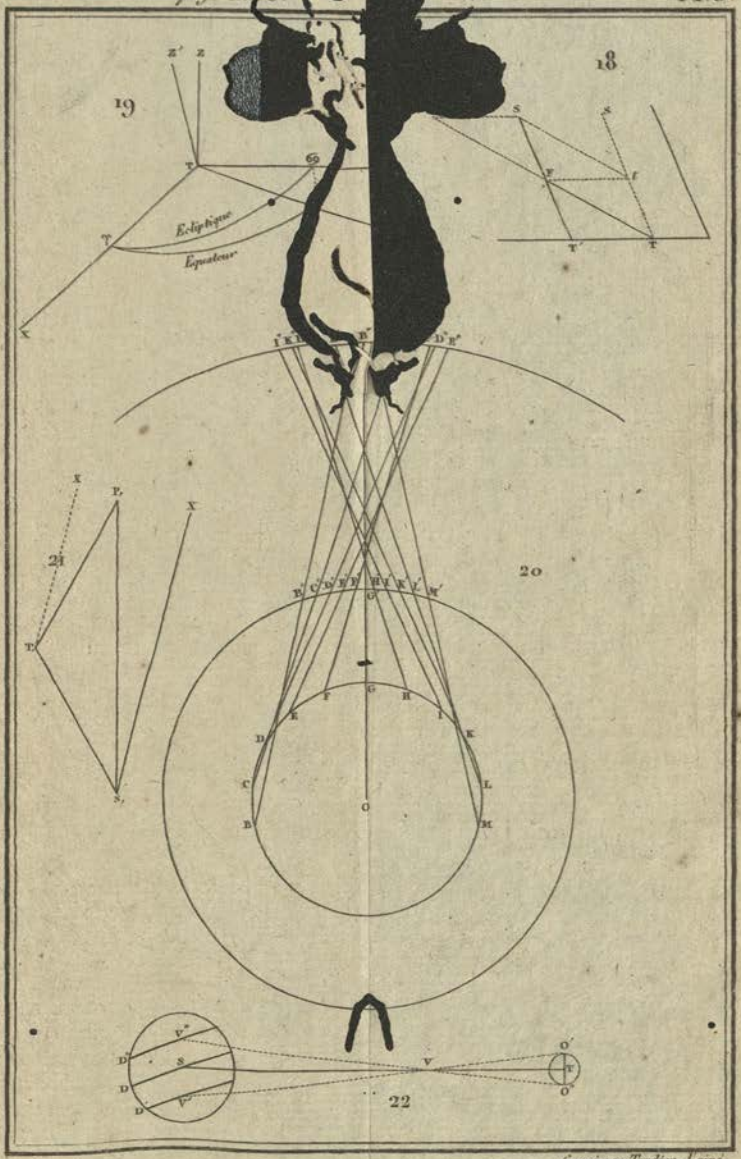

10


Nord.
15
Solst. d'Hiver
Solst. d'Eté
Equin. d'Automne

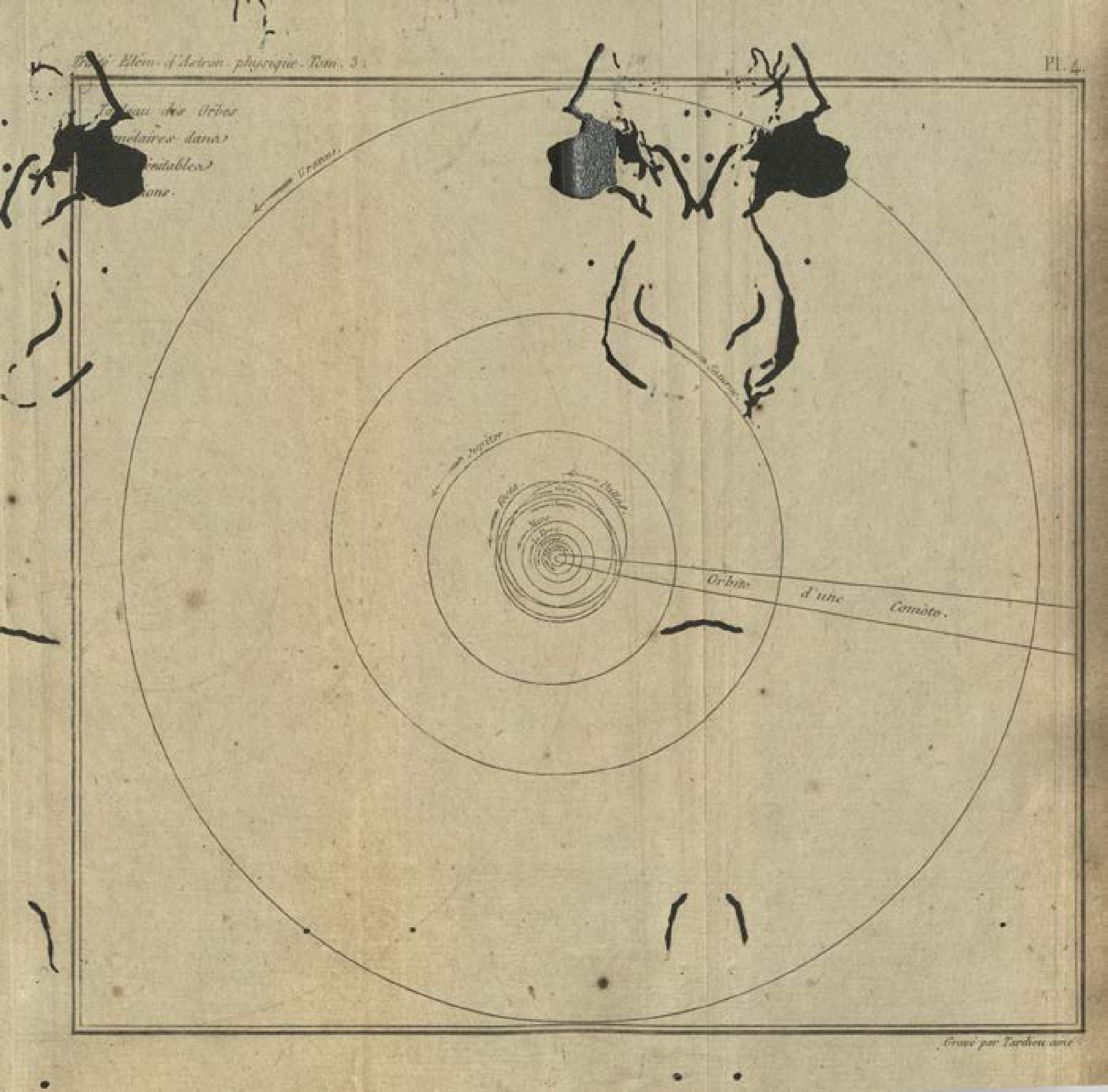

11


16
Nord.
Sud.

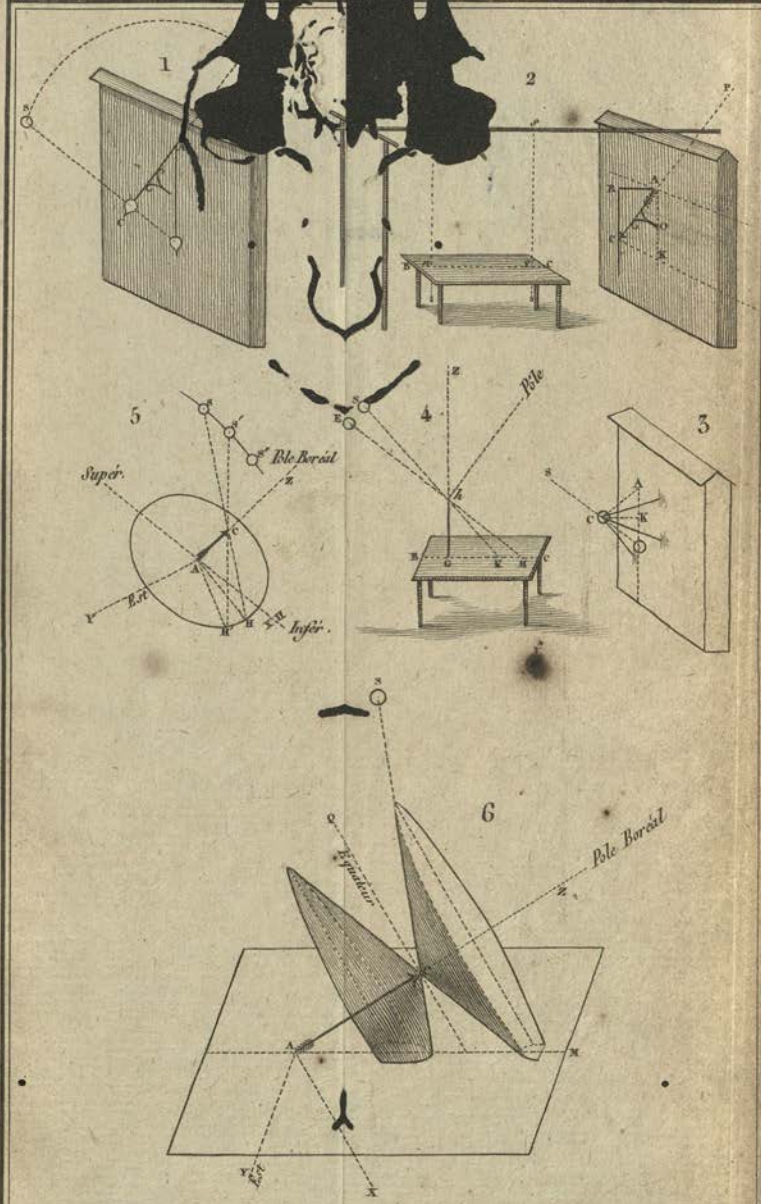

17



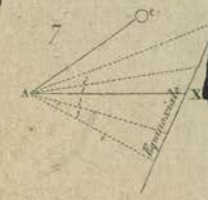
Gravé par Tardieu l'aîné.

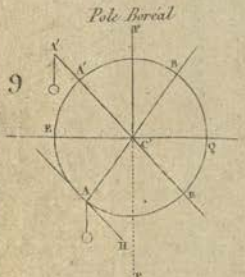


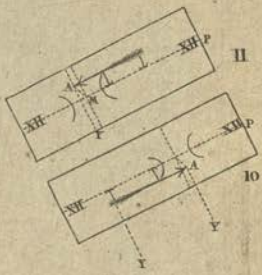
Gravé par Tardieu aîné

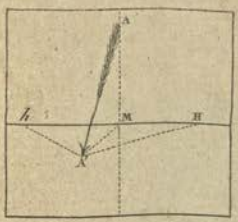


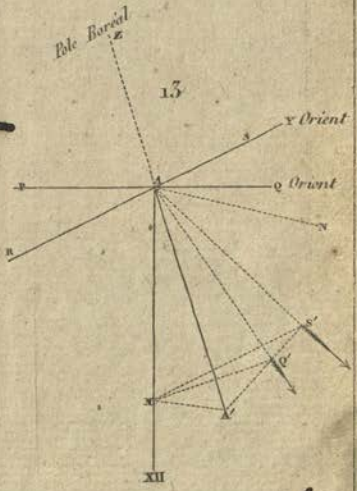
Gravé par Tardieu l'aîné.

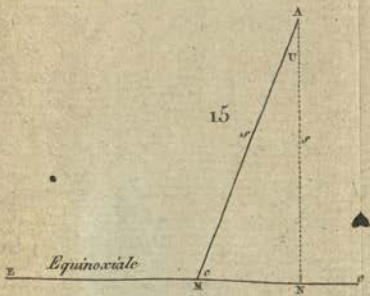












Gravé par Tardieu l'aîné.

fig. 16.

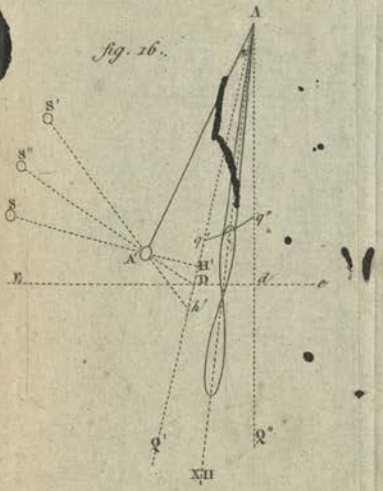


fig. 17.

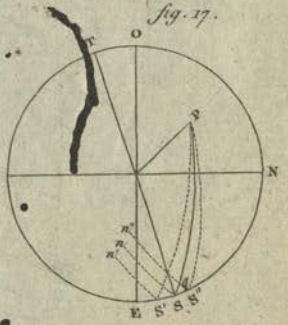


fig. 18.

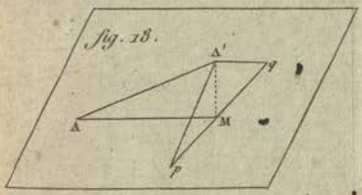


fig. 19.

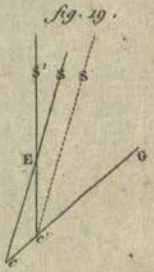
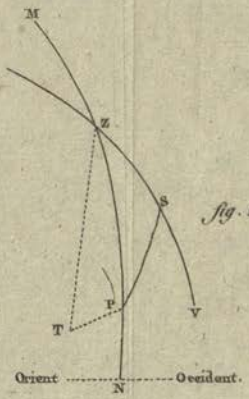


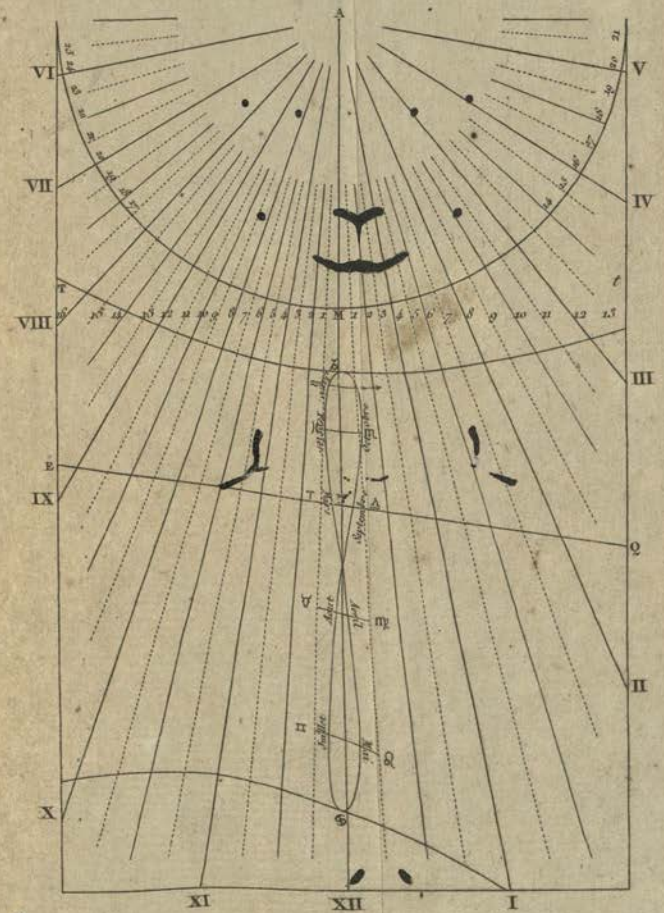
fig. 20.

fig. 21.



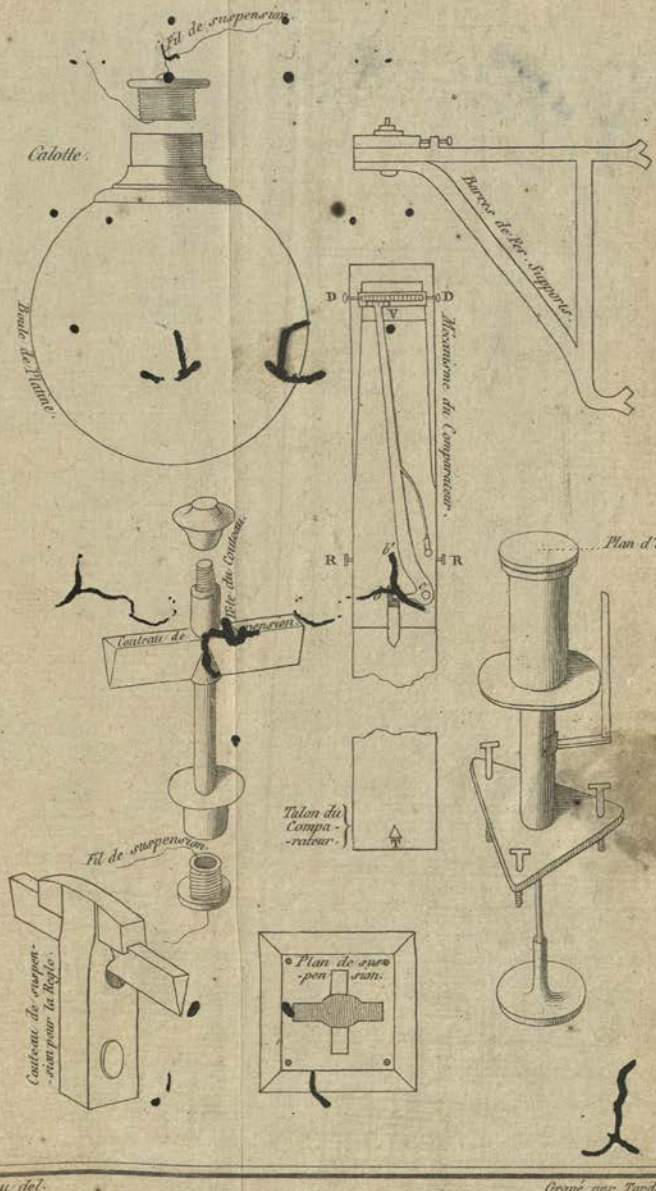
Gravé par Tardieu aîné.

Cadran solaire vertical et déclinant à l'est avec la méridienne du tems moyen.

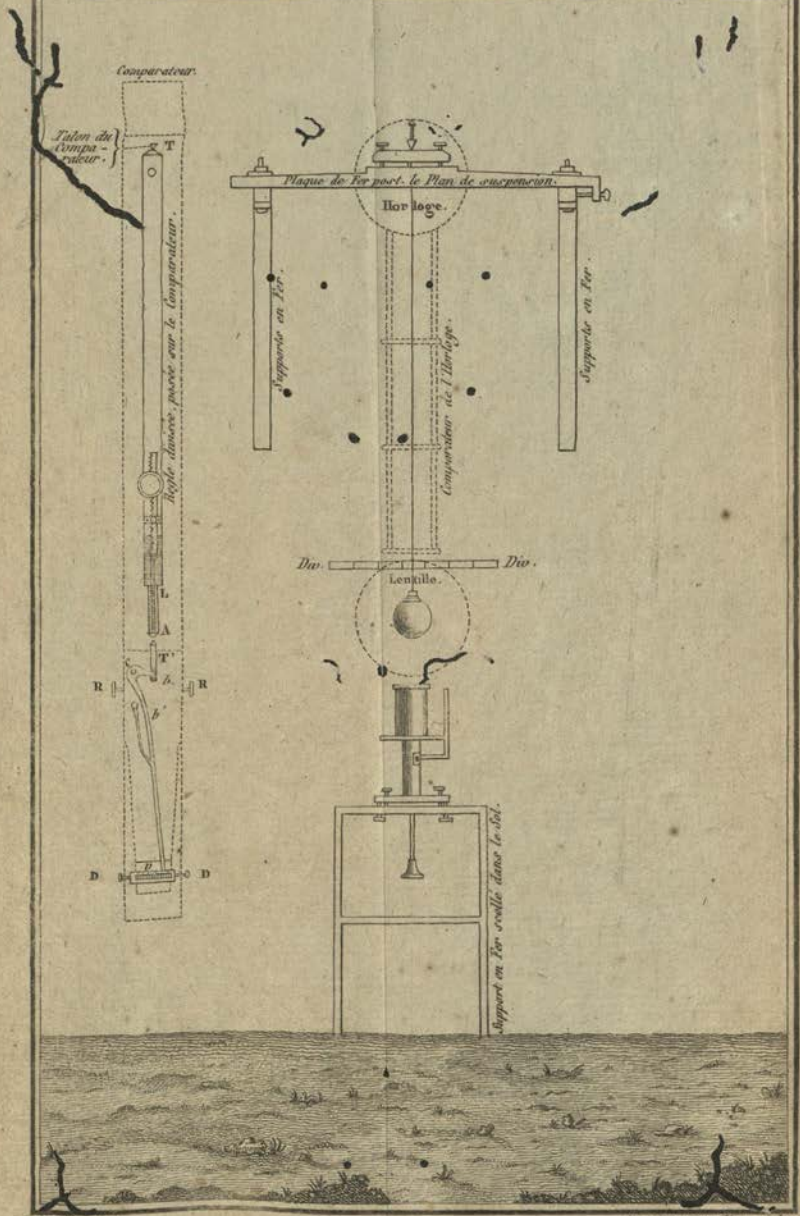


La méridienne du tems moyen doit couper la ligne du midi en 4 points différens, Tom. 2. pag. 237. mais les deux du milieu se confondent dans la figure à cause de sa petitesse.

Gravé par Tardieu l'aîné.



Mathieu del. Gravé par Tardieu aîné.



Mathieu del.

Gravé par Tardieu aîné.

Fig. 1.

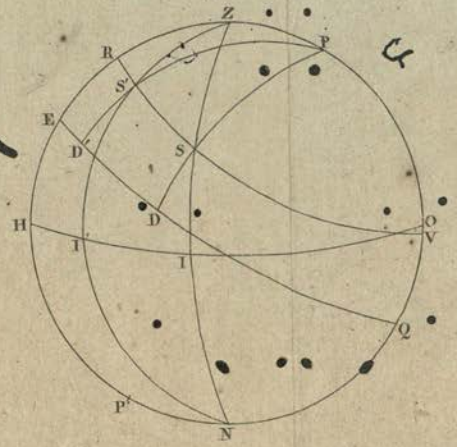
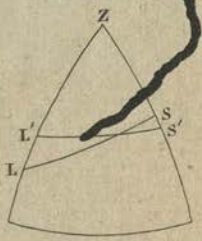


Fig. 3.



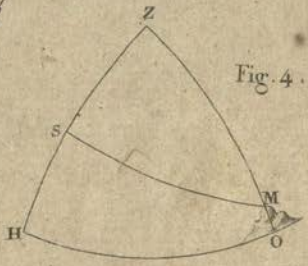
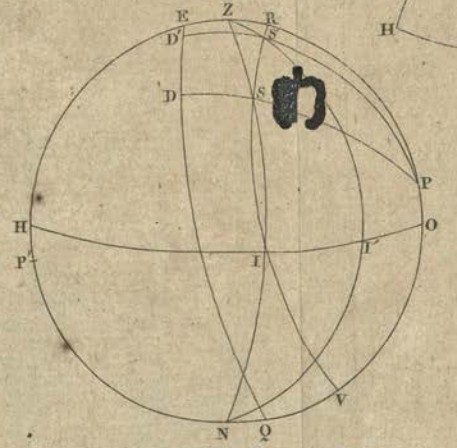


Fig. 4.

Fig. 2.



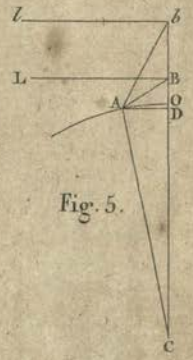


Fig. 5.

Réduit et dessiné par Rodrigues.

Gravé par Tardieu l'aîné.

00053186

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 26 June, 2018